

## Моделювання маломодових і багатомодових світловодів.

*Ціль роботи:* дослідити багатомодового ВС і порівняти їх з параметрами одномодового світловоду, отриманими у лабораторних роботах № 1, № 2.

### Короткі теоретичні відомості.

У багатомодових світловодах розширення імпульсів визначається різницею часу пробігу мод (міжрідною дисципліною) і розширенням імпульсів кожної моди (внаслідок дисперсії матеріалу і хвильоводної дисперсії – лабораторна робота № 2 ). Сумарна середньоквадратична ширина імпульсної характеристики

$$\sigma = (\sigma_{між}^2 + \sigma_{вн}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

$\sigma_{між}$  - характеризує розбіжності часу пробігу мод;

$\sigma_{вн}$  - розширення імпульсу в межах моди середнє по всім модам, що розраховується для кожної моди за формулою

$$\sigma_{вн} = \sigma_{\lambda} L / \lambda \left[ M \lambda + N_{\lambda} \Delta / cV \left( \frac{d^2 V_b}{dV^2} \right) \right]$$

Мода хвильоводу визначається як деякий особливий розподіл поля, яке поширюється вздовж хвильоводу зі збереженням певного стану поляризації, зі сталою групою швидкістю ( $U_{gp} = \frac{d\omega}{d\beta}$ ) та без зміни структури свого зачаткового поперечного розрізу. В залежності від геометрії та фізичних характеристик хвильоводу останій може підтримувати поширення декількох мод або лише однієї моди.

Для будь-якої моди з індексом  $m$  можна знайти критичну товщину хвильоводу, за якої відбувається відсічна мод

$$d_c = \frac{1}{2} \frac{m\lambda}{(n_1^2 - n_2^2)^{1/2}} ; \quad m=0,1,2,3,\dots \quad (2)$$

Якщо товщина хвильоводу незмінна, а змінюється довжина хвилі випромінювання, що поширюється, то довжина хвилі відсічки для даної моди  $\lambda_c$  дорівнює:

$$\lambda_c = \frac{2\pi d n_1}{2.4048} \sqrt{2\Delta} \quad (3)$$

Для виникнення відсічки потрібно:

$$n_1 \cos \theta_m < n_2 \text{ тобто } \theta_m < \arccos \left( \frac{n_2}{n_1} \right) \quad (4)$$

Тобто умова (4) це є умова порушення повного внутрішнього відбиття на границі розподілу осердя – оболонка.

Повздовжня складова хвильового вектору:

$$\beta = k_0 n_1 \cos \theta \quad (5)$$

поперечна складова:

$$K_1 = K_0 n_1 \sin \theta \quad (6)$$

Ступінчастий профіль.

Кожна з мод поширюється довжиною волокна зі швидкістю

$$V_{\partial} = \frac{d\omega}{dB_{1,m}}$$

Що є характерною для даної модової групи. На виході виході волокна енергія різних мод шумується і утворюється імпульс більшої довжини, ніж вихідний. Ефект “ розпливання ” імпульсу відомий як часова дисперсія. Часова дисперсія є однією з визначних характеристик при розрахунку багатоходових волокон, так як вона визначає ширину смуги пропускання волокон.

В багатоходових волокнах груба оцінка часового розпливання імпульсу має бути зроблена за допомогою обчислення різниці часів проходження волокна нижчою і вищою дозволеними модами.

Конкретна мода волокна зі ступінчастим профілем показника заповнення має можливість поширюватись під характеристичним кутом  $\theta_p$ , складаючи вектором плоскості хвилі  $K_0 n_1$ , з віссю волокна кут, який визначається за формулою:

$$K_1 = K_0 n_1 \sin \theta_p \quad (8)$$

$P$  – структурний номер моди що відповідає конкретному значенням  $l$  та  $m$ .

Час за який звичайний промінь проходить відстань  $L$  у волокні:

$$\tau = n_1 L / \cos \theta_p^L \quad (9)$$

Тобто якщо хвильоводом одночасно поширюються під кутом  $\theta_p^L$ , що змінюється між 0 та  $\theta_p^L$  ( $\theta_p^L = \pi - \theta_c$ ), різні промені, що мають однакову потужність, то ці промені пройдуть волокном за різний час і різниця часу між проходженням найкоротшим (що відповідає  $\theta_p^L=0$ ) і найдовшим (що відповідає  $\theta_p^L \approx \theta_p^L$ ) шляхами складе:

$$\Delta\tau = \tau_s - \tau_f = \frac{n_1 L}{c} \left( \frac{n_1 - n_2}{n_2} \right) \quad (10)$$

або

$$\Delta\tau \approx n_1 L / c \cdot \Delta_1 \quad \Delta \leq 0.01 \quad (11)$$

Для опису хвильоводних мод скористуємося характеристичними рівняннями:

$$g_1 \frac{J_{l-1}(g_1)}{J_1(g_1)} = -g_2 \frac{K_{l-1}(g_2)}{K_1(g_2)} \quad (12)$$

З (12) обчислюємо значення сталої поширення  $\beta_{lm}$  для різних мод.

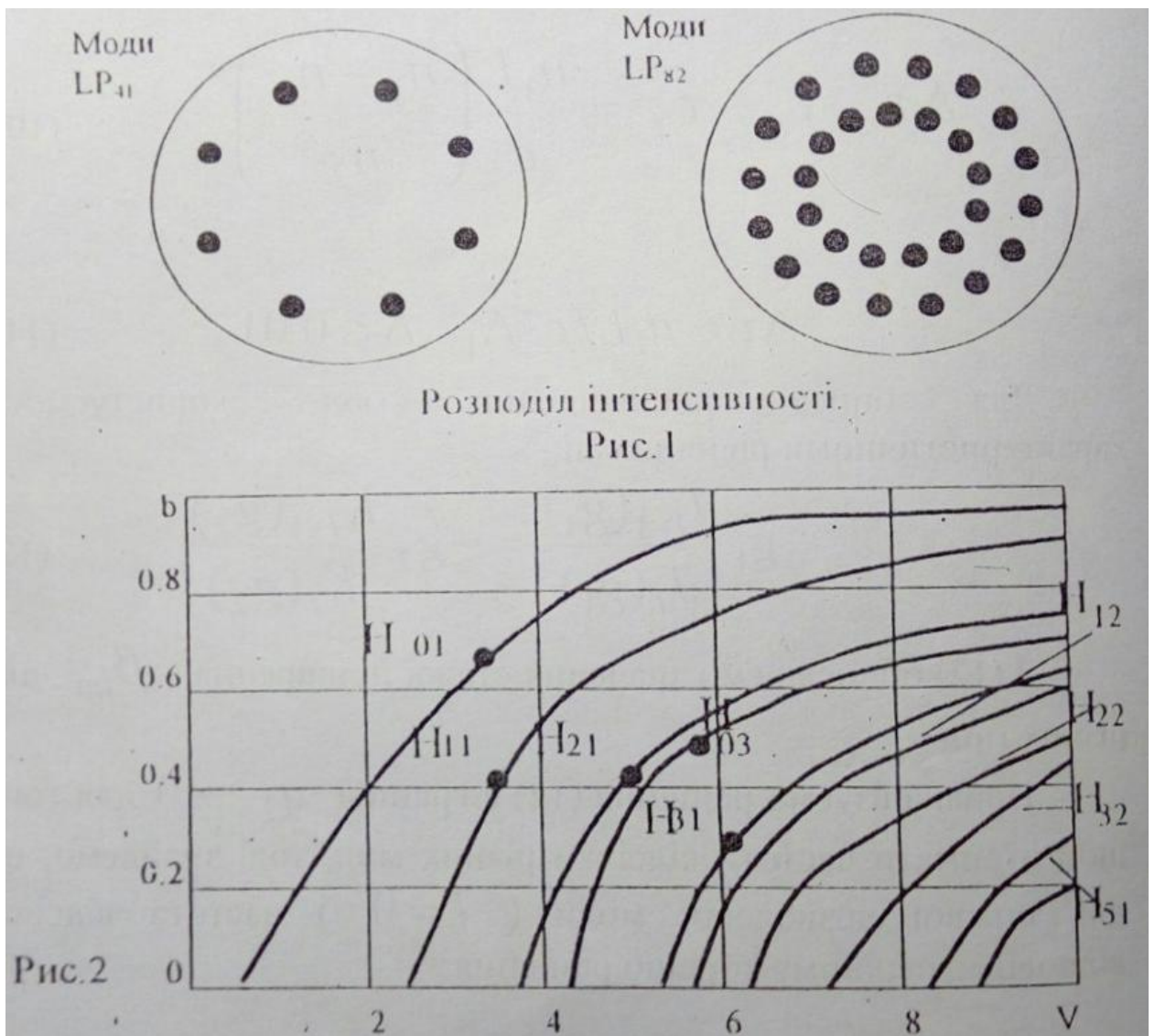
Проаналізуємо рівняння (12)  $g_2 \rightarrow 0$  для того, щоб отримати частоти відсічки різних мод, тоді знайдемо, що для нижньої дозволеної моди ( $l=0$ ) частота відсічки відповідає першому кореню рівняння:

$$J_{-1}(V_c) = J_1(V_c) = 0 \quad (13)$$

В той час як для наступної частоти моди частота відсічки  $V_c$  задається першим коренем рівняння:

$$J_0(V_c) = 0$$

Індекс  $l$  відповідає  $l$ -тому порядку функції Бесселя, він визначає умову відсічки для відповідного номера моди, а також азимутальну періодичність, тобто число періодів функції  $\cos$  або  $\sin$ , що вкладаються на колі, або фізично  $l$  являє собою число пучностей у кутовому розташуванні, вкладених вздовж півкола, в той час як  $m$ - число пучностей в радіальному розподілі рис.1 вигляд нормований сталої поширення  $b$  в залежності від  $V$  показаний на рис.2



$$b = \frac{\beta^2 / K_0^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2}$$

для хвильоводних мод  $b$  лежить між 0 та 1.

Кожна крива відповідає одній з  $l, m$  – мод. Значення  $V$   $s$  може бути знайдено безпосередньо з графіка.

Ефективний радіус для однієї моди :

$$r_{l,m} = \frac{a}{[V^2 - g_{1lm}^2]^{1/2}}$$

### Градiєнтне оптичне волокно.

В градиєнтному оптичному волокні більш гладкий рефракційний профiль призводить до значного розширення смуги частот, що передаються:

$$n^2(r) = n_r^2$$

$$n^2(r) = n_1^2[1 - 2\Delta] = n_2^2; \quad r \geq a$$

У виразі (17)  $q$  – визначає форму профiлю показника заломлення. Перевага такого подання у тiм, що воно дозволяє описувати широкий спектр рiзних розподiлiв. Починаючи з трикутника ( $q = 1$ ) i закінчуючи ступiнчастим ( $q = \infty$ ). Випадок  $q = 2$  відповідає параболiчному профiлю, для цього випадку часовий iнтервал при проходженнi променю найкоротшою та найбільш довгою траєкторiями складає:

$$\Delta\tau = \frac{n_1 L}{2c} \Delta^2$$

Для електромагнiтного аналізу градиєнтного волокна скалярне хвильове рiвняння має вигляд:

$$\frac{d^2 f_1(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df_1(r)}{dr} + \left[ k_0^2 n^2(r) - \beta^2 - \frac{l^2}{r^2} \right] f_1(r) = 0 \quad (19)$$

розв'язок (19) для всiх  $q$  не iснує, тiльки  $q = \infty$  i  $q = 2$ , якi дозволяють точний розв'язок.

Для отримання спектру сталих поширення  $\beta$  припустимо (мал.3), що в осердi показник заломлення спадає монотонно, за тим же законом, що й в оболонцi:

$$n^2(r) = n_1^2 \left[ 1 - 2\Delta \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right] \quad \text{для всіх } r \quad (20)$$

Звідси стала поширення  $l, m$  – моди

$$\beta_{l,m} = n_0 k_0 \left[ 1 - \frac{2\sqrt{2\Delta}}{ak_0 n_1} (2m + l + 1) \right]^{1/2}$$

$$\beta^2 = n_1^2 k_0^2 \left[ 1 - \frac{2\sqrt{2\Delta}}{ak_0 n_1} (2m + l + 1) \right] \quad (21)$$

Номер максимальної моди у волокні:

$$l_{max} = r [k_0^2 n^2(r) - \beta^{12}]_2^1 \quad (22)$$

Загальна кількість мод у волокні зі чтупенем профіля:

$$M(\beta^1) = a^2 k_0^2 n_1^2 \Delta \left( \frac{q}{q+2} \right) \left( \frac{k_0^2 n_1^2 \beta^{1/1}}{2\Delta a k_0^2 n_1^2} \right)^{\frac{q+2}{q}} \quad (23)$$

Зі ступінчастим профілем:

$$N = \frac{q}{q+2} (ak_0^2 n_1^2)^2 \Delta \quad (24)$$

Для градієнтного волокна з параметром  $V$

$$N = \frac{1}{2} \left( \frac{q}{q+2} \right) V^2 \quad (25)$$

Для ступінчастого з  $q = \infty$

$$N = \frac{1}{2} V^2 \quad (26)$$

Для параболічного градієнтного

$$N = \frac{1}{4} V^2 \quad (27)$$

Для типового багатоходового волокна  $V=50$ .

Різниця в часі проходження волоконною найбільш швидшою і найбільш повільною модами:

$$\Delta t g_q = t_{max} - t_{min} = \frac{LN_1}{c} \left( \frac{q-2}{q+2} \right) \Delta \quad (28)$$

В ступінчастому волокні  $q = \infty$

$$\Delta t = \frac{LN_1}{c} \Delta \quad (29)$$

В параболічному волокні  $q=2$

$$\Delta t = \frac{LN}{c} \frac{\Delta^2}{2} \quad (30)$$

Середньоквадратична ширина імпульсу зі ступінчастим профілем:

$$\sigma_{стун} = \frac{L\Delta}{2\sqrt{3}c} \left( n - \lambda n^l \left( 1 + 6\Delta + \frac{48}{5} \Delta^2 \right) \right) \quad (31)$$

Різниця в ширині імпульсу ступінчастого і градієнтного волокон досить велика:

$$\frac{\sigma_{град}}{\sigma_{стун}} \cong \Delta X (1 - 3\Delta) \quad (32)$$

Для розрахунку шереги імпульсу має бути відома яка спектральна характеристика джерела, так і функція імпульсного відгуку мод.

Між модовій інтервал у волокні отримується від диференціювання  $\beta_m$  по  $m$ :

$$\frac{d\beta_m}{dm} = \left( \frac{q}{q+2} \right)^{1/2} \frac{2\sqrt{\Delta}}{\alpha} \left( \frac{m}{M} \right)^{\frac{q-2}{q+2}} \quad (33)$$

З аналізу (33) витікає, що існує пряма відповідність між кутом (поширення) моди та її індексом:

$$M = M(\beta^l)$$

Для ступінчастого волокна:

$$\frac{d\beta_m}{dm} = \frac{2\sqrt{\Delta}}{\alpha} \left( \frac{m}{M} \right)$$

З (21а) отримуємо:

$$\cos \theta_m = \left[ 1 - 2\Delta \left( \frac{m}{M} \right)^{\frac{2q}{q+2}} \right]^{1/2} \quad (34)$$

Де  $\theta_m$  – максимальний кут між хвильовим вектором  $k$  і віссю  $z$  при  $r=0$ .

Для параболічного:

$$\sin\theta_m = \sqrt{\frac{2\Delta m}{M}}$$

Для ступінчатого:

$$\sin\theta_m = \sqrt{2\Delta} \left(\frac{m}{M}\right) \quad (35)$$

Порівняння цих результатів вказує, що моди в градієнтному волокні більш локалізовані в осерді, ніж у випадку ступінчастого волокна. За відсічки  $m=M$ , так що  $\sin\theta_1 = \sqrt{2\Delta_1}$  що є визначним числом апертури ступінчастого волокна. Вирази(35) і (26) можна використати для розрахунку діаграми полів, що випромінюються з обох волокон.

Загальна кількість мод для градієнтного з  $\alpha$  профілем:

$$M = \frac{q}{q+2} n_0^2 k_0^2 \alpha \Delta \quad (36)$$

Для ступінчастого:

$$M = n_0^2 k_0^2 \alpha^2 \Delta = V^2 / 2 \quad (37)$$

Аналізуючи (36) і (37) бачимо, що кількість мод в градієнтному волокні складає приблизну половину числа мод в ступінчастому волокні з ідентичним діаметром осердя.

Розподіл відносної потужності моди в оболонці:

$$\eta_{c1} = \frac{q_1^2}{V} (1 - \mathfrak{R}). \quad (29)$$

$$\text{Де } \mathfrak{R} \approx 1 - (q_2^2 + l^2 + 1). \quad (40)$$

Коли мода наближається до відсічки,  $W \gg 1$

$$\eta_{c1} \approx 1 - \frac{1}{1-l^2} \quad (41)$$

$$\eta_{c2} \approx \frac{1}{\sqrt{1-l^2}} \quad (42)$$

Порядок виконання роботи.

1. Дослідити багатомодове волокно зі ступінчастим і градієнтним профілем показника заломлення для типу скла, показника заломлення, довжини хвилі, відносного показника заломлення для яких досліджувалось одномодове волокно у лабораторній роботі №2. Діаметер волокна взяти 50 мм.



2. Визначити максимальний індекс моди у волокні (22).

Число мод в ступінчастому і градієнтному волокні з (24),(25).

Визначити різницю часу проходження волокном між найвидною і найпоширенішою модою (28).

4. Хвильоводну дисперсію за формулою:

$$\tau_B = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \frac{2n_1^2 \Delta l}{2}$$

5. Міжмодову дисперсію за формулою:

$$\tau_{\text{мод}} = \frac{\Delta n_1^2 \Delta l}{c} - \text{для ступінчастого};$$

$$\tau_{\text{мод}} = \frac{\Delta^2 n_1 \Delta l}{2c} - \text{для градієнтного};$$

6. Матеріальну дисперсію за формулою:

$$\tau_{\text{мат}} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \frac{\lambda^2}{c} \frac{d^2 n}{d\lambda^2} l;$$

(можна брати значення з попередніх лабораторних робіт)

7. Сумарну дисперсію за формулою:

$$\sigma = (\sigma_{\text{між}}^2 + \sigma_{\text{вн}}^2)^{\frac{1}{2}};$$

8. Пропускна здатність:

$$\Delta F = \frac{1}{\tau}$$

Порівняти отримані результати для ступінчастого і градієнтного волокон багатомодового волокна з результатами лабораторної роботи № 2 для одноманітного волокна і письмово зробити висновки.

9. Знайти критичну товщину хвильоводу:

$$d_c = \frac{1}{2} \frac{m\lambda}{(n_1^2 - n_2^2)^{1/2}}, \quad m=1,2,3\dots$$

10. Визначити сталу поширення за формулою (15) і побудувати графік залежності сталої поширення від  $V$ , від номера моди. Яка мода має найбільшу сталу поширення.

11. Знайти ефективний радіус для найменшої, найбільшої і середньої моди ступінчастого волокна за формулою (16).

12. Визначити міжродовий інтервал в ступінчастому і градієнтному волокні за формулою (33), (33а).

Побудувати графік залежності міжродового інтервалу від відносного показника заломлення  $\Delta$  в інтервалі від 0.3 до 0.01 для ступінчастого і градієнтного волокна.

13. Визначити фазову і градієнтну швидкість і їх границі для волокон що досліджуються

$$U_{\phi 1} = \frac{c}{n_1}; \quad U_{\phi 2} = \frac{c}{n_2}; \quad U_{gp} = \frac{c}{N_{gp}}.$$

*Зміст звіту:*

Мають бути наведені розрахунки за всіма пунктами, графіки, побудовані на міліметрівці. Під кожним графіком має бути висновок. (Пункт 10,12).

### **Контрольні запитання для захисту.**

1. Що таке мода ? Чим вона визначається?
2. Як визначається довжина хвилі відсічки?
3. Що називають фазовою швидкістю?
4. Що називають груповою швидкістю? Яка різниця між фазова швидкістю і груповою?
5. Що таке критична частота і як її розрахувати ?
6. Як визначається критична довжина хвилі і в чому її фізичний зміст?
7. Що називають нормованою частотою?

