ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА
ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

@ZTUEDUUA

Комп’ютерна обробка зображень в інформаційно-вимірювальних системах

Лекція 8
Тема: Фрактальна розмірність. Приклади

1) Роль масштабу
2) Розмірність – не єдиний параметр
3) Приклади
4) Оцінка реальних даних

1 Роль масштабу

Ідея фрактальної розмірності полягає у нетрадиційному поданні масштабу та розмірності. Це видно на Рис. 1, що ілюструє традиційні поняття геометрії, які формують масштаб передбачувано та відповідно до зрозумілих та знайомих уявлень про простір, в якому вони містяться. Наприклад, візьмемо лінію, поділимо її на три рівні частини, то кожна частина буде довжиною в 3 рази меншою, довжини початкової лінії. Також це має місце у площині.

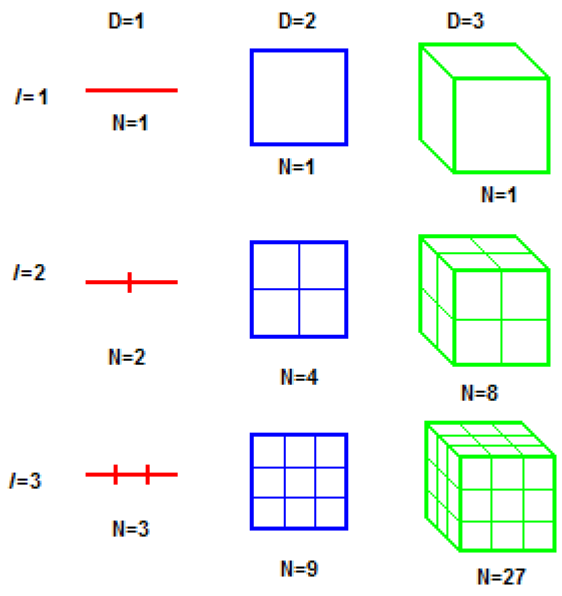

Рис. 1. Традиційне уявлення геометрії про визначення масштабу та розмірності.

Якщо виміряти площу квадрата, а потім виміряти площу квадрата зі стороною довжиною $^1/_3$ від довжини сторони початкового квадрата, то вона виявиться в 9 разів меншою за площу початкового квадрата. Цей масштаб може бути визначений математично за допомогою правила масштабу за рівнянням 1, де N – число деталей, ϵ – коефіцієнт масштабу, D – фрактальна розмірність:

$$N \propto \epsilon^{-D} \tag{1}$$

Символ $\propto$ означає пропорційність. Це правило масштабу підтверджує традиційні правила геометрії масштабу, оскільки для лінії – N=3, коли $\epsilon={}^1/_3$, то D=1, і для квадратів, тому що N=9, коли $\epsilon={}^1/_3$, D=2.

Те саме правило відноситься і до фрактальної геометрії, але менш інтуїтивно. Щоб порахувати для фрактальної лінії одиничної довжини, на перший погляд, зменшуємо масштаб у 3 рази, у цьому випадку N=4 , коли $\epsilon = {}^{1}/_{3}$ і значення D можна знайти перетворивши Рівняння 1:

$$\log_{\epsilon} N = -D = \frac{\log N}{\log \epsilon} \tag{2}$$

Таким чином, для фрактала, описаного через $N = 4$, коли $\epsilon = {}^{1}/_{3}$, $D = 1.2619$. У цьому випадку розмірність набуває не цілого значення, отже, можна припускати, що фрактал має розмірність не рівну розмірності простору, в який він вбудований. Цей же масштаб використовується для Кривої Коха та сніжинки Коха. Слід зазначити, що самі ці зображення не є істинними фракталами, оскільки масштабування описане значенням D не може продовжувати нескінченно з тієї простої причини, що зображення існує тільки в найменшій точці пікселя. Теоретична структура, яка представляє цифрове зображення, не має дискретних пікселів, як шматки, а складається з нескінченного числа сегментів під різними кутами з фрактальною розмірністю 1.2619.

2 Розмірність – не єдиний параметр

Як у випадку з розмірністю, визначеною для лінії, квадрата та куба, фрактальні розмірності — загальні характеристики, що не дозволяє однозначно визначити структуру. Значення *D* для фракталу Коха наводилося раніше, наприклад, кількісній структурі властивий масштаб, але цього не достатньо, щоб побудувати його. Багато фрактальних структур і візерунків можна побудувати з таким самим масштабом, як у кривої Коха, але все одно вони відрізнятимуться від кривої Коха (див. Рис. 2).

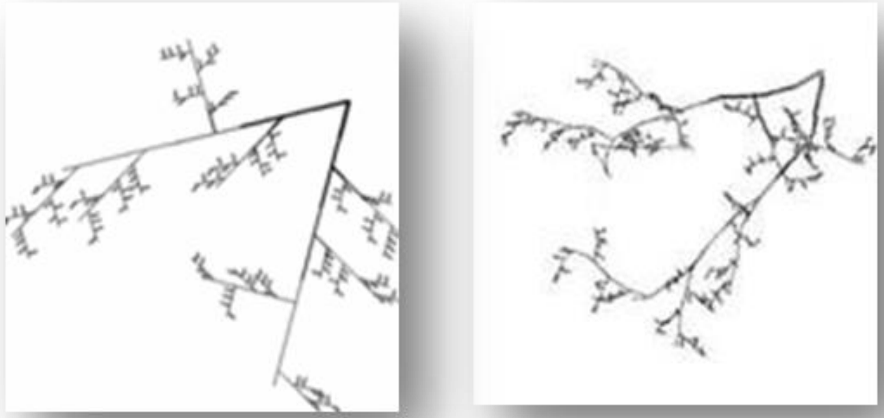

Рис. 2. Две L-системы, которые на каждой итерации получают 4 детали масштаба в $^{1}/_{3}$ раз меньше предыдущей итерации. Имеют такую же фрактальную размерность, как и для кривой Коха.

3 Приклади

Поняття фрактальної розмірності, описане у цій лекції, має класичний вигляд складної структури. Приклади, описані тут, вибрано для наочності. Масштаб та коефіцієнт відомі вже давно. Насправді, однак, фрактальні розмірності можуть бути визначені за допомогою методів, які беруть приблизний масштаб. Як визначення фрактальної розмірності у книзі Божокіна С. В. та Паршина Д. А. «Фрактали та мультифрактали» використовують наступну формулу:

$D = -\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln(N_\varepsilon)}{\ln(\varepsilon)}$, де N_ε - це число самоподібних структур лінійного розміру ε, необхідних для покриття всієї структури.

Відповідно до цієї формули, для ізольованої точки, відрізка довжиною L, поверхні площі S, простору об'єму V фрактальна розмірність збігається зі звичайною евклідовою розмірністю.

Використовуючи цю формулу, можна обчислити фрактальну розмірність, наприклад, множини Кантора (див. рис. 3). Очевидно, що на n-му кроці отримаємо 2^n відрізків довжиною $\frac{1}{3^n}$, з чого випливає, що фрактальна розмірність для множини Кантора дорівнює 0,6309.

Рис. 3. Береться відрізок прямої одиничної довжини. Потім він ділиться на три рівні частини і виймається середній відрізок. На другому кроці аналогічної процедури піддаються відрізки, що залишилися. Так процес триває нескінченно.

Декілька формальних визначень різних типів фрактальної розмірності наведено нижче. Незважаючи на те, що для деяких класичних фракталів усі ці розмірності збігаються, у загальному випадку вони не еквівалентні:

• Розмірність Мінковського: *D* оцінюється як експоненти статечного закону.

$$D_0 = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log \frac{1}{\epsilon}}$$

• Інформаційна розмірність: *D* сприймається як середня інформація необхідна виявлення зайнятої ємності з розміром цієї ємності; *p* - Імовірність.

$$D_1 = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{-\langle \log p_\epsilon \rangle}{\log \frac{1}{\epsilon}}$$

• Кореляційна розмірність *D* заснована на *M* і g_ε, де *M* - число точок, використаних, щоб представити фрактал, g_ε - число пар точок ближче, ніж один з одним.

$$D_2 = \lim_{\epsilon\to 0, M\to\infty} \frac{\log(g_\epsilon / M^\epsilon)}{\log \epsilon}$$

- Узагальнені розмірності Реньї:

Розмірність Мінковського, інформаційну та кореляційну розмірності можна розглядати як окремий випадок безперервного спектру узагальнених розмірностей порядку α, визначених таким чином:

$$D_\alpha = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\frac{1}{1-\alpha} \log\left(\sum_i p_i^\alpha\right)}{\log \frac{1}{\epsilon}}$$

- Розмірність Хігуті

$$D = \frac{d \log(L(k))}{d \log(k)}$$

- Розмірність Ляпунова
- Мультифрактальні розмірності: особливий випадок розмірностей Реньї, коли поведінка масштабу змінюється у різних частинах рисунка.
- Невизначеність показника
- Розмірність Хаусдорфа
- Пакувальна розмірність
- Розмірність Ассойда
- Локально пов'язана розмірність

4. Оцінка реальних даних

Багато реальних явищ показують обмежені або статистичні фрактальні властивості та фрактальні розмірності, які можуть бути оцінені з вибірки даних, використовуючи комп'ютер на основі методів фрактального аналізу. Практично вимірювання фрактальної розмірності залежить від різних методологічних питань і чутливі до чисельного або експериментального шуму і обмежені в обсязі даних. Тим не менш, область швидко розвивається в оцінці фрактальної розмірності для статистично самоподібних явищ. Фрактальна розмірність має багато практичних додатків у різних галузях, що включають діагностичну візуалізацію, фізіологію, нейробіологію, медицину, фізику, аналіз зображень, акустику, нулі дзета-функції Рімана та електрохімічні процеси.

Альтернативою безпосередньому виміру є математична модель, яка нагадує формування реального фрактального об'єкта. У цьому випадку перевірка також може бути зроблена шляхом порівняння інших фрактальних властивостей, що випливають з моделі, з даними вимірювань. У колоїдній фізиці системи складаються з частинок з різними фрактальними розмірностями. Щоб описати ці системи, використовують ймовірнісний розподіл фрактальної розмірності. І, зрештою, час еволюції останніх: це процес, який обумовлений складною взаємодією між агрегацією та коалесценцією.

@ZTUEDUUA

ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА

ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

- **Розвиваємо лідерів**
- **Створюємо інновації**
- **Змінюємо світ на краще**