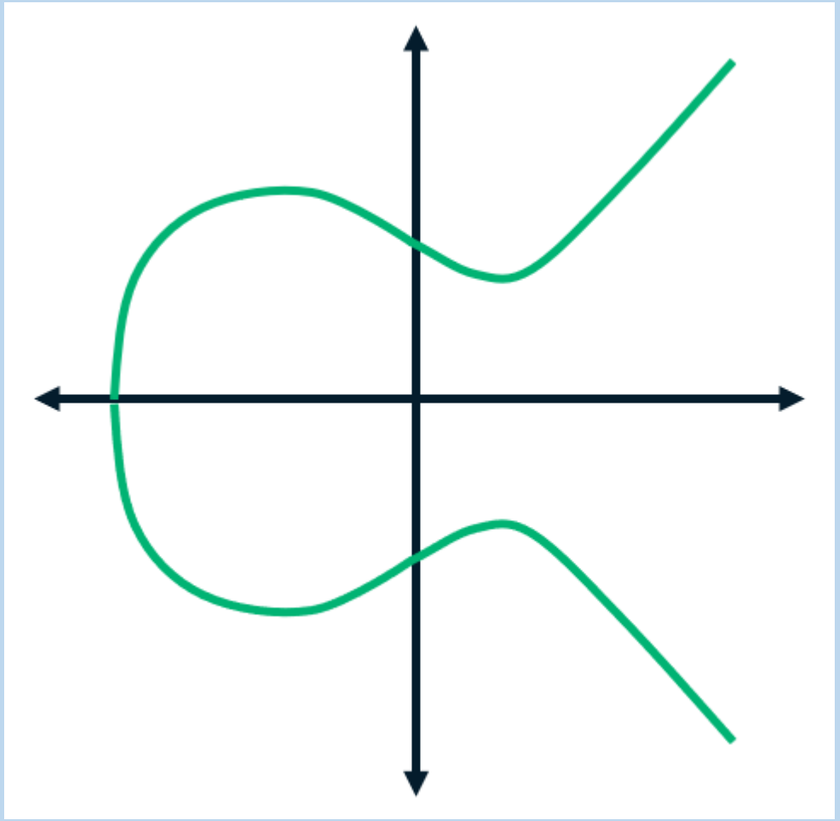
ЛЕКЦІЯ 12

ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА
ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

# Основи криптографії на еліптичних кривих



# План

1. Загальні поняття
2. Операції над точками еліптичних кривих
3. Алгоритм обміну ключами ECDH
4. Стандарт цифрового підпису ECDSS

# 1. Загальні поняття

Використання еліптичних кривих у криптографії було незалежно запропоновано Нілом Кобліцом (Neal Koblitz) та Віктором Міллером (Victor Miller) у 1985 році

Ніл Кобліц

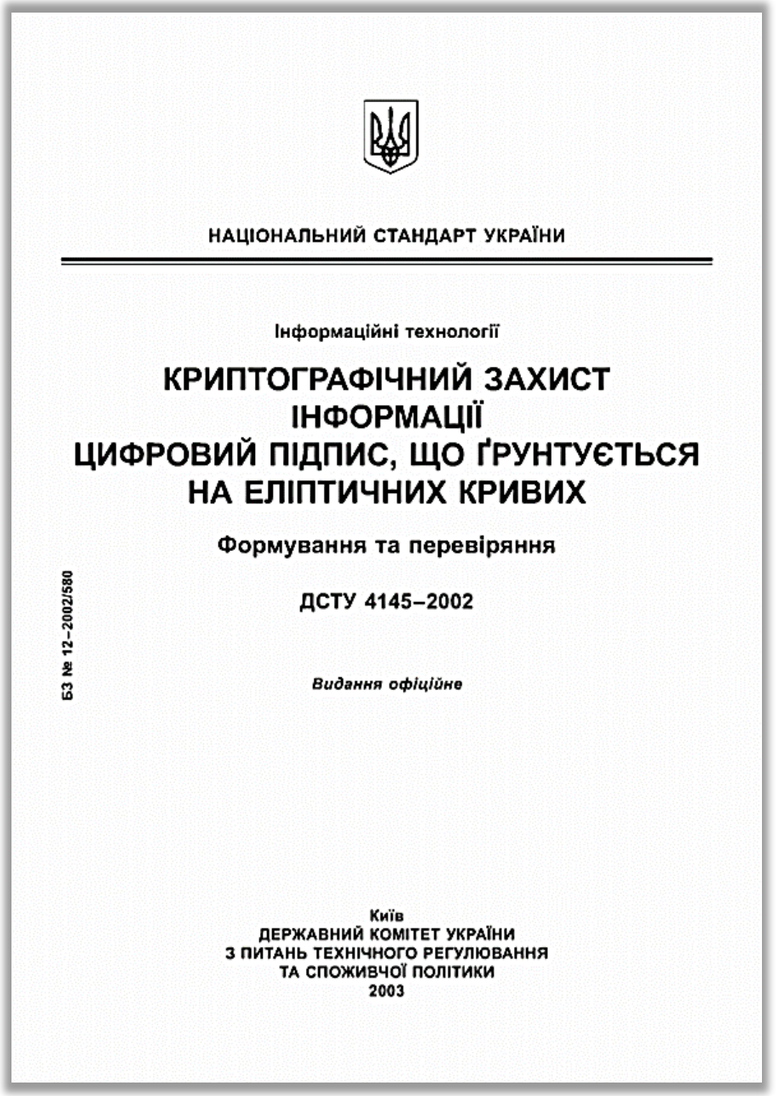
Віктор Міллер

Криптографія на еліптичних кривих (Elliptic curve cryptography, ECC) вивчає асиметричні криптосистеми, засновані на еліптичних кривих над скінченими полями

# 1. Загальні поняття

З 1998 року використання еліптичних кривих для вирішення криптографічних завдань було закріплено в стандартах США ANSI X9.62 і FIPS 186-2 (FIPS 186-3 з 2009 року)

У 2002 році в Україні був прийнятий *ДСТУ 4145-2002 «Інформаційні технології. Криптографічний захист інформації. Цифровий підпис, що ґрунтується на еліптичних кривих. Формування та перевірка»*



НАЦІОНАЛЬНИЙ СТАНДАРТ УКРАЇНИ

Інформаційні технології

КРИПТОГРАФІЧНИЙ ЗАХИСТ ІНФОРМАЦІЇ
ЦИФРОВИЙ ПІДПИС, ЩО ҐРУНТУЄТЬСЯ НА ЕЛІПТИЧНИХ КРИВИХ

Формування та перевіряння

ДСТУ 4145–2002

*Видання офіційне*

БЗ № 12–2002/580

Київ
ДЕРЖАВНИЙ КОМІТЕТ УКРАЇНИ
З ПИТАНЬ ТЕХНІЧНОГО РЕГУЛЮВАННЯ
ТА СПОЖИВЧОЇ ПОЛІТИКИ
2003

# 1. Загальні поняття

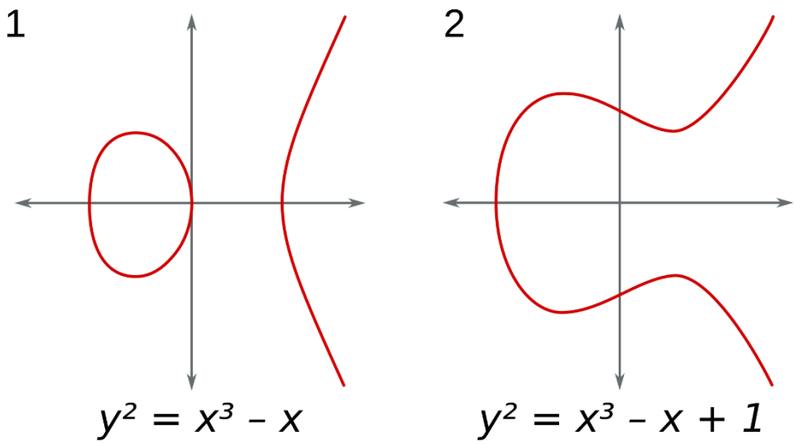
Криптосистеми на еліптичних кривих забезпечують еквівалентний захист за меншої довжини ключа

| *Ступінь захисту (на кожен біт ключа)* | *Мінімальна довжина ключа (в бітах)* | |
|---|---|---|
| | **RSA/DSA/DH** | **ECC** |
| 80 | 1024 | 160 |
| 112 | 2048 | 224 |
| 128 | 3072 | 256 |
| 192 | 7680 | 384 |
| 256 | 15360 | 512 |

# 1. Загальні поняття

Рівняння еліптичної кривої у спрощеному вигляді (рівняння Вейєрштрасса):

$$y^2 = x^3 + ax + b \qquad (1.1)$$




Так як $y = \pm\sqrt{x^3 + ax + b}$ , то графік кривої симетричний відносно *Ox*.

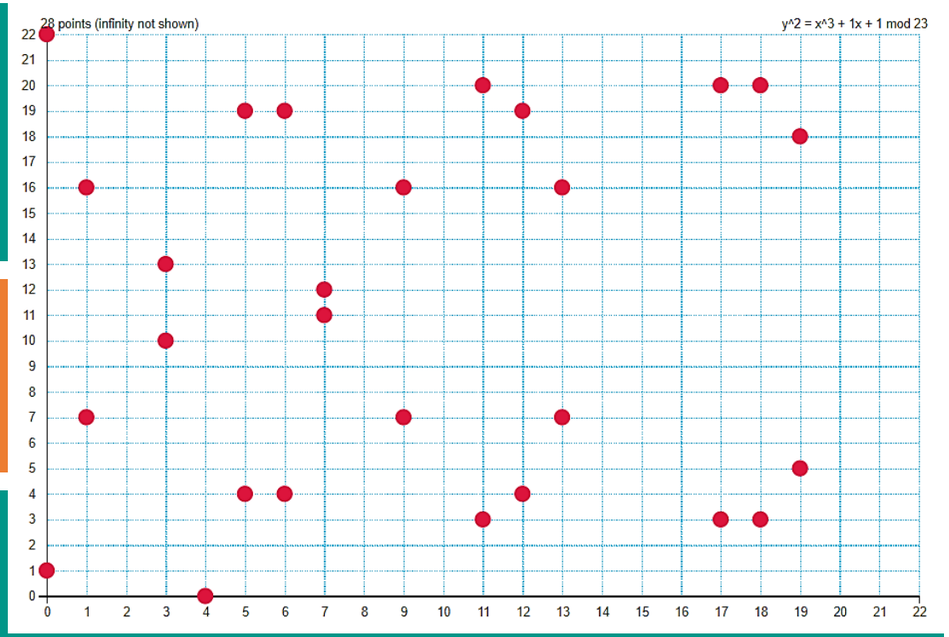
Дискримінант рівняння: $D = \left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$.

- $D < 0$ – три різних дійсних корені (графік 1);
- $D = 0$ – три дійсних корені, два з яких однакові (сингулярна крива);
- $D > 0$ – один дійсний корінь та два комплексних (графік 2).

# 1. Загальні поняття

Еліптична крива над скінченним полем $p$ описується рівнянням:

$$y^2 \equiv x^3 + ax + b \ (mod\ p) \quad (1.2)$$




$(x, y)$ – точки еліптичної кривої,
$a, b$ – параметри кривої,
$p$ – просте число ($p \neq 2, p \neq 3$).

При цьому параметри кривої $a$ та $b$ мають задовольняти умову

$$4a^3 + 27b^2 \neq 0 \ (mod\ p)$$

# 1. Загальні поняття

Позначимо через $E_p(a, b)$ множину точок еліптичної кривої.
Точка належить еліптичній кривій, якщо пара чисел $(x, y)$ задовольняє рівнянню (1.2).

Кількість точок кривої називається порядком кривої.

**Приклад 1.1:**
$E_5(2, 1)$ складається з 6 точок, а також точки $O$.
Порядок кривої – 7.

У множину точок еліптичної кривої також включається нескінченно віддалена точка $O$.

| solve | $y^2 \equiv x^3 + 2x + 1 \pmod 5$ |
|---|---|

Solutions in the least residue system:

$x \equiv 0, y \equiv 1 \pmod 5$

$x \equiv 0, y \equiv 4 \pmod 5$

$x \equiv 1, y \equiv 2 \pmod 5$

$x \equiv 1, y \equiv 3 \pmod 5$

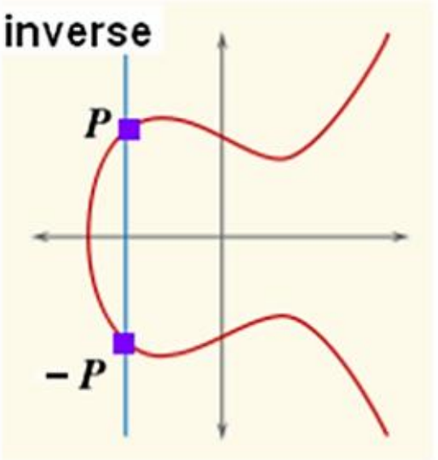
$x \equiv 3, y \equiv 2 \pmod 5$

$x \equiv 3, y \equiv 3 \pmod 5$

# 2. Операції над точками еліптичних кривих

## Обернена точка

Оберненою точкою до $P(x, y)$ називають точку еліптичної кривої $-P(x, -y)$.




**Приклад 2.1:**

Якщо $P(3, 2)$ – точка еліптичної кривої $y^2 \equiv x^3 + 2x + 1 \ (mod\ 5)$, то точка $-P\ (3, -2)$. Проте $-2\ mod\ 5 = 3$, тому $-P\ (3, 3)$.

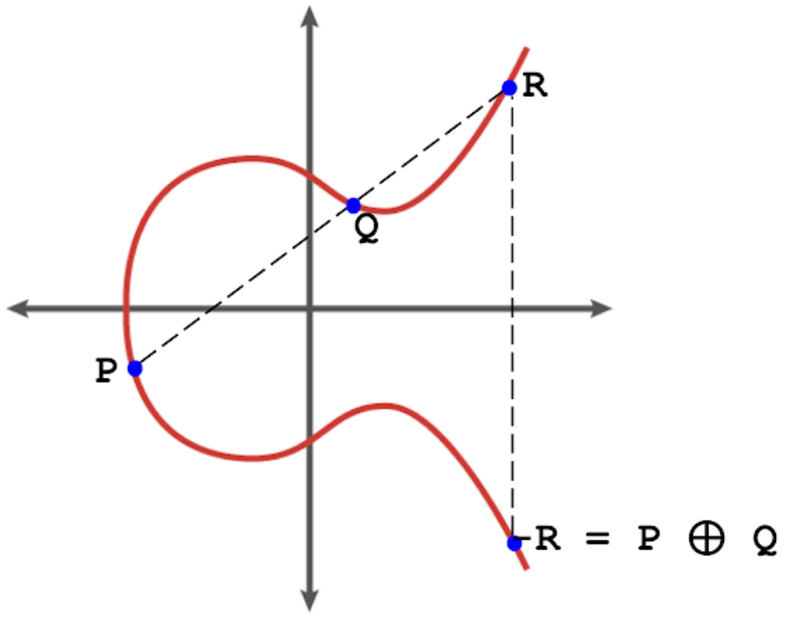
# 2. Операції над точками еліптичних кривих

## Додавання точок

Візьмемо дві різні точки $P(x_1, y_1)$ та $Q(x_2, y_2)$, які належать $E_p$ і проведемо через них пряму.

Ця пряма обов'язково перетне криву в третій точці $R$.

Проведемо через точку $R$ вертикальну пряму до перетину з кривою у точці $-R = P + Q$.

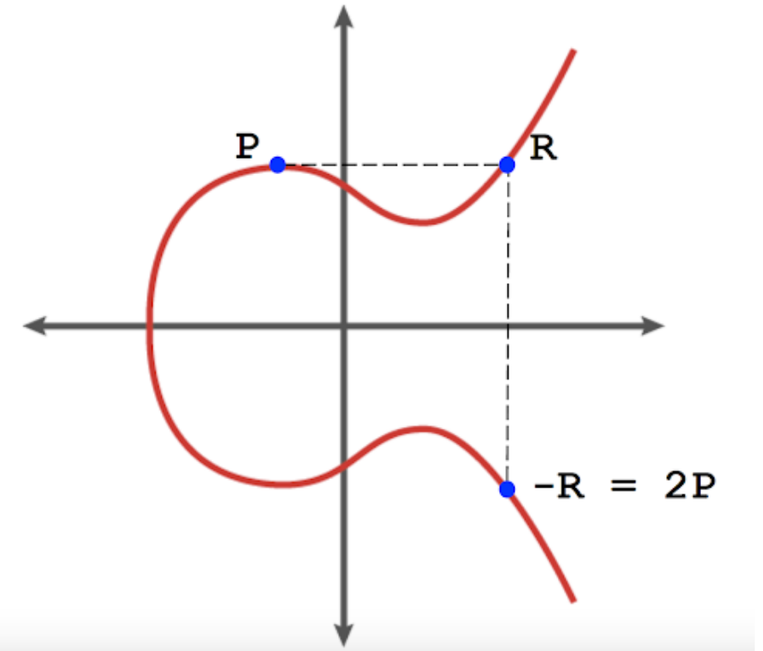


# 2. Операції над точками еліптичних кривих

## Подвоєння точки

Якщо дві точки $P(x_1, y_1)$ та $Q(x_2, y_2)$ співпадають, то $P + Q = P + P$, що рівнозначно подвоєнню точки $2P = -R$.

При $P = Q$ січна перетворюється на дотичну, тому точка $2P$ є оберненою до точки $R$.



# 2. Операції над точками еліптичних кривих

Координати $-R(x_3, y_3)$ визначаються за формулами:

*Додавання точок (якщо $P \neq Q$)*

$$x_3 = \lambda^2 - x_1 - x_2 (mod\ p)$$
$$y_3 = \lambda(x_1 - x_3) - y_1 (mod\ p)$$
$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (mod\ p)$$

*Подвоєння точки (якщо $P = Q$)*

$$x_3 = \lambda^2 - 2x_1\ (mod\ p)$$
$$y_3 = \lambda(x_1 - x_3) - y_1 (mod\ p)$$
$$\lambda = \frac{3x_1^2 + a}{2y_1} (mod\ p)$$

$\lambda$ – кутовий коефіцієнт січної, що проведена через точки $P(x_1, y_1)$ та $Q(x_2, y_2)$

# 2. Операції над точками еліптичних кривих

**Приклад 2.2:**

Рівняння еліптичної кривої має вигляд:

$$y^2 \equiv x^3 + x + 1 \ (mod\ 23) \qquad (2.1)$$

Потрібно перевірити чи точки $P(3, 10)$ та $Q(9, 7)$ належать кривій та знайти $P + Q$.

Підставимо значення $P(3, 10)$ та $Q(9, 7)$ у рівняння еліптичної кривої та переконаємося, що точки належать кривій:

$10^2 \equiv 3^3 + 3 + 1 \ (mod\ 23) \rightarrow 100\ mod\ 23 \equiv 31(mod\ 23)$;

$7^2 \equiv 9^3 + 9 + 1 \ (mod\ 23) \rightarrow 49\ mod\ 23 \equiv 739(mod\ 23)$.

# 2. Операції над точками еліптичних кривих

**Приклад 2.2 (продовження):**

Виконаємо додавання точок $P(3, 10)$ та $Q(9, 7)$:

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(mod\ p) = \frac{7-10}{9-3}(mod\ 23) = -\frac{3}{6}(mod\ 23) = -\frac{1}{2}(mod\ 23) = \frac{22}{2}(mod\ 23) = 11.$$

Знаходимо:

$$x_3 = \lambda^2 - x_1 - x_2(mod\ p) = 121 - 3 - 9(mod\ 23) = 109(mod\ 23) = 17$$

$$y_3 = \lambda(x_1 - x_3) - y_1(mod\ p) = 11(3 - 17) - 10(mod\ 23) = -164(mod\ 23) = 20.$$

Отже $P + Q = (3, 10) + (9, 7) = (17, 20)$.

# 2. Операції над точками еліптичних кривих

**Приклад 2.3:**

Додати точки $P(12, 19)$ та $Q(5, 4)$ еліптичної кривої 2.1.

$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (mod\ p) = \frac{4-19}{5-12} (mod\ 23) = \frac{-15}{-7} (mod\ 23) = \frac{15}{7} (mod\ 23).$

Потрібно знайти обернений елемент, розв'язавши рівняння:

$$7 \cdot Z \equiv 1\ (mod\ 23) \rightarrow Z = 10.$$

$$\lambda = 15 \cdot 10\ (mod\ 23) = 12.$$

$$x_3 = \lambda^2 - x_1 - x_2 (mod\ p) = 144 - 12 - 5 (mod\ 23) = 127 (mod\ 23) = 12.$$

$$y_3 = \lambda(x_1 - x_3) - y_1 (mod\ p) = 12(12 - 12) - 19 (mod\ 23) = 4 (mod\ 23) = 4.$$

# 2. Операції над точками еліптичних кривих

**Приклад 2.4:**

Дано точку $P(5, 4)$ еліптичної кривої 2.1. Знайти $2P$ та $3P$.

$$\lambda = \frac{3x_1^2+a}{2y_1}(mod\ p) = \frac{3\cdot 25+1}{2\cdot 4}(mod\ 23) = \frac{76}{2\cdot 4}(mod\ 23) = \frac{19}{2}(mod\ 23).$$

Знайдемо обернений елемент, розв'язавши рівняння:

$$2 \cdot Z \equiv 1\ (mod\ 23) \rightarrow Z = 12.$$

$$\lambda = 19 \cdot 12\ (mod\ 23) = 21.$$

$$x_3 = \lambda^2 - 2x_1(mod\ p) = 441 - 10(mod\ 23) = 431(mod\ 23) = 17.$$

$$y_3 = \lambda(x_1 - x_3) - y_1(mod\ p) = 21(5 - 17) - 4(mod\ 23) = -256(mod\ 23) = 20.$$

Отже $2P = (17, 20)$.

# 2. Операції над точками еліптичних кривих

**Приклад 2.4 (продовження):**

Далі знайдемо суму точок $P + 2P = (5, 4) + (17, 20)$.

$\lambda = \frac{20-4}{17-5}(mod\ 23) = \frac{16}{12}(mod\ 23) = \frac{4}{3}(mod\ 23)$.

Знайдемо обернений елемент, розв'язавши рівняння:

$$3 \cdot Z \equiv 1\ (mod\ 23) \rightarrow Z = 8.$$

$$\lambda = 4 \cdot 8\ (mod\ 23) = 9.$$

$$x_3 = 9^2 - 5 - 17(mod\ 23) = 81 - 22(mod\ 23) = 13.$$

$$y_3 = 9(5 - 13) - 4(mod\ 23) = 9 \cdot (-8) - 4(mod\ 23) = -76(mod\ 23) = 16.$$

Отже $3P = (13, 16)$.

# 2. Операції над точками еліптичних кривих

Множина точок еліптичної кривої $E_p(a, b)$ разом із введеною точкою на нескінченності $O$ утворює комутативну групу щодо операції додавання точок. Для цього виконуються усі необхідні властивості:

Якщо $P$ і $Q \in E_p\ (a, b)$, то $P + Q \in E_p\ (a, b)$ – замкнутість;

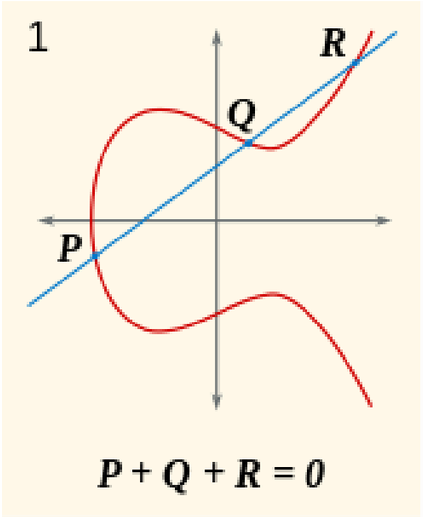
$P + Q = Q + P$ – комутативність;

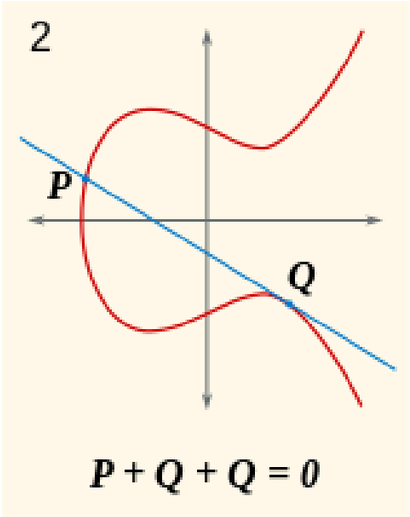
$(P + Q) + R = P + (Q + R)$ – асоціативність;

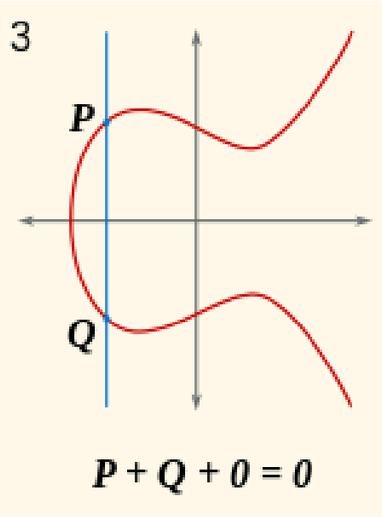
$P + (-P) = O$ – обернений елемент;

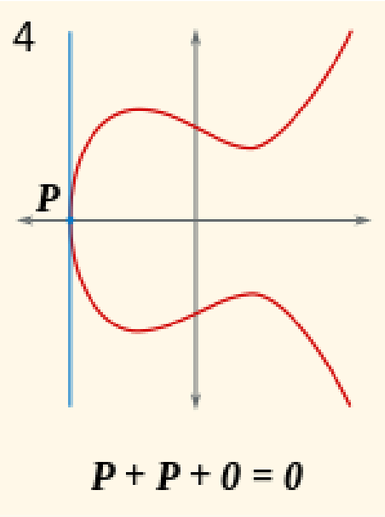
$P + O = O + P = P$ – нейтральний елемент.

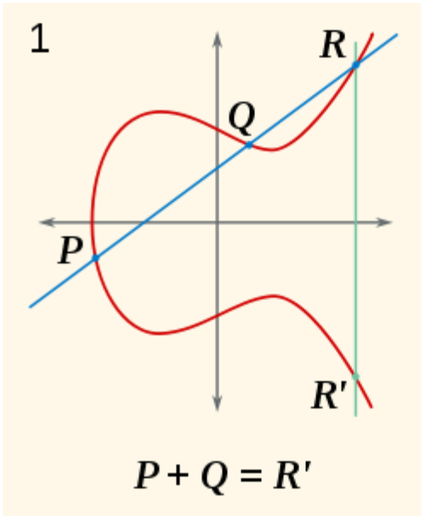
# 2. Операції над точками еліптичних кривих

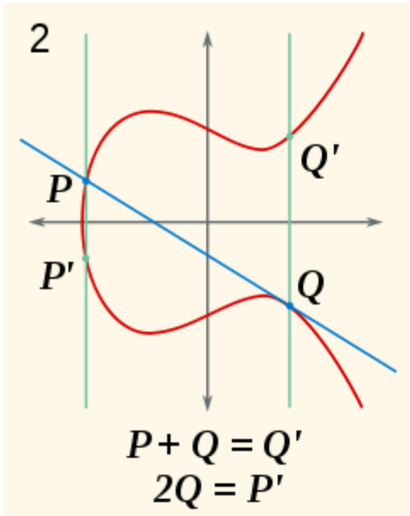


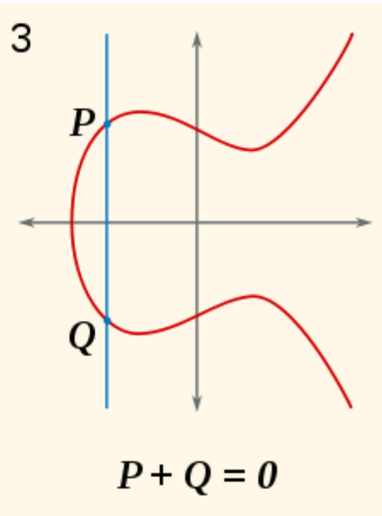



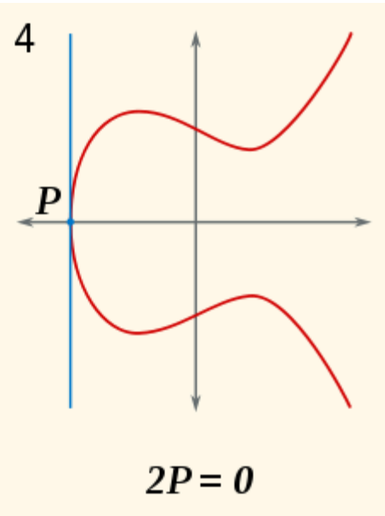



# 2. Операції над точками еліптичних кривих

## Скалярне множення точки на число

Із попередніх операцій додавання точок та подвоєння точки випливає операція скалярного множення точки на число.

$$2P = P + P$$

$$3P = P + P + P$$

...

$$mP = \underbrace{P + P + P + \cdots + P}_{m \text{ разів}}$$

**Приклад 2.5:**

Щоб знайти $13P$ потрібно $13_{10} = 1101_2 \rightarrow 13P = 8P + 4P + P$.

# 2. Операції над точками еліптичних кривих

## Порядок точки

Порядком точки еліптичної кривої називають найменше натуральне число $n$, при якому $nP = O$.

**Приклад 2.6:**

Рівняння еліптичної кривої має вигляд:

$$y^2 \equiv x^3 + x + 1 \ (mod\ 5) \qquad (2.3)$$

Потрібно знайти порядок точки $P(2, 4)$.

# 2. Операції над точками еліптичних кривих

**Приклад 2.6 (продовження):**

$2P$**:**

$\lambda = \frac{3 \cdot 2+1}{2 \cdot 4} (mod\ 5) = \frac{7}{8} (mod\ 5) = 14 (mod\ 5) = 4.$

$x_3 = 16 - 4 (mod\ 5) = 2.$

$y_3 = 4(2 - 2) - 4 (mod\ 5) = 4 (mod\ 23) = 1.$

Виконаємо: $P(2, 1) + P(2, 4)$.

$3P = 2P + P = O$**:**

$\lambda = \frac{4-1}{2-2} (mod\ 5) = \infty.$

Таким чином порядок точки $P(2, 4)$, що належить еліптичній кривій (2.3) дорівнює 3.

# 2. Операції над точками еліптичних кривих

Стійкість криптосистем, побудованих на еліптичних кривих визначається складністю виконання завдання дискретного логарифмування у групі точок еліптичної кривої

Пряма задача: $mP = Q$ (скалярне множення – аналог піднесення до степеню в звичайних асиметричних шифрах)

Зворотна задача: знаючи точки $P$ та $Q$ знайти $m$ важко (дискретне логарифмування у групі точок еліптичної кривої)

# 2. Операції над точками еліптичних кривих

Точка $G \in E_p(a,b)$ називається базовою точкою підгрупи точок еліптичної кривої $E_p(a,b)$, якщо будь-яка точка $P$ цієї підгрупи може бути подана у вигляді $P = mG$, де $m = 1, 2, \ldots n$, де $n$ – порядок підгрупи.

Для базової точки $G$ має місце рівність $nG = O$.

**Приклад 2.7:**

Точка $G = (0,1)$ є базовою точкою для групи точок еліптичної кривої $y^2 \equiv x^3 + x + 1 \ (mod\ 5)$. Вона генерує усі інші точки підгрупи:

$$G = (0,1) \rightarrow 2G = (4,2) \rightarrow 3G = (2,1) \rightarrow 4G = (3,4) \rightarrow 5G = (3,1) \rightarrow 6G = (2,4) \rightarrow 7G = (4,3) \rightarrow 8G = (0,4) \rightarrow 9G = O$$

# 3. Алгоритм обміну ключами ECDH

**Алгоритм Діффі-Хелмана на еліптичних кривих**

1. Абоненти A і B спільно обирають просте число $p$ та параметри еліптичної кривої $a$ та $b$.

2. У групі точок еліптичної кривої $E_p(a, b)$ також обирається спільна базова точка $G = (x, y)$, що має дуже великий порядок $n$.

3. Абонент *A* обирає $x < n$, обчислює $X_A = xG$ та відправляє його *B*.

4. Абонент *B* обирає $y < n$, обчислює $Y_B = yG$ та відправляє його *A*.

5. Абонент *A* обчислює закритий ключ за формулою $K_A = xY_B$.

6. Користувач *B* обчислює закритий ключ за формулою $K_B = yX_A$.

# 3. Алгоритм обміну ключами ECDH

**Приклад 3.1:**

1. $p = 23$, $a = -2$, $b = 15$, тобто $y^2 \equiv x^3 - 2x + 15 \ (mod\ 23)$.
2. $G = (4, 5)$.
3. $x = 3$, обчислимо $X_A = 3G = 2G + G = (13, 22)$.
4. $y = 7$, обчислимо $Y_B = 7G = 2G + 4G + G = (17, 8)$.
5. $K_A = 3Y_B = 2Y_B + Y_B = (15, 5)$.
6. $K_B = 7X_A = 2X_A + 4X_A + X_A = (15, 5)$.

Секретний ключ, обчислений обома сторонами – $(15, 5)$.

# 4. Стандарт цифрового підпису ECDSS

Алгоритм ЕЦП DSS, який заснований на застосуванні еліптичної кривої називається ECDSS (Elliptic Curve Digital Signature Scheme).

Для створення цифрового підпису використовується алгоритм ECDSA (Elliptic Curve Digital Signature Algorithm)

# 4. Стандарт цифрового підпису ECDSS

**Генерація ключів**

1. Обираються просте число $p$ та параметри еліптичної кривої $a$ та $b$.

2. Обираються базова точка $G = (x, y)$ та $n$ (просте число), таке що $nG = O$.

3. Закритий ключ $d$ – випадкове ціле число, таке що $0 < d \leq n - 1$

4. Обчислюється відкритий ключ $Q = dG$.

# 4. Стандарт цифрового підпису ECDSS

**Підпис повідомлення**

Якщо розмірність $n$ в бітах менше розмірності в бітах хеш-значення $h(M)$, то використовуються тільки ліві біти хеш-значення – $z$

1.Вибирається випадкове ціле число $k$ – разовий секретний ключ, де $0 < k \leq n - 1$

2. Обчислюється $(x_1, y_1) = kG$

3. Обчислюється $r = x_1 \ mod \ n$. Якщо $r = 0$, то повертаємося до п. 1.

4. Обчислюється $s = k^{-1}(z + dr) mod \ n$. Якщо $s = 0$, то повертаємося до п. 1.

5. Підписом для повідомлення $M$ є пара $(r, s)$.

# 4. Стандарт цифрового підпису ECDSS

**Перевірка підпису**

1. Отримується $(r, s)$ та підтверджене значення відкритого ключа $Q$.
2. Обчислюється $w = s^{-1} \, mod \, n$
3. Обчислюється $u_1 = z \cdot w \, mod \, n$
4. Обчислюється $u_2 = r \cdot w \, mod \, n$
5. Обчислюється $(x_1, y_1) = u_1 G + u_2 Q$
6. Якщо $(x_1, y_1) = O$ – підпис недійсний.
7. Якщо $r \equiv x_1 mod \, n$ – підпис дійсний.

# 4. Стандарт цифрового підпису ECDSS

**Приклад 4.1:** Підписати та перевірити підпис повідомлення $M$ хеш-значення, якого $z = 10$.

**Генерація ключів**

*1.* $p = 23, a = -2, b = 15$, тобто $y^2 \equiv x^3 - 2x + 15 \ (mod\ 23)$;

*2.* $G = (4, 5); n = 23;$

*3.* $d = 3$ – закритий ключ;

*4.* $Q = dG = 3G = 2G + G = (13, 22)$ – відкритий ключ.

# 4. Стандарт цифрового підпису ECDSS

**Приклад 4.1:** Підписати та перевірити підпис повідомлення $M$ хеш-значення, якого $z = 10$.

**Підписування**

Сесійний ключ: $k = 19$

$$kG = 19G = (9, 17)$$

$$r = 9 \; mod \; 23 = 9.$$

$$s = 19^{-1}(10 + 3 \cdot 9) \; mod \; 23 = 629 \; mod \; 23 = 8$$

$19^{-1} mod \; 23 = 17$
(за розширеним алгоритмом Евкліда)

**Перевірка підпису**

Відомо $M$, $(9, 8)$ та $Q = (13, 22)$

$$w = 8^{-1} \; mod \; 23 = 3$$

$$u_1 = 10 \cdot 3 \; mod \; 23 = 7$$

$$u_2 = 9 \cdot 3 \; mod \; 23 = 4$$

$$7G + 4Q = (17, 8) + (10, 2) = (9, 17)$$

$9 \equiv 9 \; mod \; 23$ – підпис дійсний