2. ОСНОВИ ТЕОРЕТИЧНОЇ ГЕОДЕЗІЇ

Тема 2.3: Визначення відступів геоїда.

1. Визначення відступів геоїда (квазігеоїда)
2. Астрономічне нівелювання
3. Астрономо-гравіметричне нівелювання

1. Визначення відступів геоїда (квазігеоїда)

Як вже зазначалося відступи геоїда над земним еліпсоїдом – це перевищення точок геоїда відносно поверхні еліпсоїда. Виміряти безпосередньо ці перевищення не можна. Лише відхилення прямовисних ліній ξ, η та аномалії сили ваги Δg є тими безпосередньо виміряними величинами, які служать для вивчення фігури Землі. Фігура Землі представляється у вигляді земного еліпсоїда, а однією із задач її вивчення і є визначення відступів фігури геоїда від поверхні еліпсоїда.

Для визначення відступів геоїда (квазігеоїда) чисто гравіметричним методом з використанням лише аномалій сили ваги, відомих по всій поверхні Землі, можна скористатися теорією та відповідними формулами Стокса (теорією та формулами Молоденського). Розглянемо коротко ці підходи.

Проблема визначення зовнішнього гравітаційного поля *W* Землі і форми рівневої поверхні *S* потенціалу сили ваги за її значеннями на цій поверхні, згідно (5.2)

$$\left.\frac{\partial W}{\partial h}\right|_S = -g ,$$

вперше поставлена і розв’язана англійським вченим Стоксом.

Стокс звів цю проблему до одного з видів крайових задач теорії потенціалу (потенціали в ділянках, де немає притягувальних мас, є гармонійними функціями). Замість *W* шукається збурюючий потенціал $T = W - U$. Розв’язок Стокса визначає тільки головну частину *T*. Оскільки вимірювання g виконують на фізичній поверхні Σ, а не на рівневій поверхні (геоїді) *S*, то потрібно ще перейти із Σ до *S* (задача редукування), попередньо “забравши” маси, що лежать між Σ і *S* (задача регуляризації геоїда). Обидві ці задачі не розв’язуються однозначно через те, що не відома густина мас між Σ і *S*. Тому розв’язок Стокса є наближеним розв’язком задачі визначення форми геоїда – це так зване стоксове наближення. Її строгий розв’язок вимагає регуляризації геоїда і редукування виміряних g на геоїд, що неможливо точно здійснити в принципі. Узагальненням теорії Стокса, із якої виключена необхідність регуляризації геоїда і редукування виміряних g, є теорія Молоденського. Щоб уникнути гіпотез і припущень, потрібно вважати потенціал та його похідні заданими тільки в тих місцях, в яких вони безпосередньо вимірюються, тобто на фізичній поверхні Землі. Крайова умова повинна бути задана також на фізичній поверхні Землі, тобто потрібно відмовитися від вивчення рівневої поверхні – геоїда, а перейти до вивчення нерівневої або кусково-рівневої поверхні. В цьому випадку можна побудувати гравітаційне поле в усьому зовнішньому просторі і вивчати форму поверхні, поза якою немає маси, що притягує, тобто фізичної поверхні Землі. Така постановка проблеми та її розв’язок належить М. Молоденському (40-60 рр. XX ст.). В свої роботах він показав, що форма фізичної поверхні Землі і потенціал поза нею, можуть бути визначені, якщо мати в розпорядженні тільки дані спостережень на поверхні

Землі, не застосовуючи при цьому модельні представлення внутрішньої будови Землі, переважно земної кори. Таку задачу стали називати задачею Молоденського. Дана задача буде полягати перш за все в тому, щоб отримати рівняння, яке пов'язує фігуру дійсної Землі з такими функціями, числові значення яких отримуються із астрономо-геодезичних та гравіметричних вимірювань на цій поверхні.

При вивченні фігури фізичної поверхні Землі так само, як і при вивченні рівневої фігури Землі методом Стокса, вводиться допоміжна (проміжна відлікова) поверхня – квазігеоїд. Відстань між точками квазігеоїда і еліпсоїдом називають висотою квазігеоїда або аномалією висоти. До її визначення і зводиться, в основному, задача визначення фізичної поверхні Землі або задача Молоденського.

Історично так склалося, що через недостатньо повну гравіметричну вивченність земної поверхні в цілому визначення відступів геоїда від поверхні прийнятого еліпсоїда вивчалося геометричними методами. Роль гравіметричних даних зводилася до їх використання при інтерполюванні тих чи інших величин. Оскільки такі класичні методи не втратили свого значення і в теперішній час, то розглянемо їх суть.

2. Астрономічне нівелювання

Часткові похідні збурюючого потенціалу $T=\left(W_0-U_0\right)+\varsigma\gamma_m$ (тут проведена заміна N на ς) будуть дорівнювати

$$\frac{\partial T}{\partial B}=\gamma_m\frac{\partial\varsigma}{\partial B},\quad \frac{\partial T}{\partial L}=\gamma_m\frac{\partial\varsigma}{\partial L}\ .$$

Підставимо знайдені значення часткових похідних у формулу (2.14) і отримаємо нові вирази для складових відхилень прямовисних ліній

$$\left.\begin{aligned}\xi&=-\frac{\gamma_m}{g(M+H)}\frac{\partial\varsigma}{\partial B},\\ \eta&=-\frac{\gamma_m}{g(N+H)\cos B}\frac{\partial\varsigma}{\partial L}.\end{aligned}\right\}. \tag{2.24}$$

Обчислимо диференційну зміну відступів геоїда $d\varsigma$, використовуючи топоцентричну горизонтальну систему координат x',y',z'. Якщо висота геоїда є функцією цих координат, тобто $\varsigma=\varsigma(x',y',z')$, то його повний диференціал буде

$$d\varsigma=\frac{\partial\varsigma}{\partial x'}dx'+\frac{\partial\varsigma}{\partial y'}dy'+\frac{\partial\varsigma}{\partial z'}dz'. \tag{2.25}$$

Згідно диференціальних формул для довільної точки простору має місце ортогональне перетворення координат, тобто відрізки

$$\left.\begin{aligned}dx'&=(M+H)dB\\ dy'&=(N+H)\cos B dL\\ dz'&=dH\end{aligned}\right\} \tag{2.26}$$

складають ортогональну систему координат. З використанням (2.24) та (2.26) для часткових похідних отримаємо

$$\frac{\partial\varsigma}{\partial x'}=-\xi\frac{g}{\gamma_m},\quad \frac{\partial\varsigma}{\partial y'}=-\eta\frac{g}{\gamma_m},\quad \frac{\partial\varsigma}{\partial H}=-\frac{(g-\gamma)}{\gamma_m}\ .$$

Зауважимо, що часткова похідна по висоті наведена без доведення. Тепер формулу (2.25) можна записати у такому вигляді

$$d\varsigma = -\frac{g}{\gamma_m}(\xi dx' + \eta dy') - \frac{g-\gamma}{\gamma_m} dH .$$

Поскільки $dx' = ds\cos A$ та $dy' = ds\sin A$, то

$$-d\varsigma = \frac{g}{\gamma_m}(\xi \cos A + \eta \sin A) ds + \frac{g-\gamma}{\gamma_m} dH .$$

Проінтегрувавши останній вираз по ходовій лінії між точками Q_1 та Q_2 на земній поверхні, отримаємо перевищення геоїда між цими точками

$$\varsigma_1 - \varsigma_2 = \int_{Q_1}^{Q_2} \frac{g}{\gamma_m} (\xi \cos A + \eta \sin A) ds + \int_{Q_1}^{Q_2} \frac{g-\gamma}{\gamma_m} dH . \qquad (2.27)$$

Формула (2.27) і є формулою астрономічного нівелювання. У цій формулі перший інтеграл є головним, а другий – малою поправкою за відносний надлишок сили ваги.

Отже, сам процес астрономічного нівелювання полягає в наступному. Вздовж вибраної траси повинні бути визначені астрономічні та геодезичні координати точок, взятих на відстанях 5-10 *км*, їх наближені висоти (будь-яким методом). Необхідно також провести гравіметричне знімання. Після отримання всіх необхідних даних визначають $\varsigma_2 - \varsigma_1$. Звісно, в початковій точці астрономічного нівелювання висота геоїда над земним еліпсоїдом повинна бути відома. Отримання різниць $\varsigma_2 - \varsigma_1$ за формулою (2.27) є досить складною справою, особливо це стосується обчислення другого члена. Взагалі ця поправка є порівняно незначною: в гірських районах вона може складати до 0,5 *м*, а у рівнинних – до 0,1 *м*. Зважаючи на величину даної поправки, а також на той факт, що вона визначається досить невпевнено, нею часто нехтують. Тому формулу астрономічного нівелювання часто записують у спрощеному варіанті

$$\varsigma_2 - \varsigma_1 = -\left[\int_{Q_1}^{Q_2} \theta_A ds\right] = -\frac{\theta_{Q_1} + \theta_{Q_2}}{2\rho''} s , \qquad (2.28)$$

де $\theta_A = \{(\xi - 0.171H \sin 2B)\cos A + \eta \sin A\}$.

Похибка лінійної інтерполяції астрономо-геодезичних відхилень прямовисних ліній $m_{\delta\theta_A}$ визначається для рівнинних районів виразом (2.21). Емпірична середня квадратична похибка астрономічного нівелювання (в *м*) по лінії довжиною L підраховується за формулою

$$m_{\varsigma} = 1000 \frac{m_{\delta\theta_A}}{\rho''} \sqrt{s_{км} L_{км}} , \qquad (2.29)$$

де s – відстань між астропунктами. Для типової в Україні відстані $s = 64 км$ маємо $m_{\delta\theta_A} = 1.36''$. Тоді при $L = 1000 км$ $m_{\varsigma} = 1.7 м$.

Результати астрономічного нівелювання можуть бути суттєво покращені, якщо замість збільшення кількості астропунктів використати інтерпольовані значення астрономо-геодезичних відхилень прямовисних ліній. Використання інтерпольованих відхилень прямовисних ліній зменшує вплив нелінійності зміни астрономо-геодезичних відхилень прямовисних ліній, але цілком не виключає його.

3. Астрономо-гравіметричне нівелювання

Астрономічне нівелювання може бути практично реалізоване при умові, що в кожній точці нівелювання відомі астрономо-геодезичні відхилення прямовисних ліній. Це означає, що в кожній з цих точок необхідно виконати астрономічні визначення широти та довготи, а також передати на ці точки геодезичні координати. Для значних територій це є надзвичайно складна робота. Відхилення прямовисних ліній можуть бути отримані чисто гравіметричним методом з допомогою формул Венінг-Мейнеса (2.19). В силу вказаних там причин цей метод теж є малопридатним для даної задачі. Ще у 1934 р. М. Молоденським був запропонований спосіб визначення висот геоїда, що базувався на можливостях астрономо-геодезичного та гравіметричного методів отримання відхилень прямовисних ліній. При цьому він дозволяв обійти труднощі, що зустрічалися у кожному методі зокрема. Цей спосіб був названий астрономо-гравіметричним нівелюванням. Суть цього способу полягає у тому, що відхилення прямовисної лінії ξ, η між віддаленими пунктами Q_1 і Q_2 можуть бути інтерпольовані за матеріалами гравіметричного знімання та астрономо-геодезичними даними. Це дає змогу врахувати нелінійність зміни астрономо-геодезичних відхилень прямовисних ліній між суміжними астрономічними пунктами.

Якщо витримані умови астрономо-гравіметричного методу, то середня квадратична похибка астрономо-гравіметричного нівелювання підраховується за формулою (2.29). Враховуючи, що точність $m_{\delta\theta_A} \approx 0.5''$, середня відстань між суміжними астропунктами складає $s = 64 км$, то при $L = 1000 км$ $m_{\varsigma} = 0.2 м$.