§ 6. Невласні інтеграли.

1. Невласні інтеграли з нескінченними межами (I роду).

Нехай функція f(x) визначена і неперервна при всіх $x \in [a, +\infty)$.

Означення. Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$,

тоді вона називається невласним інтегралом функції f(x) на проміжку [a, +∞) і

позначається $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$$

У цьому випадку говорять, що невласний інтеграл збіжний. Якщо границя $\lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$ не існує або вона нескінченна, то говорять, що невласний інтеграл розбіжний.

Аналогічно визначається невласний інтеграл із нескінченною нижньою межею

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$$

і невласний інтеграл з обома нескінченними межами $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx =$

$= \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx$, де c – деяке число. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ існує (збіжний),

якщо кожен з невласних інтегралів $\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx$, $\int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx$ існує (збіжний).

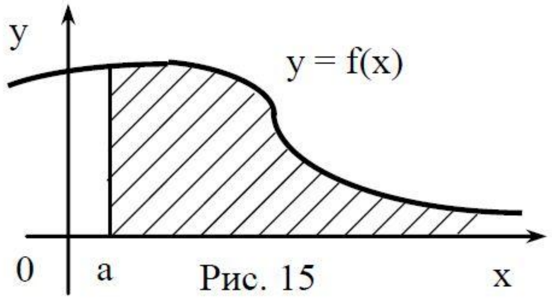


Рис. 15

Геометричний зміст невласного інтеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ у випадку, коли $f(x) \ge 0$: $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ виражає площу необмеженої області, що заключена між лініями $y = f(x)$, віссю $0x$ і прямою $x = a$ (рис. 15).

Приклади

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \ln x\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} (\ln b - \ln 1) = \lim_{b\to+\infty} \ln b = +\infty,$$ тобто інтеграл розбіжний.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty} (-e^{-x})\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} -(e^{-b} - e^0) = \lim_{b\to+\infty} -\left(\frac{1}{e^b} - 1\right) = 1$$

Інтеграл збіжний

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_a^0 + \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_0^b = \lim_{a\to-\infty} (\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} a) + \lim_{b\to+\infty} (\operatorname{arctg} b -$$

$$- \operatorname{arctg} 0) = -\lim_{a\to-\infty} \operatorname{arctg} a + \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} b = (\text{див. рис.16}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi .$$

Границі $\lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2}$, $\lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2}$ існують (збіжні) $\Rightarrow$ $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ – збіжний.

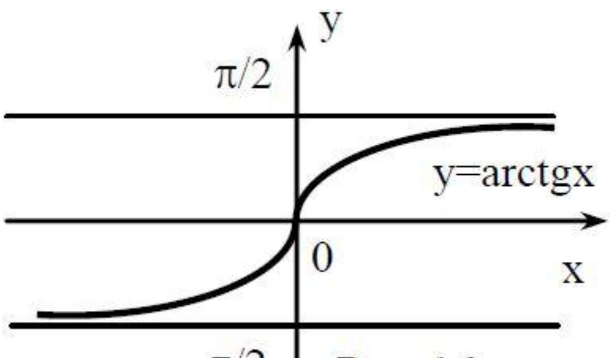


Рис. 16

Питання про збіжність невласних інтегралів вирішують за допомогою ознак порівнянь.

1) Нехай для всіх $x \geq a$ виконується нерівність $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$. Тоді

а) якщо $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ збіжний, то збіжний і інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ і виконується нерівність $\int_a^{+\infty} f(x)dx \leq \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$;

б) якщо інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ розбіжний, то розбіжний і інтеграл $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$.

2) Якщо при всіх $x \geq a$ $f(x) > 0$, $\varphi(x) > 0$ і існує скінченна границя $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} \neq 0$, то інтеграли $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ збіжні чи розбіжні одночасно.

3) Якщо інтеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ збіжний, то збіжний і інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

У даному випадку $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ називається абсолютно збіжним.

Приклад Дослідити на збіжність $\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^3(3+e^{2x})}$.

При $x \geq 1$ $f(x) = \dfrac{1}{x^3(3+e^{2x})} > 0$,

$$f(x) = \frac{1}{x^3(3+e^{2x})} < \frac{1}{x^3} = \varphi(x).$$

Інтеграл $\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^3}$ збіжний ($\alpha = 3 > 1$), тому за 1 ознакою $\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^3(3+e^{2x})}$ збіжний.

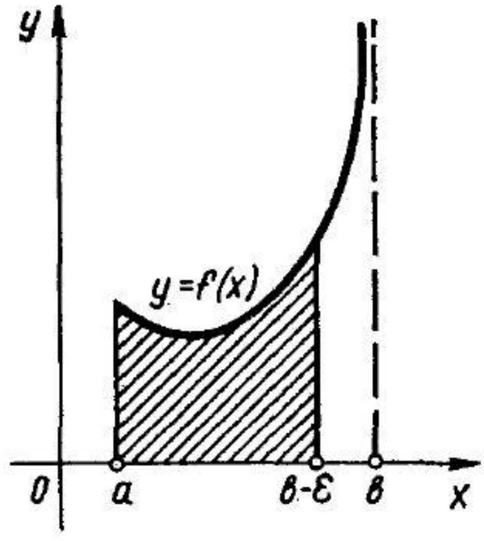
2. Невласні інтеграли від розривних функцій (II роду).

Нехай задано функцію y = f(x) неперервну на піввідрізку [a; b), а в точці b вона терпить розрив. Тоді на відрізку [a; b] визначений інтеграл не існує.

Означення. Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{c \to b-0} \int_a^c f(x)dx$, тоді

вона називається невласним інтегралом від розривної функції f(x) в верхній межі і позначається $\int_a^b f(x)dx$.

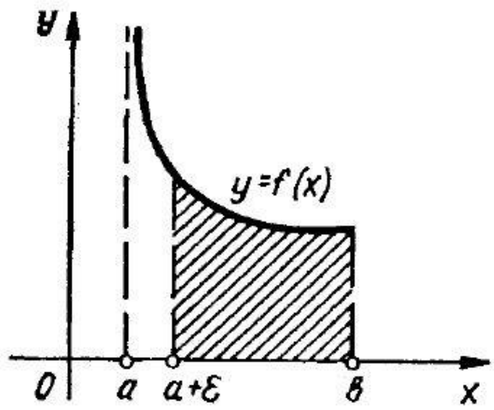
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b-0} \int_a^c f(x)dx.$$



У цьому випадку говорять, що невласний інтеграл збіжний. Якщо границя $\lim\limits_{c \to b-0} \int_a^c f(x)dx$ не існує або вона нескінченна, то говорять, що невласний інтеграл розбіжний.

Аналогічно визначається невласний інтеграл від розривної функції f(x) в нижній межі

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a+0} \int_c^b f(x)dx.$$

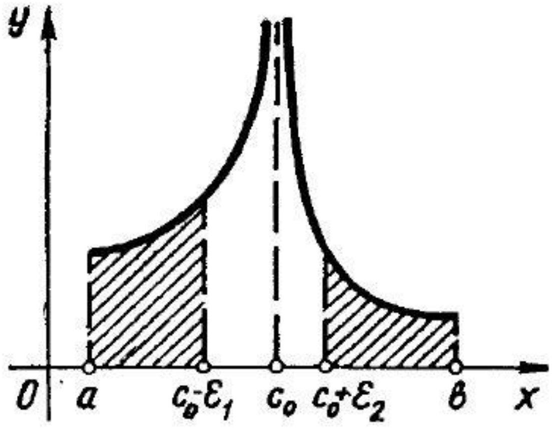


Аналогічно, якщо точка c розриву функції f(x) лежить в середині відрізка [a, b], $c \in [a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx =$$

$$= \lim_{c_1 \to c-0} \int_a^{c_1} f(x)dx + \lim_{c_2 \to c+0} \int_{c_2}^b f(x)dx,$$

причому невласний інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ називається збіжним, якщо збігаються обидва невласні інтеграли $\int_a^c f(x)dx$, $\int_c^b f(x)dx$. Якщо ж принаймні один з цих інтегралів розбігається, то невласний інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ називається розбіжним.



Приклад. Знайти інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Підінтегральна невизначена у точці $x=0$ (вона прямує в нескінченність, коли $x \to 0$). Спочатку знаходимо інтеграл в межах від a до 1, а потім знаходимо границю при $a \to 0$:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to+0} \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to 0} 2\sqrt{x}\Big|_a^1 = 2\lim_{a\to 0}\left(1-\sqrt{a}\right) = 2.$$

Інтеграл збіжний.

Приклад Обчислити невласний інтеграл $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$ або встановити його розбіжність.

Підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{x^2}$ терпить розрив в точці $x=0 \in [-1;\ 1]$. Маємо невласний інтеграл $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$ від розривної функції (II роду).

За означенням $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{c_1\to 0-0} \int_{-1}^{c_1} \frac{dx}{x^2} + \lim_{c_2\to 0+0} \int_{c_2}^{1} \frac{dx}{x^2}$.

$$\lim_{c_1\to 0-0} \int_{-1}^{c_1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{c_1\to 0-0} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^{c_1} = \lim_{c_1\to 0-0} \left(-\frac{1}{c_1}+1\right) = +\infty,$$

тобто інтеграл $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2}$ розбіжний.

$$\lim_{c_2\to 0+0} \int_{c_2}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{c_2\to 0+0} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{c_2}^{1} = \lim_{c_2\to 0+0} \left(-1+\frac{1}{c_2}\right) = +\infty,$$

тобто інтеграл $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2}$ розбіжний.

Таким чином, невласний інтеграл $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$ розбіжний.