ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА
ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

@ZTUEDUUA

Комп’ютерна обробка зображень в інформаційно-вимірювальних системах

Лекція 7
Тема: Фрактальна розмірність.

1) Загальне визначення.
2) Поняття фрактальної розмірності та її характеристики.
3) Історія фракталів.

1. Загальне визначення.

Фрактальна розмірність (англ. fractal dimension) — один із способів визначення розмірності множини в метричному просторі. Фрактальну розмірність n-вимірної множини можна визначити за допомогою формули:

$D = -\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln(N_\varepsilon)}{\ln(\varepsilon)}$, де N_ε - це число самоподібних структур лінійного розміру ε, необхідних для покриття всієї структури.

Фрактальна розмірність може набувати не цілого числового значення.

Основна ідея «дрі́бної» (англ. fractured) розмірності має тривалу історію в галузі математики, але сам термін ввів у користування Бенуа Мандельброт. 1967 року в статті про самоподібність він описав дробову розмірність. У своїй статті Мандельброт посилався на попередню роботу Люїса Фрая Річардсона з описом ідеї, що нібито суперечить здоровому глузду: виміряна довжина берегової лінії залежить від довжини мірної палиці (жердини) (див. Рис. 1). Він стверджував, що фрактальна розмірність берегової лінії відповідає відношенню числа жердин (у певному масштабі), необхідних для вимірювання довжини берегової лінії, до обраного масштабу жердини. Є кілька формальних математичних визначень фрактальної розмірності, котрі будуються на цій базовій концепції про зміну елемента зі зміною в масштабі.

11.5 x 200 = 2300 км | 28 x 100 = 2800 км | 70 x 50 = 3500 км

Рис. 1. Загальна довжина берегової лінії Великобританії зростає, коли довжина вимірювальної палиці (жердини) зменшується

Один з елементарних прикладів – **фрактальна розмірність сніжинки Коха** (рис. 2). Її топологічна розмірність дорівнює 1, але це в жодному разі не спрямлювана крива, оскільки довжина кривої між будь-якими двома точками сніжинки Коха – нескінченність. Жодна, якою малою вона не була б, частинка кривої не є відтинком прямої. Правильніше сказати – сніжинка Коха складається з нескінченного числа сегментів, з'єднаних під різними кутами. **Фрактальну розмірність** кривої можна пояснити інтуїтивно, припускаючи, що фрактальна лінія – це об’єкт занадто деталізований, щоб бути одновимірним, але недостатньо складний, щоб бути двовимірним. Тому її розмірність краще описувати не звичайною топологічною розмірністю 1, а її фрактальною розмірністю, рівною в цьому випадку числу, розташованому в інтервалі між 1 і 2.

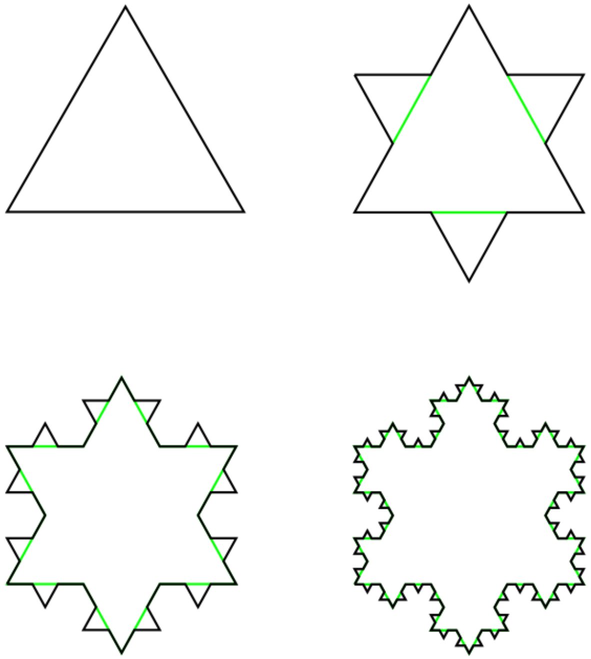


Рис. 2. Сніжинка Коха

2. Поняття фрактальної розмірності та її характеристики.

Фрактальна розмірність – коефіцієнт, що описує фрактальні структури або множини на основі кількісної оцінки їх складності, як коефіцієнт зміни в деталі зі зміною масштабу. Деякі типи фрактальної розмірності можна виміряти теоретично та емпірично (див. рис. 3).

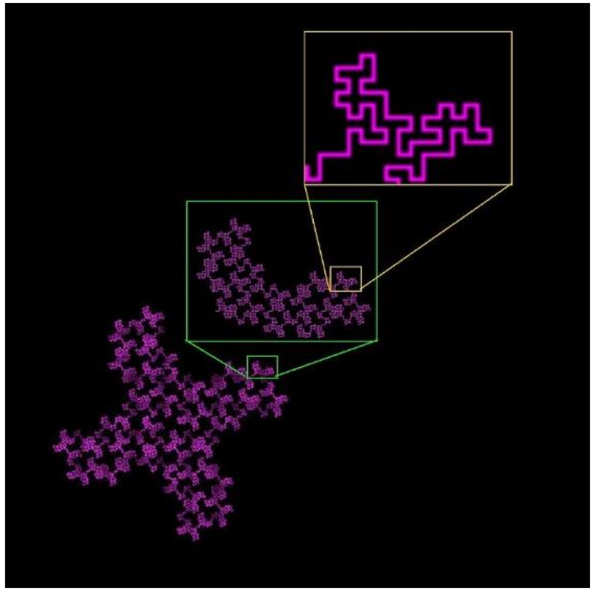


Рис. 3. 32 квадратні сегменти утворюють фрактал і проглядаються в прямокутну лупу різних розмірів. Візерунок ілюструє самоподібність. Теоретична фрактальна розмірність для цього фракталу дорівнює $T^{\log 32}/_{\log 8} = 1.67$. Його емпірична фрактальна розмірність від ємнісного аналізу дорівнює ±1%.

Фрактальні розмірності використовуються для характеристики широкого спектру об'єктів від абстрактних до практичних явищ, наприклад: турбулентність, річкові мережі, зростання міст, фізіологія людини, медицина та ринкові тренди.

Основна ідея дробової чи фрактальної розмірності має тяглу історію в математиці, простежувану ще з 1600 року, але самі терміни **фрактал** та **фрактальна розмірність** були введені математиком Бенуа Мандельбротом у 1975 році (1997 року видав науково-популярну книжку "Фрактальна геометрія природи").

Рис. 4. Бенуа Мандельброт, французько-американський математик, засновник фрактальної геометрії.

Фрактальна розмірність була вперше введена як коефіцієнт, що описує геометрично складні форми, для яких деталі значно важливіші за повний малюнок. Для множин, що описують звичайні геометричні форми, теоретична фрактальна розмірність дорівнює звичайній Евклідовій або топологічній розмірності. Таким чином, для множин, що описують точки, теоретична фрактальна розмірність дорівнює 0; 1 для множин, що описують пряму (множини, котрим властива лише довжина); 2 для множин, що описують поверхню (мають довжину та ширину); 3 для множин, що описують об'єм (мають довжину, ширину та висоту). Але це змінюється для фрактальних множин. Якщо теоретична фрактальна розмірність множини перевищує топологічну розмірність, то вважають, що множина має фрактальну геометрію.

На відміну від топологічної розмірності, фрактальний коефіцієнт може набувати не цілих значень, демонструючи, що фрактальна множина заповнює простір не так, як його може заповнити звичайна геометрична множина. Наприклад, крива з фрактальною розмірністю дуже близькою до 1, скажімо 1.10, поводиться як цілком звичайна лінія, але крива з фрактальною розмірністю 1.9 намотана у просторі, майже як поверхня. Схоже поводиться поверхня з фрактальною розмірністю 2.1. Вона заповнює простір майже як звичайна поверхня, але поверхня з фрактальною розмірністю 2.9 згортається і прагне заповнити простір майже як об'єм. Цей загальний зв'язок можна побачити на 2 зображенні фрактальної кривої на Рис.5 і Рис.6 – 32 сегменти, контур на Рис.5, заплутаний і заповнює простір. Ця фрактальна крива має розмірність 1.67 порівняно з менш складною кривою Коха на Рис.6, що має фрактальну розмірність 1.26.

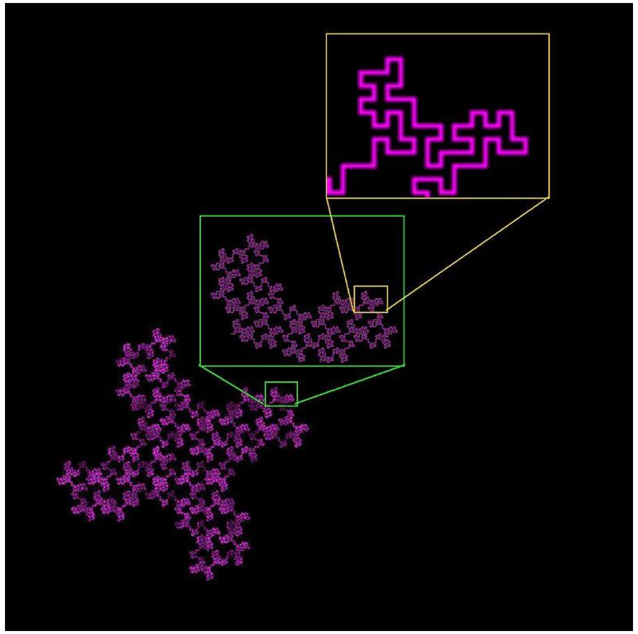


Рис. 5. 32 квадратні сегменти утворюють фрактал і проглядаються в прямокутну лупу різних розмірів. Візерунок ілюструє самоподібність.

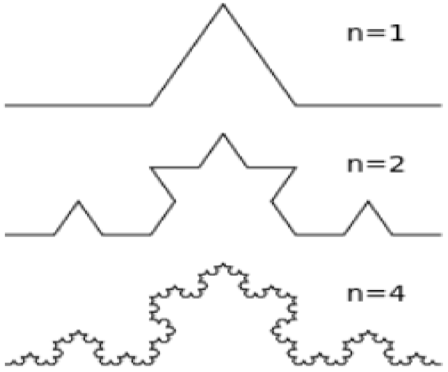
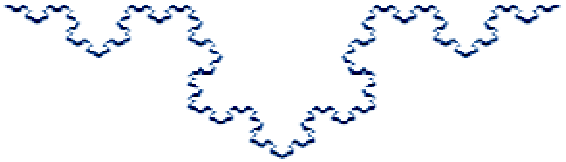


Рис. 6. Крива Коха — класична ітерована фрактальна крива.



Відношення між зростаючою фрактальною розмірністю та заповнюваним простором може бути прийняте за фрактальну розмірність виміряної щільності, але це не так. Обидва параметри не суворо корелюють. Натомість, фрактальна розмірність вимірює складність. Це поняття пов'язане з певними особливостями фракталів: самоподібністю, шаблоном та нерівномірністю. Вказані властивості зустрічаються у прикладах фрактальних кривих, описаних раніше. Обидві криві з топологічною розмірністю 1, тож можна сподіватися, що вдасться виміряти їх довжину або кутовий коефіцієнт, як у звичайних ліній. Але ми не можемо зробити будь-що з цих речей, тому що фрактальні криві мають складність у вигляді самоподібності та шаблонів, чого немає у звичайних ліній.

Самоподібність лежить у нескінченному масштабі, а шаблон у визначальних елементах кожної множини. Довжина між будь-якими двома точками цих кривих не визначена, тому що теоретично означені конструкції ніколи не зупиняються, а самоповторюються нескінченну кількість разів. Кожна менша частина складається з нескінченного числа масштабних сегментів, які виглядають точно як у першій ітерації. Це криві, що не спрямовуються, тобто, ми не можемо розбити їх на окремі сегменти і обчислити приблизну довжину. Ми не можемо описати за допомогою довжини та кутового коефіцієнта. Однак їх фрактальні розмірності можуть бути визначені. Вони показують, як заповнюють простір більше, ніж звичайні лінії, але менше, ніж поверхні, і це дозволяє порівнювати їх між собою.

Зауважимо, що дві фрактальні криві, описані раніше, показують тип самоподібності, який точно повторює початковий шаблон, що легко візуалізувати. Структури такого роду можуть траплятися і в інших просторах (наприклад, фрактали). Якщо Криву Коха розширити в 3-вимірний простір, то її теоретична фрактальна розмірність дорівнюватиме 2.5849. Однак, існує складність при підрахунку фрактальної розмірності для наступного прикладу: узбережжя Великобританії є наближеною моделлю з наближеним масштабом. Загалом фрактали можуть бути різних типів, ступенів самоподібності та шаблонів, які складно візуалізувати. Вони включають, в якості прикладів, дивні атрактори: гладкі ділянки нагромадження, множина Жюліа і частота серцебиття. Фрактальну складність не завжди просто обчислити, не спираючись на складні аналітичні методи, які ведуть до відповіді через фрактальні розмірності.

3. Історія фракталів.

Терміни **фрактальної розмірності** і **фракталу** були введені Мандельбротом в 1975 році, приблизно через 10 років після того, як він опублікував свою статтю про самоподібність узбережжя Великобританії. Мандельброт об'єднав та застосував складну теоретичну математику та інженерну роботу у новому варіанті вивчення складної геометрії. Це стало викликом звичним лінійним термінам. Попередні тематичні доробки, які Мандельброт узагальнив у понятті «фрактальна геометрія», чітко простежуються в творах про недиференційованість, нескінченність самоподібних функцій, котрі є важливими в математичному визначенні фракталів. Із середини 1600-х років до кінця 1800-х публікацій робіт про такі функції практично не було, така собі перерва.

Починаючи з кінця 1800-х зі створення математичних функцій та множин, які сьогодні називають **канонічними фракталами** (такі як однойменні роботи фон Коха, Серпінського, Жюліа), розпочалося оновлення у цій сфері. В той же час їхні формулювання часто розглядалися, як такі, що сильно суперечать математичним «монстрам». Ці роботи супроводжувалися, вочевидь, припущеннями, що вони є найбільш ключовим моментом у розвитку концепції фрактальної геометрії, через роботи Хаусдорфа на початку 1900-х. Хаусдорф визначив «дрібну розмірність», яка зараз називається його іменем і часто залучається до визначення сучасних фракталів.

Рис. 7. Фелікс Гаусдорф, німецький математик, вважається одним з основоположників сучасної топології.

@ZTUEDUUA

ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА
ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

- Розвиваємо лідерів
- Створюємо інновації
- Змінюємо світ на краще