6.6. Схема дослідження функції та побудова її графіка

Щоб дослідити функцію та побудувати її графік, треба:

1) знайти область існування функції;

2) знайти (якщо це можна) точки перетину графіка з координатними осями;

3) дослідити функцію на періодичність, парність і непарність;

4) знайти точки розриву та дослідити їх;

5) знайти інтервали мотононності, точки локальних екстремумів та значення функції в цих точках;

6) знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину;

7) знайти асимптоти кривої;

8) побудувати графік функції, враховуючи дослідження, проведені в п. 1—7.

Якщо графік виявиться не зовсім зрозумілим, потрібно додатково знайти кілька точок графіка, обчисливши значення функції при певних значеннях аргументу; бажано також в цих самих точках обчислити першу похідну, щоб визначити в них напрям дотичної.

Якщо дана функція періодична з періодом T, то досить побудувати її графік на відрізку $[0; T]$, після чого повторити цей графік на проміжках $(nT; (n+1)T)$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$

Якщо функція парна (або непарна), то достатньо побудувати її графік для $x \geqslant 0$, а потім відобразити його симетрично відносно осі Oy (або відносно початку координат).

Приклад 1. Виконати загальне дослідження функції $y = 2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3$.

$\boxed{1}$ а) Область визначення функції – $D = (-\infty; +\infty)$.

б) Для знаходження точки перетину графіка функції з віссю Oy обчислимо значення функції у точці $x = 0$:

$$y(0) = 2 \cdot 0 - \frac{3}{4} \cdot 0^2 - \frac{1}{6} \cdot 0^3 = 0.$$

Отже, графік функції перетинає вісь Oy у точці $y = 0$, тобто проходить через початок координат – точку $O(0;0)$.

в) Для знаходження точок перетину графіка функції з віссю Ox слід розв'язати рівняння $y(x) = 0$:

$$2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3 = 0, \quad x\left(2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{6}x^2\right) = 0, \text{ звідки}$$

$$x = 0 \text{ або } 2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{6}x^2 = 0.$$

Корені квадратного рівняння:

$$x_1 = \frac{-9 - \sqrt{273}}{4} \approx -6,4; \quad x_2 = \frac{-9 + \sqrt{273}}{4} \approx 1,9.$$

Отже, графік функції перетинає вісь Ox у точках $x_1 \approx -6,4$, $x_2 \approx 1,9$ та у точці $x = 0$ (початок координат).

г) Функція ні парна, ні непарна, оскільки $y(-x) \neq y(x)$ та $y(-x) \neq -y(x)$.

$\boxed{2}$ Дослідимо графік функції на наявність асимптот.

а) Рівняння *похилих асимптот*

$$y = kx + b, \tag{1}$$

де

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(y(x) - kx \right), \tag{2}$$

якщо границі існують і скінченні.

Оскільки для заданої функції

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{6}x^2 \right) = \infty,$$

то похилих асимптот графік функції не має.

б) Пряма $x = x_0$ є *вертикальною асимптотою* графіка функції $y(x)$, якщо

$$\lim_{x \to x_0} y(x) = \infty. \tag{3}$$

Оскільки функція елементарна і областю визначення функції є вся числова пряма, то вертикальних асимптот немає.

$\boxed{3}$ Знайдемо похідну 1-го порядку:

$$y' = \left(2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3\right)' = 2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2 .$$

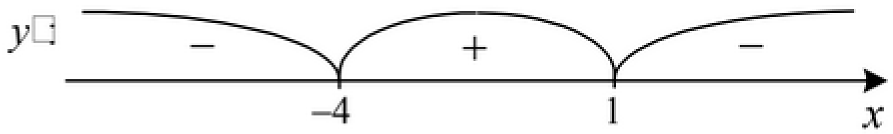
Критичні точки 1-го роду слід шукати серед точок, в яких: а) $y' = 0$; б) y' не існує.

а) $y' = 0$: $2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2 = 0$, або $x^2 + 3x - 4 = 0$, звідки $x = -4$ та $x = 1$.

б) y' не існує: таких точок немає, оскільки похідна визначена при будь-якому $x \in D$.

Отже, маємо дві критичні точки 1-го роду $x = -4$, $x = 1$.

Вказуємо критичні точки на координатній прямій і визначаємо знак y' на отриманих інтервалах:



(наприклад, $y'(-6) = -25 < 0$, $y'(0) = 2 > 0$, $y'(2) = -3 < 0$).

$\boxed{4}$ Знайдемо похідну 2-го порядку:

$$y'' = \left(2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2\right)' = -\frac{3}{2} - x .$$

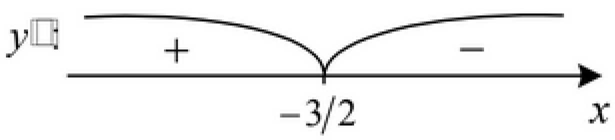
Критичні точки 2-го роду слід шукати серед точок, в яких: а) $y'' = 0$; б) y'' не існує.

а) $y''=0$: $-\frac{3}{2}-x=0$, $x=-\frac{3}{2}$.

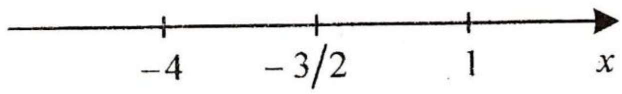
б) y'' не існує: таких точок немає.

Отже, маємо одну критичну точку 2-го роду $x=-\frac{3}{2}$.

Вказуємо критичну точку на координатній прямій і визначаємо знак y'' на отриманих інтервалах:



$\boxed{5}$ Вкажемо критичні точки 1-го та 2-го роду на координатній прямій:

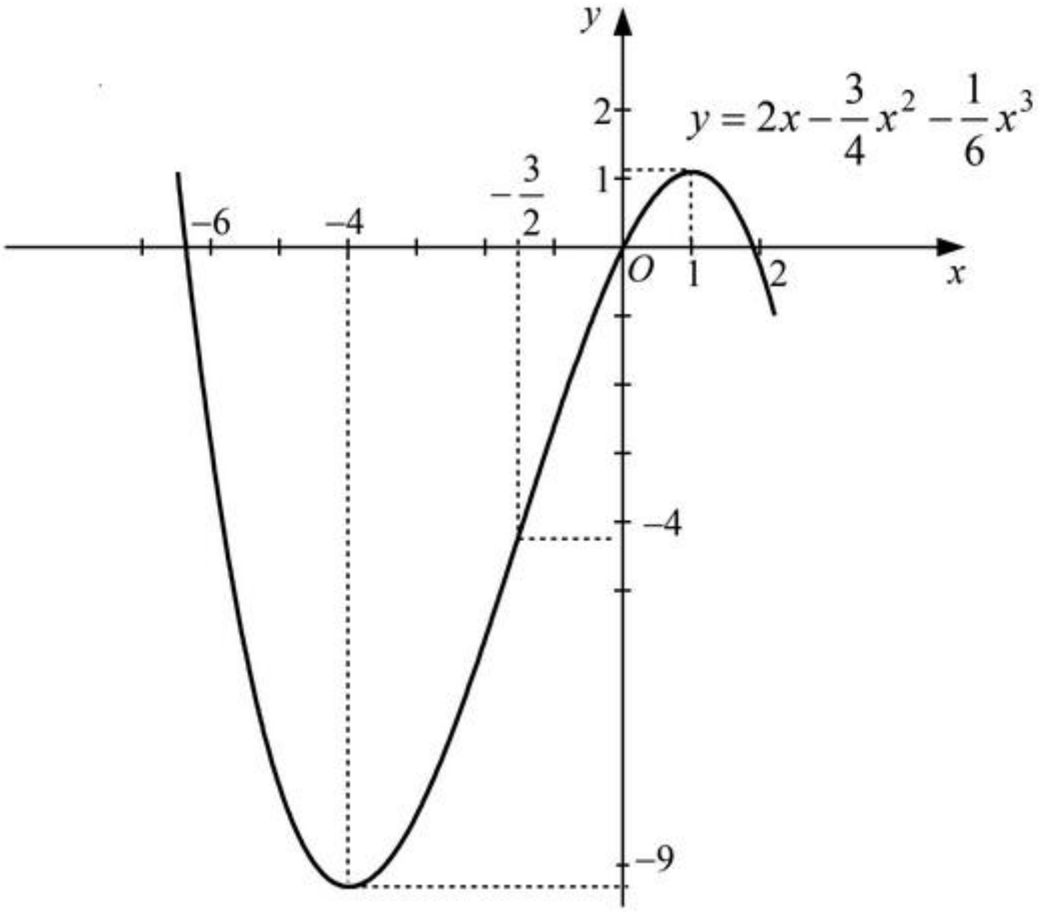


Отже, маємо чотири інтервали: $(-\infty;-4)$, $(-4;-1,5)$, $(-1,5;\ 1)$, $(1;+\infty)$.

Заповнимо таблицю. Заповнюючи рядки, що відповідають y' та y'', використовуємо результати досліджень у пунктах $\boxed{3}$ та $\boxed{4}$.

x	$(-\infty;-4)$	-4	$(-4;-1,5)$	$-1,5$	$(-1,5;1)$	1	$(1;+\infty)$
y'	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
y''	$+$		$+$	0	$-$		$-$
y	$\searrow$ $\cup$	min $y(-4)=$ $=-9\frac{1}{3}$	$\nearrow$ $\cup$	т. п. $y(-1,5)=$ $=-4\frac{1}{8}$	$\nearrow$ $\cap$	max $y(1)=1\frac{1}{12}$	$\searrow$ $\cap$

$\boxed{6}$ Будуємо графік функції, використовуючи результати пунктів $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{5}$.



<u>Приклад 2.</u> Виконати загальне дослідження функції $y = \dfrac{x^4}{x^3+1} - \dfrac{1}{2}$.

$\boxed{1}$ а) Область визначення функції – $D = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

б) Графік перетинає вісь Oy у точці $y = -0{,}5$.

в) Знайдемо точки перетину графіка з віссю Ox:

$$\frac{x^4}{x^3+1}-\frac{1}{2}=0, \quad \frac{2x^4-x^3-1}{2(x^3+1)}=0.$$

Звідси маємо рівняння $2x^4-x^3-1=0$. Розклавши ліву частину на множники

$$2x^4-x^3-1=\left(x^4-x^3\right)+\left(x^4-1\right)=x^3\left(x-1\right)+\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)=$$

$$=\left(x-1\right)\left(2x^3+x^2+x+1\right),$$

знаходимо корінь $x=1$. Можна показати, скориставшись графічним методом, що кубічне рівняння $2x^3+x^2+x+1=0$ має один дійсний корінь, який лежить на інтервалі $(-1;0)$. Але оскільки знаходження коренів кубічного рівняння пов'язане з використанням громіздких формул, то обмежимось вказівкою однієї точки перетину графіка функції з віссю Oy – $x=1$.

г) Функція ні парна, ні непарна.

$\boxed{2}$ Дослідимо графік функції на наявність асимптот.

а) Похилі асимптоти знаходимо за формулами (1), (2):

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^4}{x^3+1}-\frac{1}{2}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^3+1}-\frac{1}{2x}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x^3}}-\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2x}=$$

$$=\frac{1}{1+0}-0=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^4}{x^3+1}-\frac{1}{2}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4-x\left(x^3+1\right)}{x^3+1}-\frac{1}{2}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x}{x^3+1}-\frac{1}{2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^3}}-\frac{1}{2}=\frac{0}{0+1}-\frac{1}{2}=-0,5;$$

підставляємо k та b у формулу (1): $y=1\cdot x+\left(-0,5\right)=x-0,5$.

Отже, графік функції має похилу асимптоту $y=x-0,5$ при $x\to\pm\infty$.

б) Оскільки точка $x_0=-1$ не належить області визначення D заданої функції, то її графік може мати вертикальну асимптоту. Для цього розглянемо співвідношення (3): оскільки $\lim_{x\to-1}\left(x^3+1\right)=0$, а $\lim_{x\to-1}x^4=1\neq 0$, то

$$\lim_{x\to-1}\left(\frac{x^4}{x^3+1}-\frac{1}{2}\right)=\infty.$$

Звідси випливає, що пряма $x=-1$ є вертикальною асимптотою.

$\boxed{3}$ Знайдемо похідну 1-го порядку:

$$y' = \left(\frac{x^4}{x^3+1} - \frac{1}{2} \right)' = \left(\frac{x^4}{x^3+1} \right)' - \left(\frac{1}{2} \right)' = \frac{\left(x^4\right)'\left(x^3+1\right) - x^4\left(x^3+1\right)'}{\left(x^3+1\right)^2} - 0 =$$

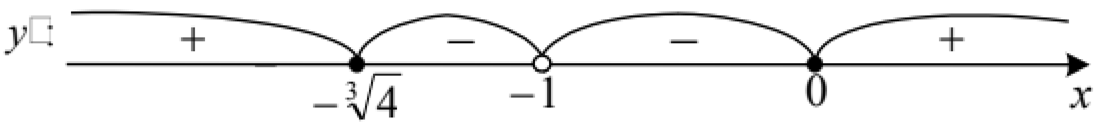
$$= \frac{4x^3\left(x^3+1\right) - x^4 \cdot 3x^2}{\left(x^3+1\right)^2} = \frac{x^6+4x^3}{\left(x^3+1\right)^2}.$$

Критичні точки 1-го роду:

а) $y' = 0$: $\frac{x^6+4x^3}{\left(x^3+1\right)^2} = 0$, $x^3\left(x^3+4\right) = 0$, звідки $x = 0$, $x = -\sqrt[3]{4}$;

б) y' не існує: $\varnothing$.

Вказуємо критичні точки на координатній прямій і визначаємо знак y' на отриманих інтервалах (точка $x = -1$ виколота, оскільки не належить області визначення функції):



(наприклад, $y'(-2) = \frac{32}{49} > 0$, $y'\left(-\sqrt[3]{2}\right) = -4 < 0$, $y'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{31}{49} < 0$, $y'(1) = 1 > 0$).

$\boxed{4}$ Знайдемо похідну 2-го порядку:

$$y'' = \left(\frac{x^6 + 4x^3}{(x^3+1)^2} \right)' = \frac{\left(x^6 + 4x^3\right)' \left(x^3+1\right)^2 - \left(x^6 + 4x^3\right)\left(\left(x^3+1\right)^2\right)'}{\left(\left(x^3+1\right)^2\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(6x^5 + 12x^2\right)\left(x^3+1\right)^2 - \left(x^6 + 4x^3\right)\left(x^3+1\right)3x^2}{\left(x^3+1\right)^4} =$$

$$= \frac{6x^2\left(x^3+1\right)\left[\left(x^3+2\right)\left(x^3+1\right) - \left(x^6+4x^3\right)\right]}{\left(x^3+1\right)^4} =$$

$$= \frac{6x^2\left(x^6 + 3x^3 + 2 - x^6 - 4x^3\right)}{\left(x^3+1\right)^3} = \frac{6x^2\left(2 - x^3\right)}{\left(x^3+1\right)^3}.$$

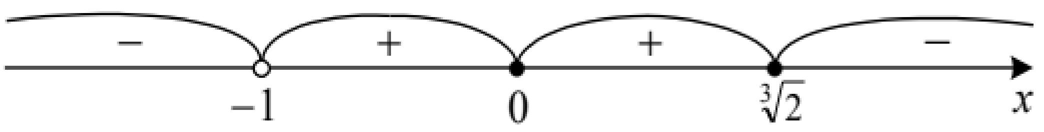
Критичні точки 2-го роду:

а) $y'' = 0$: $\quad \dfrac{6x^2\left(2-x^3\right)}{\left(x^3+1\right)^3} = 0$, $\quad x^2\left(2-x^3\right) = 0$, $\quad$ звідки $x = 0$, $x = \sqrt[3]{2}$;

б) y'' не існує: $\varnothing$.

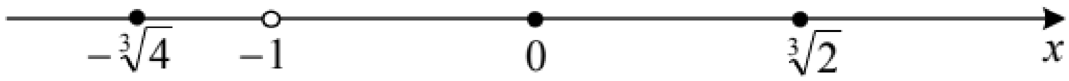
Отже, маємо дві критичні точки 2-го роду $x = 0$ та $x = \sqrt[3]{2} \approx 1{,}26$.

Вказуємо критичні точки на координатній прямій і визначаємо знак y'' на отриманих інтервалах:



(взяли, наприклад, на відповідних інтервалах точки -2, $-\dfrac{1}{2}$, 1, 2).

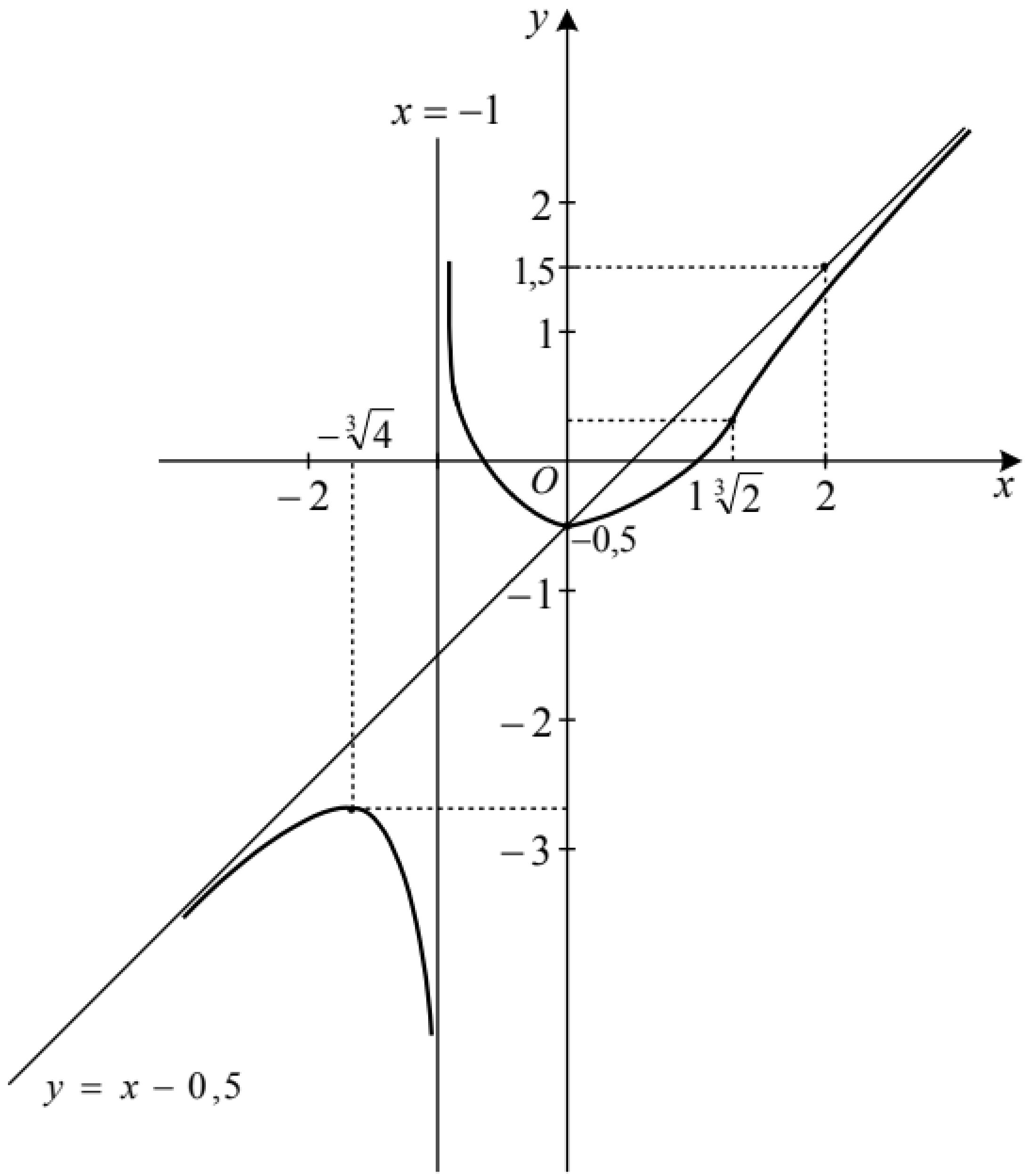
$\boxed{5}$ Вкажемо критичні точки 1-го та 2-го роду на координатній прямій:



Отже, маємо п'ять інтервалів: $\left(-\infty,-\sqrt[3]{4}\right)$, $\left(-\sqrt[3]{4},-1\right)$, $(-1,0)$, $\left(0,\sqrt[3]{2}\right)$, $\left(\sqrt[3]{2},+\infty\right)$.

Заповнимо таблицю.

x	$\left(-\infty;-\sqrt[3]{4}\right)$	$-\sqrt[3]{4}$	$\left(-\sqrt[3]{4};-1\right)$	$(-1;0)$	0	$\left(0;\sqrt[3]{2}\right)$	$\sqrt[3]{2}$	$\left(\sqrt[3]{2};+\infty\right)$
y'	+	0	–	–	0	+		+
y''	–		–	+	0	+	0	–
y	$\nearrow$ $\cap$	max $y(-\sqrt[3]{4}) \approx$ $\approx -2,62$	$\searrow$ $\cap$	$\searrow$ $\cup$	min $y(0)=-0,5$	$\nearrow$ $\cup$	т.п. $y(\sqrt[3]{2}) \approx$ $\approx 0,34$	$\nearrow$ $\cap$


y
x = −1
2
1,5
1
−∛4
−2
O
1 ∛2
2
x
−0,5
−1
−2
−3
y = x − 0,5