Обчислення площі фігури в полярних координатах.

Розглянемо полярну систему координат.

Сукупність точки О і осі р будемо називати полярною системою координат, т. О – полюсом, р – полярною віссю (рис. 21).

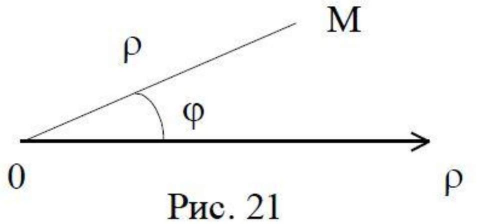


Рис. 21

Нехай М – довільна точка площини. Координата точки М задається двома числами М(ρ, φ): ρ – відстань від полюса О до точки М, $\rho \geq 0$; φ – кут між полярною віссю р і радіусом-вектором $\overline{OM}$.

Встановимо зв'язок між декартовими і полярними координатами довільної точки М. Нехай початок декартової прямокутної системи координат 0ху співпадає з полюсом, а додатня піввісь абсцис – з полярною віссю. Точка М має декартові координати х і у та полярні координати ρ і φ (рис. 22). Тоді формули переходу від полярних до декартових координат мають вигляд $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases}$ і навпаки

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

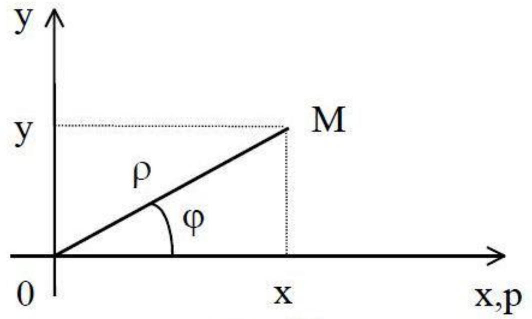


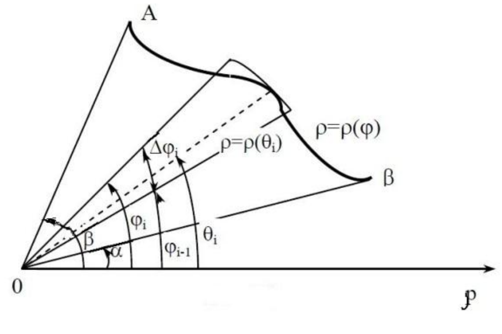
рис. 22

Нехай крива АВ в полярній системі координат задана рівнянням

$$\rho = \rho(\varphi),$$

де ρ(φ) – неперервна функція при $\alpha \leq \varphi \leq \beta$.

Фігура, обмежена кривою АВ і двома променями $\varphi = \alpha$ і $\varphi = \beta$, називається криволінійним сектором Якщо крива АВ є дуга кола радіуса ρ з центром на початку координат, то криволінійний сектор буде круговим сектором.



Розіб'ємо довільним чином відрізок $[\alpha, \beta]$ на n частин точками $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_{i-1} < \varphi_i < \ldots < \varphi_n = \beta$.

На кожному частковому відрізку $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$ $(i = 1, 2, ..., n)$ візьмемо довільну точку $\theta_i \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i]$ і побудуємо кругові сектори з радіусами $\rho = \rho(\theta_i)$

Площа кругового сектора з радіусом $\rho = \rho(\theta_i)$ і центральним кутом $\Delta\varphi_i$ дорівнює

$$\Delta S_i = \frac{1}{2}\rho(\theta_i)\rho(\theta_i)\Delta\varphi_i = \frac{1}{2}\rho^2(\theta_i)\Delta\varphi_i.$$

$S_n = \sum_{i=1}^{n}\Delta S_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\rho^2(\theta_i)\Delta\varphi_i$ – інтегральна сума для функції $\rho=\rho(\varphi)$ на відрізку$[\alpha, \beta]$.

Границя цієї суми при $\lambda = \max\Delta\varphi_i \to 0$ і буде, очевидно, площею криволінійного сектора, обмеженого кривою $\rho = \rho(\varphi)$ і променями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, якщо ця границя не залежить від способу розбиття і вибору точок θ_i.

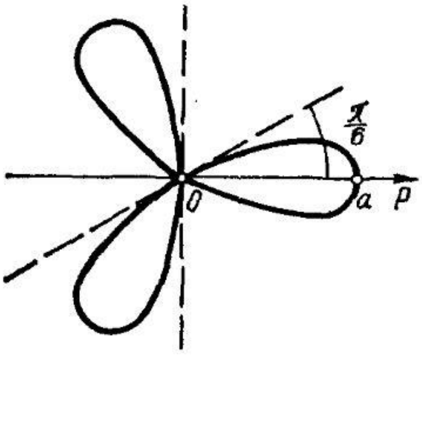
Функція $\rho = \rho(\varphi)$ неперервна, тому за теоремою про існування визначеного інтеграла маємо

$$S = \lim_{\lambda \to 0} S_n \qquad\qquad S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi.$$

Приклад

Обчислити площу, обмежену «трипелюстковою розою» $\rho = a\cos 3\varphi$

Криві, що визначаються рівняннями $\rho = a\cos k\varphi$, $\rho = a\sin k\varphi$ (a, k – const, a > 0), називаються трояндами.



Знаходимо площу півпелюстки «рози» і множимо на шість. Тому за формулою

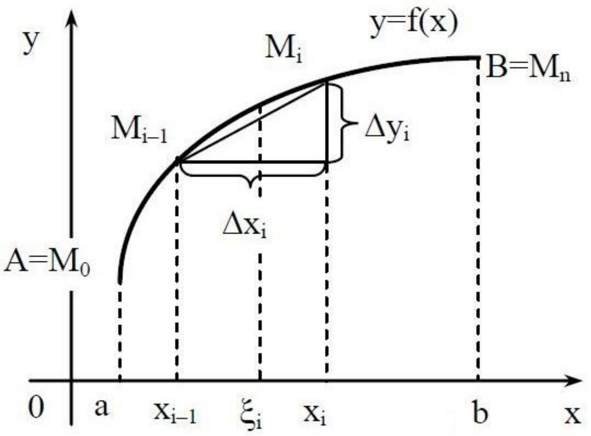
$$S = 6 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (a \cos 3\varphi)^2 \, d\varphi = 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 + \cos 6\varphi}{2} \, d\varphi =$$

$$= \frac{3}{2} a^2 \left(\varphi + \frac{\sin 6\varphi}{6}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi a^2}{4}$$

Довжина дуги кривої.

Розглянемо деяку неперервну однозначну і гладку на відрізку [a; b] функцію $y = f(x)$.

Знайдемо довжину дуги AB кривої $y = f(x)$. Впишемо в неї довільну ламану $M_0M_1M_2...M_n$



Позначимо через Δl_i довжину однієї ланки $M_{i-1} M_i$ ламаної $\Delta l_i = \left| M_{i-1} M_i \right|$.

Довжина ламаної $M_0M_1M_2...M_n$ дорівнює

$$l_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i \, .$$

Означення 1. Будемо називати довжиною кривої $y = f(x)$ на відрізку [a; b] границю довжини вписаної ламаної при $\max \Delta l_i \to 0$, якщо границя існує і не залежить від способу розбиття

$$l = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} l_n = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i \, .$$

Довжина i-ої ланки M_{i-1} M_i вписаної ламаної дорівнює

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i \, .$$

За теоремою Лагранжа $$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i), \quad \text{де} \quad \xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$$

$$\text{Отже,} \ \Delta l_i = \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \cdot \Delta x_i \, .$$

Тоді довжина дуги кривої дорівнює

$$l = \lim_{\max\Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i = \lim_{\max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}\,\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \quad (6)$$

Якщо крива y = f(x) задано параметрично

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

де функції $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ неперервні на $[\alpha, \beta]$, то довжина кривої обчислюється за формулою

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt \qquad (7)$$

В даному випадку параметричні рівняння визначають деяку функцію $y = f(x)$ неперервну разом із своєю похідною $f'(x) = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$. Формулу (7) дістаємо з формули (6) за допомогою заміни змінної:

$$l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = \begin{vmatrix} x = \varphi(t), & a = \varphi(\alpha) \\ dx = \varphi'(t)dt, & b = \varphi(\beta) \end{vmatrix} =$$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{1+\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2}\,\varphi'(t)dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt.$$

Приклад Обчислити довжину однієї арки циклоїди

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \quad t \in (-\infty; +\infty). \end{cases}$$

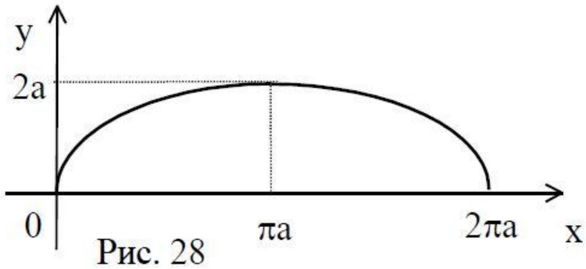


Рис. 28

t	x	y
0	0	0
π	πa	2a
2π	$2\pi a$	0

обчислимо довжину першої її арки при $t \in [0;2\pi]$. (рис. 28).

Знаходимо $\varphi'(t) = a(t - \sin t)' = a(1 - \cos t)$, $\psi'(t) = a(1 - \cos t)' = a\sin t$.

Застосовуючи формулу (7), дістаємо

$$1 = \int_0^{2\pi} \sqrt{(a(1-\cos t))^2 + (a\sin t)^2}\,dt = \int_0^{2\pi} a\sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\,dt =$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}\,dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = 2a\int_0^{2\pi} \left|\sin\frac{t}{2}\right| dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = -4a(\cos\pi - \cos 0) = 8a.$$

Нехай тепер гладка крива задана рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, в полярних координатах. Якщо в рівностях $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ параметром вважати кут φ, то

за формулою

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$$

$$x'_\varphi = \rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi, \quad y'_\varphi = \rho'\sin\varphi + \rho\cos\varphi \text{ і } \sqrt{x'^2_\varphi + y'^2_\varphi} =$$

$$= \sqrt{\rho'^2\cos^2\varphi - 2\rho'\rho\cos\varphi\sin\varphi + \rho^2\sin^2\varphi + \rho'^2\sin^2\varphi + 2\rho'\rho\cos\varphi\sin\varphi + \rho^2\cos^2\varphi} =$$

$$= \sqrt{\rho^2\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right) + \rho'^2\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)} = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2},$$

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\varphi$$

Об'єм тіла

Нехай треба знайти об'єм тіла, якщо відомі площі S перерізів цього тіла площинами, перпендикулярними до деякої осі, наприклад Ox: $S = S\ (x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ (рис. 7.29).

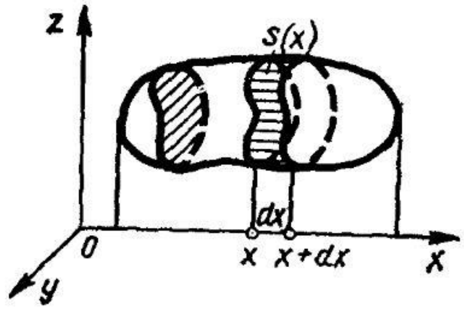


Рис. 7.29

Перетнемо тіло двома площинами, які проходять через точки x та $x + dx$, перпендикулярно до осі Ox. Тоді утворену між перерізами фігуру можна вважати циліндром з основою $S\ (x)$ і висотою dx, тому диференціал об'єму $dV = S\ (x)\, dx$, і якщо x змінюється від a до b, то об'єм тіла

$$V = \int_a^b S\ (x)\, dx. \tag{78}$$

Формула (78) називається *формулою об'єму тіла за площами паралельних перерізів*.

Розглянемо, зокрема, об'єм тіл обертання. Нехай криволінійна трапеція обмежена зверху графіком неперервної функції $y = f\ (x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Якщо цю трапецію обертати навколо осі Ox, то утвориться просторова фігура, яка називається тілом обертання (рис. 7.30).

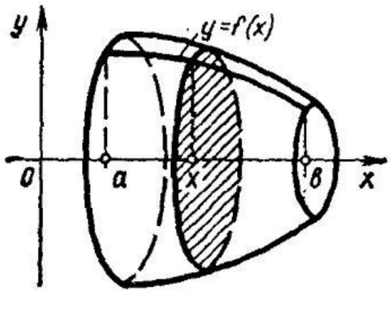


Рис. 7.30

Оскільки площа паралельного перерізу $S = \pi y^2 = \pi f^2\ (x)$, то, згідно з формулою (78), об'єм тіла, утвореного обертанням даної трапеції навколо осі Ox,

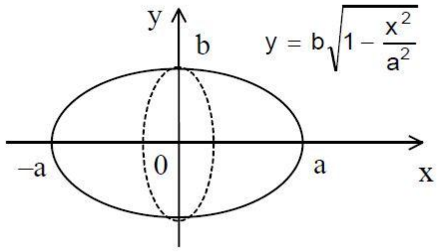
$$V_x = \pi \int_a^b f^2\ (x)\, dx. \tag{79}$$

Приклад Обчислити об'єм еліпсоїда обертання

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Тіло утворюється обертанням кривої $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ або

$y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ навколо осі 0x



За формулою

$$V=\pi\int_{-a}^{a}b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=$$

$$=2\pi b^2\int_{0}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=$$

$$=2\pi b^2\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_0^a=2\pi b^2\left(a-\frac{a^3}{3a^2}\right)=\frac{4}{3}\pi ab^2 \text{ (куб. од.)}$$

Площа поверхні обертання

Нехай крива, задана неперервною функцією $y=f(x)\geqslant 0$, $a\leqslant x\leqslant b$, обертається навколо осі Ox. Перетнемо поверхню обертання двома площинами, які проходять через точки x та $x+dx$, паралельно Oyz. Замінимо утворену між перерізами фігуру зрізаним конусом, твірна якого дорівнює $dl=\sqrt{1+y'^2}dx$, а радіуси основ дорівнюють $f(x)$ та $f(x+dx)$ (рис. 7.31).

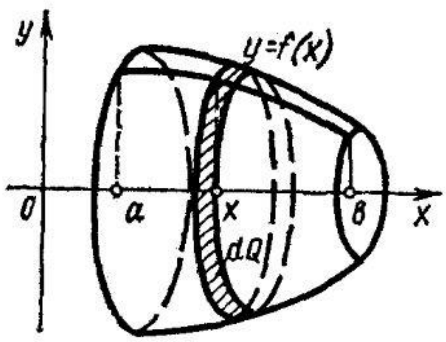


Рис. 7.31

Якщо висота конуса dx досить мала, то площа dQ бічної поверхні цієї фігури дорівнює площі бічної поверхні зрізаного конуса

$S=\pi(R+r)l$, де $R\approx r=f(x)$,

тобто маємо диференціал площі

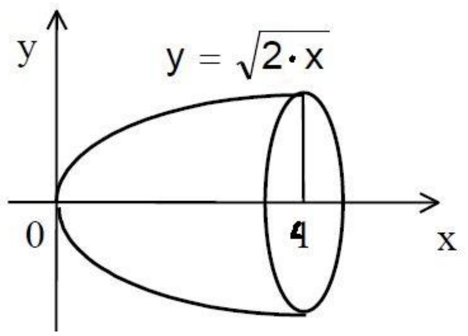
$$dQ = 2\pi f(x)\sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

Інтегруючи, знайдемо всю площу поверхні обертання:

$$Q = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx.$$

Приклад

Обчислити площу поверхні частини параболоїда, утвореного обертанням навколо осі Ox параболи $y^2 = 2x$, де $0 \leqslant x \leqslant 4$.



$$y = \sqrt{2x},\quad y' = \frac{1}{\sqrt{2x}}\ ;\quad \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{\frac{1 + 2x}{2x}}.$$

$$Q = 2\pi\int_0^4 \sqrt{2x}\sqrt{\frac{1 + 2x}{2x}}\,dx = 2\pi\int_0^4 \sqrt{1 + 2x}\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}\pi\,(1 + 2x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4 = \frac{52\pi}{3}$$