Тема 2. Задачі математичного програмування (МП)

1 Формальна постановка задачі

2. Види та структурні моделі загальної задачі МП

3. Приклад розгорнутої моделі задачі ЛП

4. Графоаналітичний метод

1 Формальна постановка задачі

МП – область математики, що займається розробкою теорії та чисельних методів розв'язку багатомірних екстремальних задач з обмеженнями, тобто задач на екстремум функції багатьох змінних з обмеженнями на область змінювання цих змінних. Або, **МП –** це розділ прикладної математики, який вивчає задачі умовної оптимізації.

Задача оптимізації – знайти найкращий варіант рішення в рамках визначеного критерію.

<u>Оптимальність за Парето</u>: Допустимий стан системи $\underline{x}^*$ є оптимальним за Парето, якщо не існує іншого допустимого стану, яке було б для всіх учасників не гірше і хоча б для одного – краще, ніж $\underline{x}^*$:

$$f_i(\underline{x}) \ge f_i(\underline{x}^*), i=1,...m, \quad \underline{x} \in x - \sum \textit{всіх допустимих станів} \Rightarrow f_i(\underline{x}) = f_i(\underline{x}^*),\ i=1,...,m,$$

де $\underline{x}$ - стан системи;

$f(\underline{x})$ - цільова функція для кожного учасника.

Формалізація задачі МП (оптимізації)

При формалізації задачі МП основними виступають такі поняття:

- змінні («інструментальні» змінні) $(\underline{x})$ - інструменти (тарифи, процентні ставки, обчислення тощо) для досягнення визначених цілей (ефективність плану, …): $\underline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$;

- допустима множина $(\underline{x}^*)$ - вектор інструментальних змінних, що задовольняє обмеженням задачі (умовам функціонування системи:

$$\underline{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \left((\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)^T\right).$$

- цільова функція $(F(\underline{x}) = F(x_1, x_2, ..., x_n))$ - математичний вираз цілі (мети) даної задачі (як правило, у вигляді функціонала).

Задача МП формулюється таким чином:

при заданих умовах $\underline{\alpha}$ знайти таке рішення $\underline{x}$, яке приводить показник ефективності (цільову функцію) F до екстремального значення ($\max$ або $\min$:

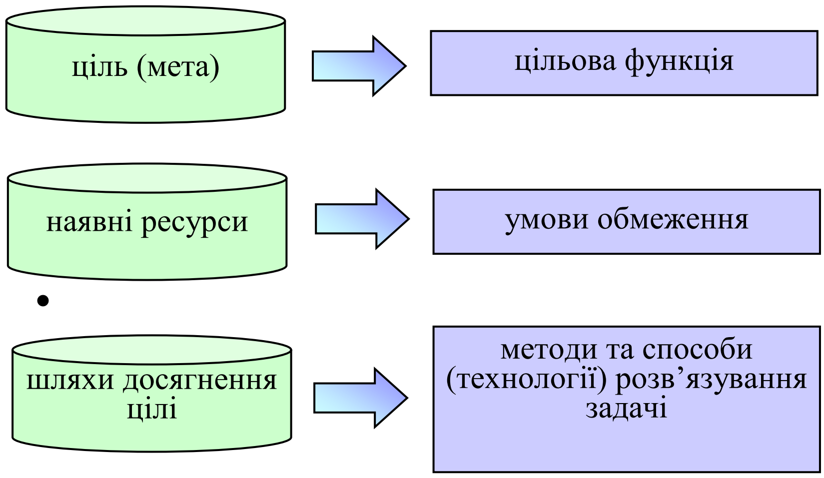
$$F \Rightarrow F_{extr = \left\{ \begin{matrix} \max \\ \min \end{matrix} \right\}} (\alpha, x). \qquad (1)$$

2. Види та структурні моделі загальної задачі МП

Виділяють три основних види загальної задачі МП:

- класична задача МП;
- задача нелінійного програмування (НП);
- задача лінійного програмування (ЛП).

Згадуючи метод системного підходу (методологію системного аналізу), до вирішення проблеми або розв’язування задачі можна застосувати такі компоненти:



<u>Структурні моделі основних задач МП</u>

Класична задача МП. <u>*Мета*</u>*:* максималізація цільової функції при заданих обмеженнях

$$extr F \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \min\limits_{\underline{x}} \\ \max\limits_{\underline{x}} \end{matrix} \right\} \text{ при умові, що } \underline{g}(\underline{x}) = \underline{b}, \qquad (2)$$

де $\underline{g}(\underline{x})$ - функції обмежень (відомі неперервно диференційовані функції);

$\underline{b}$ - константи обмежень.

В розгорнутому вигляді обмеження є рівностями:

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, ..., x_n) = b_1 \\ g_2(x_1, x_2, ..., x_n) = b_2 \\ \\ g_m(x_1, x_2, ..., x_n) = b_m. \end{cases} \tag{3}$$

Задача нелінійного програмування (НП) передбачає систему обмежень двох типів:

умов-обмежень у вигляді нерівностей

$$\underline{g}(\underline{x}) \begin{pmatrix} \leq \\ \geq \end{pmatrix} \underline{b}\ ; \tag{4}$$

граничних умов (невід'ємності)

$$\underline{x} \geq \underline{0}, ; \tag{5}$$

тобто $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0.$

Таким чином, задача НП записується так:

$$extr F(\underline{x}) = \begin{Bmatrix} \max\limits_{\underline{x}} \\ \min\limits_{\underline{x}} \end{Bmatrix} F(\underline{x}) \quad \text{при умові, що} \tag{6}$$

$$\underline{g}(\underline{x}) \begin{Bmatrix} \leq \\ \geq \end{Bmatrix} \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0}.$$

Задача лінійного програмування (ЛП).

Цільова функція даної задачі – лінійна:

$$F(\underline{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = \underline{c}\underline{x}, \tag{7}$$

де $\underline{c}$ - заданий вектор – рядок констант

$$\underline{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n). \tag{8}$$

Система обмежень двох типів:

умови – обмеження у вигляді лінійних нерівностей

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \text{-------------------------} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{array} \tag{9}$$

граничні умови

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0.$$

У <u>векторній</u> формі:

$$\left\{ \begin{matrix} \max \\ \min \end{matrix} \right\} F(\underline{x}) = \underline{c}\underline{x} \text{ при умові, що } \underline{A}\underline{x} \left\{ \begin{matrix} = \\ \le \\ \ge \end{matrix} \right\} \underline{b}, \underline{x} \ge \underline{0}, \tag{10}$$

де

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \text{----------} \\ a_{m1}a_{m2}\ldots a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

В операторній формі:

$$F(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Rightarrow \begin{Bmatrix} \max \\ \min \end{Bmatrix},$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} = \\ \le \\ \ge \end{Bmatrix} b_i \tag{12}$$

$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,n}, i=\overline{1,m}.$$

3. Приклад розгорнутої моделі задачі ЛП

Порядок створення економіко-математичної моделі

I. Структурна модель.

II. Числова (розгорнута) модель, тобто запевнення конкретним числовим змістом.

Розглянемо приклад: нехай підприємство виробляє два види продукції: P_1 і P_2, для яких використовують сировину (ресурси) s_1 і s_2. Вартість одиниці кожного продукту відповідно C_1 і C_2: C_1 = 3 од., C_2 = 2 од. Знайти скільки треба виробити продукції P_1 і P_2, щоб отримати $\max$ доход $(F \to \max)$ і вкластися в обмеження по сировині: для s_1 використати не більше $\le b_1 = 12$ ресурсів; для s_2 - не більше $\le b_2 = 10$ ресурсів і по забрудненню середовища: не більше $\le b_3 = 6$ доз.

Дані витрат сировини та забруднення середовища при виробництві одиниці продукту відповідно:

$$\begin{array}{lll} & P_1 & P_2 \\ S_1 & a_{11}=6 & a_{12}=3 \\ S_2 & a_{21}=2 & a_{22}=4 \\ \textit{забруднення} & a_{31}=2 & a_{32}=0 \end{array}$$

Формалізуємо задачу у вигляді таблиці для зручності побудови математичної моделі. Припустимо, що x_1 - кількість продукту P_1; x_2 - кількість продукту P_2:

Ресурс	x_1	x_2	Обмеження b_1
s_1	6	3	≤ 12
s_2	2	4	≤ 10
Забруднення	2	0	≤ 6
F	3	2	

Структурна модель:

$$\left.\begin{array}{l} F = \sum_{j=1}^{2} c_j x_j \Rightarrow \max \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \leq b_3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}\right\} \qquad (13)$$

Розгорнута числова модель:

$$\left.\begin{array}{l} F = 3x_1 + 2x_2 \\ 6x_1 + 3x_2 \le 12 \\ 2x_1 + 4x_2 \le 10 \\ 2x_1 + 0x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{array}\right\} \tag{14}$$

4. Графоаналітичний метод

Метод використовують, коли задача лінійного програмування містить дві змінні: x_1 і x_2 (можна 3 змінні $\Rightarrow$ декартовий простір $\updownarrow^{x_3}_{x_1}\rightarrow_{x_2}$). Наприклад, система рівнянь (13).

Методика розв'язання задачі:

1).Побудувати декартову систему координат (x_1, x_2) – тільки I чверть в силу обмежень $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

2).Будуємо область допустимих значень G відповідно нерівностям-обмеженням, які представляють собою напівплощини. На перетині всіх півплощин знаходиться область G.

3). Проводимо лінії рівня функції $F(x_1, x_2)$, які визначаються видом рівняння

$$c_1x_1 + c_2x_2 = k, \tag{15}$$

де $k = const$.

Рівняння (15) можна записати у вигляді:

$$x_2 = \frac{k}{c_2} - \frac{c_1}{c_2}x_1. \tag{16}$$

Із (16) видно, що кутовий коефіцієнт цієї прямої дорівнює $\left(-\dfrac{c_1}{c_2}\right)$ і не залежить від k. Якщо змінювати величину k, то пряма буде рухатись паралельно собі, тобто в напрямку градієнта функції $F(x_1,x_2)$:

$$gradF(x_1,x_2)=\left(\frac{\partial F}{\partial x_1};\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^T=(c_1,c_2)^T=\vec{c}, \qquad (17)$$

тобто в напрямку нормалі до лінії рівня.

$F_{\min}$ відповідає точці (множині точок) перетину лінії рівня з ближньою вершиною (стороною) області G (точка входу).

$F_{\max}$ відповідає точці перетину лінії рівня з дальньою вершиною (стороною) області G (точка виходу).

Значення змінних x_1 і x_2 указують перпендикуляри до осей x_1 і x_2, опущені з точки екстремуму.

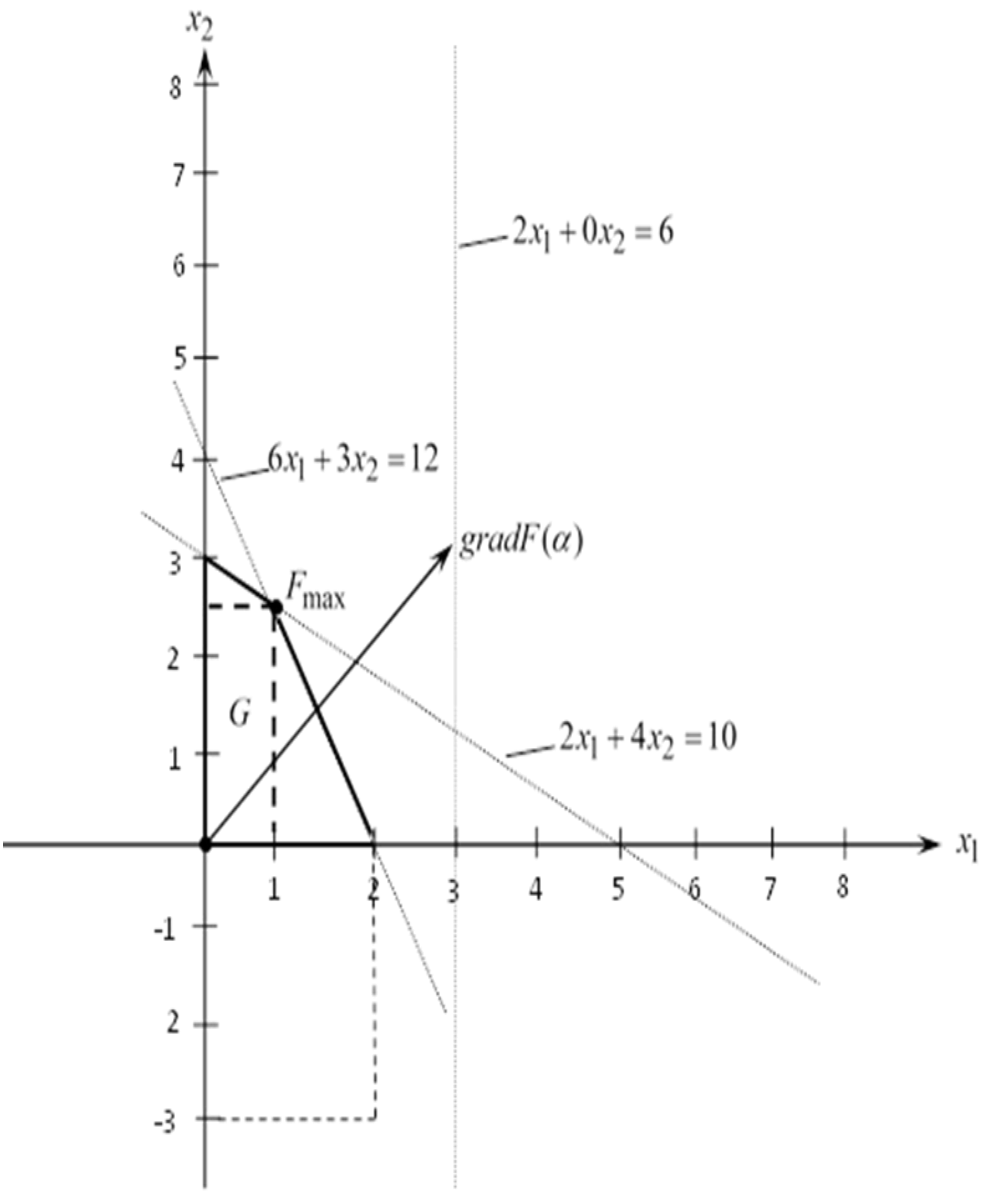
Закономірності:

1). Оптимальне рішення завжди знаходиться на границі області допустимих значень G і, як правило, у вершині багатокутника.

2). Рішення може бути не єдиним, якщо лінія рівня паралельна стороні багатокутника.

3). Задача може не мати рішення, коли в напрямку росту функції $(gradF)$ допустима область не обмежена.

Розв’язок задачі – прикладу:



<u>Аналогічно</u>: $F_{\max}$ на перетині ліній.

$$6x_1 + 3x_2 = 12 \text{ та } 2x_1 + 4x_2 = 10$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 = 12 \\ 2x_1 + 4x_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4 \\ 3x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}.$$