

7.5 Методи обробки зображень

Методи обробки зображень (*image processing*) мають надзвичайно важливе значення в сучасній науці, вони є одними з таких, які постійно розвиваються та вдосконалюються. При цьому під обробкою зображень розуміють не лише поліпшення зорового сприйняття зображень, але й класифікацію об'єктів, що виконується при аналізі зображень.

Сфери застосування методів цифрової обробки в наш час значно розширюються, витісняючи аналогові методи обробки сигналів зображень. Методи цифрової обробки широко застосовуються в промисловості, мистецтві, медицині, космосі. Вони застосовуються при керуванні процесами автоматизації виявлення об'єктів, при розпізнаванні образів і в багатьох інших. Цифрова передача зображень із космічних апаратів, цифрові канали передачі сигналів зображень вимагають забезпечення передачі все більших потоків інформації. Формування зображень, поліпшення якості та автоматизація обробки медичних зображень, охоплюючи зображення, що створюються електронними мікроскопами, рентгенівськими апаратами, томографами тощо, є предметом сучасних досліджень та розробок. Автоматичний аналіз у системах дистанційного спостереження широко застосовується при аналізі місцевості, у лісовому господарстві, наприклад, для автоматичного підрахунку площі вирубок, у сільському господарстві для спостереження за дозріванням урожаю, у розвідці, у системах протипожежної безпеки. Контроль якості виробленої продукції виконується завдяки автоматичним методам аналізу сцен.

Сьогодні важко уявити сферу діяльності, у якій можна обійтися без комп'ютерної обробки зображень. При комп'ютерній обробці зображень вирішується широке коло таких завдань, як поліпшення якості зображень; вимірювання параметрів зображення; спектральний аналіз багатовимірних сигналів; розпізнавання зображень; стиск зображень.

7.5.1 Класичні методи обробки зображень

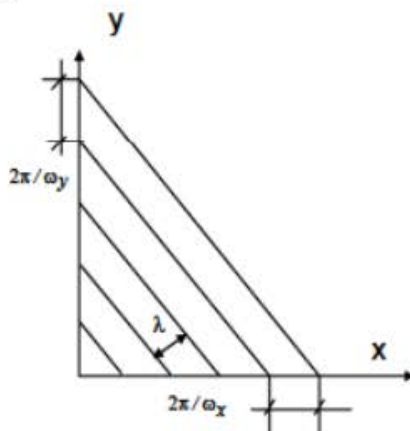
Комп'ютерна обробка зображень можлива після перетворення сигналу зображення з неперервної форми в цифрову. Ефективність обробки залежить від адекватності моделі, що описує зображення, необхідної для розробки алгоритмів обробки. Модель зображення являє собою систему функцій, що описують істотні характеристики зображення: функцію яскравості, що відбиває зміну яскравості в площині зображення, просторові спектри й спектральні інтенсивності зображень, функції автокореляції. Канал зображення містить оптичну систему, оптико-електричний перетворювач, пристрій аналого-цифрового перетворення (АЦП) і цифрової обробки сигналів зображення.

При обробці зображень широко використовується аналіз спектрів зображень. Спектр зображення (*image spectrum*) одержують прямим двовимірним перетворенням Фур'є функції, що описує зображення

$$F(\omega_x, \omega_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(-i(\omega_x x + \omega_y y)) dx dy + \\ + i \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (-f(x, y)) \sin(\omega_x x + \omega_y y) dx dy = \text{Re}(\omega_x, \omega_y) + i \text{Im}(\omega_x, \omega_y) \quad (7.38)$$

де ω_x, ω_y – просторові частоти; $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця.

Функція $\exp(-i(\omega_x x + \omega_y y)) dx dy$ при фіксованих значеннях просторових частот описує плоску хвилю в площині зображення (x, y) (відповідно до рисунка 7.23, де λ – довжина хвилі).



Формула (7.38) пов'язує дійсну функцію, що описує яскравість зображення $f(x, y)$, з комплексною функцією частоти – спектром зображення $F(\omega_x, \omega_y)$:

$$F(\omega_x, \omega_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(-i(\omega_x x + \omega_y y)) dx dy + \\ + i \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (-f(x, y)) \sin(\omega_x x + \omega_y y) dx dy = \text{Re}(\omega_x, \omega_y) + i \text{Im}(\omega_x, \omega_y) \quad (7.39)$$

де $\text{Re}(\omega_x, \omega_y)$ – дійсна частина спектра; $\text{Im}(\omega_x, \omega_y)$ – реальна частина спектра.

Амплітуда і фаза спектра визначаються за формулами (7.40) і (7.41) відповідно:

$$F(\omega_x, \omega_y) = \sqrt{\operatorname{Re}(\psi_x, \psi_y)^2 + \operatorname{Im}(\psi_x, \psi_y)^2} ; \quad (7.40)$$

$$\varphi(\psi_x, \psi_y) = \operatorname{arctg}(\operatorname{Im}(\psi_x, \psi_y) / \operatorname{Re}(\psi_x, \psi_y))$$

$$F(\omega_x, \omega_y) = F(\psi_x, \psi_y) \exp(i\varphi(\omega_x, \omega_y)). \quad (7.41)$$

Обернене перетворення Фур'є дозволяє відновити зображення за його спектром:

$$f(x, y) = (1/4\pi^2) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\psi_x, \psi_y) \exp(i\varphi(\omega_x, \omega_y)). \quad (7.42)$$

Спектральна інтенсивність (*spectral intensity*) зображення характеризує розподіл енергії по просторових частотах. Вона визначається як квадрат модуля спектра зображення:

$$S(\omega_x, \omega_y) = \operatorname{Re}(\omega_x, \omega_y)^2 + i \operatorname{Im}(\omega_x, \omega_y)^2 = F^2(\omega_x, \omega_y). \quad (7.43)$$

Для її назви використовуються терміни “спектральна щільність” (*spectral density*) і “енергетичний спектр” (*energy spectrum*).

Енергія зображення визначається як інтеграл енергетичного спектра за просторовими частотами. Відповідно до теореми Парсеваля енергія зображення може бути обчислена відповідно до (2.7):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega_x, \omega_y)|^2 d\omega_x d\omega_y. \quad (7.44)$$

Ймовірнісні моделі зображень (*probabilistic image models*) широко використовуються для опису зображень. Зображення в цьому випадку розглядається як випадкова функція просторових координат (x, y) і часу t . Випадковий процес називається стаціонарним у широкому сенсі, якщо він має постійні значення математичного очікування й дисперсії, а його автокореляційна функція залежить не від координат, а від їх різниці (зсуву). Випадковий процес називається стаціонарним у вузькому сенсі, якщо його n -вимірна щільність розподілу ймовірностей інваріантна до зсуву. Випадковий процес описується щільністю розподілу ймовірності яскравості в зображенні по просторових координатах для деякого фіксованого моменту часу t $p(x, y)$.

Відповідно до означення математичне сподівання (середнє значення, *mathematical expectation*) стаціонарного процесу в широкому розумінні

$$Mf = \xi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) p(x, y) dx dy = \text{const}.$$

Дисперсія (*dispersion, variance*)

$$Df = \sigma^2 = E(f(x, y) - \xi^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (f(x, y) - \xi)^2 p(x, y) dx dy = const.$$

Функція автокореляції (*autocorrelation function*) обчислюється таким чином:

$$R(\tau_x, \tau_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) f(x - \tau_x, y - \tau_y) dx dy,$$

де τ_x, τ_y задають зсуви зображення по відповідних осях координат.

7.5.2 Статистичні методи аналізу зображень

Перші статистичні методи були основані на аналізі взаємного розташування відтінків сірого кольору зображення та частоти їх появи, що характеризувалась двовимірною функцією щільності ймовірності. Для класифікації та розпізнавання текстур за допомогою функції щільності ймовірності було визначено чотири характерних ознаки:

- кутовий момент;
- контрастність;
- кореляція;
- ентропія.

До статистичних методів можна віднести кореляційний аналіз зображень. На основі кореляційного підходу найбільш успішним є метод матриць взаємозв'язку (*co-occurrence matrices – GLCM*). Дані матриці характеризують частоту пар різних градацій сірого кольору, що присутні в зображенні, і визначаються шляхом кореляційного аналізу пікселів зображення, при цьому якщо піксель відповідає вибраній градації, то він враховується як одиничне значення, якщо ні, то як нульове. У випадку кольорових зображень даний підхід використовують до аналізу кожного з трьох базових кольорів. Як слідує з методу формування матриць взаємозв'язку, вони найкраще підходять до розв'язання задач класифікації текстур.

Наряду зі статистичним аналізом в просторовій області використовують аналогічний аналіз в спектральній області із застосуванням двовимірного дискретного перетворення Фур'є в базисі різних ортогональних функцій – дискретних експоненціальних функцій (ДЕФ), косинусних, Уолша-Адамара, Хаара та інших. Для аналізу текстур використовують метод гістограм розподілу спектральних коефіцієнтів. Загальною характеристикою такого підходу є те, що гістограми спектральних коефіцієнтів, що отримані в результаті інтегральних перетворень, більш стійкі та надійні, ніж гістограми розподілу окремих пікселів чи груп пікселів. Даний метод також не чутливий до присутнього в зображенні шуму, але це є одночасно і недоліком в разі застосування методу до розв'язання

задачі розпізнавання незначних за розміром об'єктів на текстурованому фоні. Також спектральні методи згладжують різкі межі між об'єктами зображення.

Статистичний аналіз пікселів та спектральних коефіцієнтів на основі гістограм в основному використовують до класифікації статичних текстур, до аналізу динамічних текстур використовують методи на основі кореляційного аналізу.

Найпростішою і найбільш часто вживаною є стохастична модель. Фон зображення характеризують гістограмою розподілу значень кольору за величиною в деякій базовій області, вільній від об'єктів. Гістограму апроксимують функцією щільності розподілу ймовірності, найчастіше гаусовою. В цьому випадку параметрами моделі є середнє значення m та дисперсія σ . За максимальне відхилення сигналу моделі приймають 2σ . За мінімальне порогове значення величини відхилення можна прийняти величину $\varepsilon_p = 3\sigma$.

Як приклад розглянемо алгоритм розпізнавання зображення об'єктів за допомогою стохастичної моделі:

$$\text{if } |u_{i,j} - m| > \varepsilon_v \text{ then } v_{i,j} = u_{i,j} \text{ else } v_{i,j} = 0,$$

де $u_{i,j}$, $v_{i,j}$ – елементи матриць заданого зображення та зображення об'єктів.

Метод побудови моделі та її застосування викладено нижче

1. Фрагмент зображення фону, вільний від сторонніх предметів, розміром $n_x \times n_y = 80 \times 80$ пікселів використано як базовий для того, щоб знайти статистичні параметри фону.

2. За допомогою наведеного виразу створено зображення об'єктів.

Як видно з рисунка, всі сторонні об'єкти, як великі (листки), так і малі (білого кольору), виділені, але присутній шум похибки. Зменшити похибку можна збільшивши порогове значення відбору, але, як показали чисельні експерименти, в цьому випадку втрачається якість зображення об'єктів. Таким чином, стохастична модель погано апроксимує фоновий сигнал та неспроможна повністю відділити шукані об'єкти від фону.

7.5.3 Фільтрація зображень

Зазвичай зображення, сформовані різними інформаційними системами, спотворюються дією завад. Це ускладнює як їхній візуальний аналіз, так і автоматичну обробку. При вирішенні деяких завдань обробки зображень у ролі завад можуть виступати ті або інші компоненти самого зображення. Наприклад, при аналізі космічного знімка земної поверхні може стояти завдання визначення меж між її окремими ділянками – лісом і полем, водою й сушею тощо. З погляду цього завдання окремі деталі зображення всередині розділених ділянок є завадою.

Ослаблення дії завад досягається фільтрацією. При фільтрації яскравість (сигнал) кожної точки вихідного зображення, спотвореного завадою, замінюється деяким іншим значенням яскравості, яке меншою мірою було спотворене завадою. Фільтрація зображень здійснюється в просторовій і частотній областях. При просторовій фільтрації зображень перетворення виконується безпосередньо над значеннями відліків зображення. Результатом фільтрації є оцінка корисного сигналу зображення. Це досягається завдяки тому, що зображення часто являє собою двовимірну функцію просторових координат, що змінюється по цих координатах повільніше, ніж завада, що також є двовимірною функцією. Це дозволяє при оцінюванні корисного сигналу в кожній точці зображення взяти до уваги сусідні точки, скориставшись певною подібністю сигналу. В інших випадках, навпаки, ознакою корисного сигналу є різкі перепади яскравості. Однак, як правило, частота цих перепадів відносно невелика, так що на значних проміжках сигнал або постійний, або змінюється повільно. І в цьому випадку властивості сигналу проявляються при спостереженні не тільки його окремої точки, але й при аналізі її околу. Поняття околу є досить умовним. На рисунку 7.24 наведена ієрархія околів відліку, позначеного «0».

9	8	7	6	7	8	9
8	5	4	3	4	5	8
7	4	2	1	2	4	7
6	3	1	0	1	3	6
7	4	2	1	2	4	7
8	5	4	3	4	5	8
9	8	7	6	7	8	9

Рисунок 7.24 – Конфігурації околу елемента «0» у кадрі зображення в ієрархічній послідовності

«1» позначений окіл першого порядку, для якого відстань між елементами дорівнює 1. «2» позначений окіл другого порядку, до якого відносять діагональні елементи, відстань від яких до центрального відліку «0» дорівнює $\sqrt{2}$. Окіл третього порядку поданий елементами, що знаходяться від центрального елемента на відстані 2, і так далі.

Відповідно до рисунка 7.24 формується ієрархія конфігурацій околу центрального відліку розглянутого фрагмента кадру за зростанням відстаней від нього до відліку околу. Окіл може бути утворений лише найближчими сусідами,

але може містити й досить багато елементів кадру. При розгляді околу великого розміру іноді встановлюється різний ступінь впливу далеких і близьких від центра околу точок на сигнал, формований на виході фільтра в даній точці кадру. Таким чином, ідеологія фільтрації ґрунтується на використанні як даних поточної точки, так і її околу.

Традиційна фільтрація в частотній області вимагає виконання такої послідовності перетворень:

- двовимірне дискретне перетворення зображення із просторової області в частотну (наприклад, за допомогою дискретного перетворення Фур'є),
- перетворення дискретного спектра сигналу зображення,
- обернене двовимірне дискретне перетворення, що дозволяє відновити корисний сигнал зображення в просторовій області.

Завдання полягає в тому, щоб знайти таку обчислювальну процедуру, що забезпечила б одержання найкращих результатів.

Використання фільтрів для аналізу текстурованих зображень аналогічно спектральному аналізу, але має ряд переваг в тих випадках, коли характерні ознаки спектра зображення відомі. Фільтрація дозволяє більш точно розділити сигнал на складові, що відповідають різним частотним смугам.

Оптимальна лінійна фільтрація

Нехай $x_{i,j}$ – значення яскравості зображення корисного сигналу на перетині i -го рядка та j -го стовпця, а зображення, що знаходиться на вході фільтра, описується моделлю:

$$y_{i,j} = f(x_{i,j}, n_{i,j}), \quad i = \overline{0, I-1}, \quad j = \overline{0, J-1},$$

де $n_{i,j}$ – значення завади в точці з координатами (i, j) , $f(\cdot)$ – функція, що описує взаємодію сигналу і завади, а I та J – відповідно, число рядків і стовпців у кадрі.

Надалі будемо дотримуватися прийнятої при цифровій обробці зображень декартової системи координат з початком у лівому верхньому кутку кадру та з додатними напрямками із цієї точки вниз та вправо.

При лінійній фільтрації вихідний ефект визначається лінійною комбінацією вхідних даних:

$$x(i, j) = \sum_{(i_1, j_1) \in S} a(i_1, j_1) \cdot y(i - i_1, j - j_1). \quad (7.45)$$

В цьому рівнянні $x(i, j) = x_{i,j}$ – результат фільтрації корисного сигналу в точці кадру з координатами (i, j) ; S – множина координат точок, що утворюють окіл; $a(i_1, j_1)$ – вагові коефіцієнти, сукупність яких являє собою двовимірну імпульсну характеристику (IX). Якщо область кінцева, то імпульсна характеристика має кінцеву довжину й фільтр називається КІХ-фільтром. В

іншому випадку імпульсна характеристика має нескінченну довжину, а фільтр носить назву НІХ-фільтра. У виразі (7.45) прийнято, що ІХ не залежить від координат точки, у якій визначається вихідний ефект. Процедури обробки зображень, що мають властивість незалежності від координат, називаються *однорідними*.

Найбільш поширеним критерієм оптимальності, який використовується для оцінювання якості обробки зображень, є критерій мінімуму середньоквадратичної похибки. Для фільтрації запишемо його так:

$$E = \left\{ \left[x(i, j) - \sum_{(i_1, j_1) \in S} a(i_1, j_1) \cdot y(i - i_1, j - j_1) \right]^2 \right\} = \min_{a(i)} \quad (7.46)$$

де $E\{\circ\}$ – символ математичного сподівання. Згідно з (7.46) пошук оптимального фільтра полягає у визначенні його ІХ таким чином, щоб середній квадрат похибки $\varepsilon(i, j) = x(i, j) - x^*(i, j)$, який виражає різницю між сигналом $x(i, j)$ і його оцінкою $x^*(i, j)$, яка формується фільтром, був мінімальним. Математичне сподівання обчислюється за всіма випадковими величинами, які є в (7.46), що свідчить про орієнтацію критерію на врахування середніх похибок.

Залежно від складності зображення використовують два або більше двовимірних фільтрів з коротко-імпульсною характеристикою (КІХ) або банки вузькосмугових фільтрів вигляду

$$S_{i,j} = - \sum_{m,n=0}^{N-1, M-1} h_{m,n} u_{i-m, j-n} \quad (7.47)$$

де $S_{i,j}$ та $u_{i-m, j-n}$ – відповідно, фільтрований сигнал та сигнал зображення, $h_{m,n}$ – імпульсна характеристика розміром $M \times N$.

Як критерій оптимальності використовують співвідношення середніх значень сигналів на виході фільтра, що отримані для текстури, яка відповідає характеристиці фільтра, та для текстур, які не відповідають характеристиці фільтра.

Для фільтрації зображень на основі їх спектральних ознак використовують фільтри Габора. Імпульсна характеристика фільтра має вигляд

$$h = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left(-\frac{i^2}{2\sigma_x} - \frac{j^2}{2\sigma_y}\right) \exp(2\pi i(f_x i + f_y j)). \quad (7.48)$$

Вона поєднує функцію Гауса та гармоніку, що характеризує частотну характеристику зображення. За допомогою параметрів дисперсії σ^2 в (7.48) регулюють смугу частотного фільтра з парою центральних частот (f_x, f_y) за

двома просторовими координатами. Як правило, для характеристики текстурованого зображення використовують набір фільтрів з фіксованими або визначеними для кожної текстури парами частот.

Алгоритм класифікації та розпізнавання зображень охоплює такі етапи:

- 1) фільтрація зображення за допомогою набору фільтрів;
- 2) обчислення потужності на виході кожного з фільтрів;
- 3) згладжування значень потужності;
- 4) нормалізація значень потужності;

5) класифікація (розпізнавання) за допомогою шаблонів або співвідношень значень потужності.

Недоліком даного методу є те, що він потребує значного обсягу обчислень в тому разі, коли розмір фільтра $M \times N$ значний і число фільтрів велике.

У практиці цифрової обробки зображень широко використовується маскова фільтрація. Її лінійний різновид є одним з варіантів двовимірної фільтрації з кінцевою імпульсною характеристикою (КИХ) фільтра. Як маска використовується безліч вагових коефіцієнтів, заданих у всіх точках околу S , що, зазвичай, симетрично оточують поточну точку кадру.

Нелінійна фільтрація

У результаті застосування лінійних згладжувальних фільтрів відбувається заглушення шумів, але одночасно розмиваються межі між областями з різною амплітудою сигналу. Для зменшення кількості розмитих меж розроблені різні нелінійні фільтри. Як і лінійні КІХ-фільтри, нелінійні фільтри працюють у ковзному вікні. Різниця між лінійною та нелінійною фільтраціями полягає в тому, що при лінійній фільтрації обчислюється лінійна комбінація відліків сигналу, а при нелінійній фільтрації виконуються нелінійні перетворення відліків сигналу в околі елементів, які зумовлюються маскою фільтра.

Сігма-фільтр

Сігма-фільтр призначений для заглушення шумів у зображенні зі збереженням контурів (різких меж областей). Центральний елемент маски заміщується зваженим середнім значенням, обчисленим лише за тими амплітудами відліків, значення яких потрапляють в $\pm k\sigma$ – область, що вибрана згідно з яскравістю центрального елемента, σ вибирається або як середньоквадратичне відхилення (СКВ) заглушеного шуму, або як СКВ в масці, або встановлюється такою, що дорівнює СКВ, який обчислюється на всьому зображенні:

$$g(x, y) = \sum_{s, t \in S} h(s, t) f(x - s, y - t), \quad (7.49)$$

де s -окіл становлять ті значення координат маски, у яких виконується накладена умова:

$$S = \{(s, t)\} : |f(x-s, y-t) - f(x-y)| \leq k\sigma, \quad (7.50)$$

де $h(s, t)$ – КІХ лінійного згладжувального фільтра.

При $k = 2$ діапазон значень, які замінюються, становить $\pm 2\sigma$, у випадку нормального розподілу шуму ймовірність потрапляння амплітуди за межі діапазону дорівнює 4,55%.

Медіанний фільтр

Медіанний фільтр (МФ) замінює центральний елемент маски медіаною впорядкованої вибірки, сформованою зі всіх амплітуд відліків, що покриваються маскою фільтра. При застосуванні МФ відбувається послідовна обробка кожної точки кадру, у результаті чого утворюється послідовність оцінок. При медіанній фільтрації використовується ковзне двовимірне вікно. У принципі, для кожного відліку виконується незалежне оцінювання медіани у вікні. З метою прискорення оцінювання доцільно алгоритмічно на кожному кроці використовувати раніше виконані обчислення. Розмір вікна встановлюється непарним і дорівнює $m \times n$. Відліки зображення, що знаходяться в межах вікна, утворюють робочу вибірку поточного відліку. Якщо впорядкувати послідовність $\{f_i, i = [1, mn]\}$ за зростанням, то її медіаною буде той елемент вибірки, що займає центральне місце в цій упорядкованій послідовності. Цей елемент є $(mn+1)/2$ найбільшим і $(mn+1)/2$ найменшим значенням у вибірці й визначає результат медіанної фільтрації для поточної точки кадру. Введемо позначення описаної процедури у вигляді:

$$g_{med} = med(f_1, f_2, \dots, f_n). \quad (7.51)$$

Розглянемо приклад. Припустимо, що впорядкована послідовність Y у вікні розміром 3×3 має вигляд: $Y = \{76, 100, 69, 120, 210, 143, 87, 130, 155\}$, де елемент 210 відповідає центру вікна (x, y) . Велике значення яскравості в цій точці кадру є результатом впливу імпульсної завади. Упорядкована за зростанням вибірка має вигляд: $\{69, 76, 87, 100, 120, 130, 143, 155, 210\}$, отже, відповідно до розглянутої вище процедури (7.51), на виході медіанного фільтра одержуємо $g_{med} = 120$. Бачимо, що врахування яскравостей елементів околу при фільтрації в поточній точці призвело до заглушення імпульсної завади. Якщо імпульсна завада не є точковою, а займає деяку область, то вона також може бути заглушена, якщо розмір цієї локальної області буде меншим, ніж половина розміру апертури МФ. Тому для заглушення імпульсних завад, що вражають локальні ділянки зображення, варто збільшувати розміри апертури МФ.

З (7.51) слідує, що дія МФ полягає в «ігноруванні» як позитивних, так і негативних викидів значень вхідної вибірки. Такий принцип заглушення завад може бути застосований і для ослаблення шуму на зображенні. Однак

дослідження заглушення шуму за допомогою медіанної фільтрації показує, що її ефективність при вирішенні цього завдання нижча, ніж лінійної фільтрації. Медіанна фільтрація краще зберігає межі зображення, ніж будь-яка лінійна фільтрація.

Медіанні фільтри заглушають імпульсні шуми. До таких шумів належить шум типу «сіль і перець», відліки якого мають значення, що відповідають максимальному (“сіль”) і мініимальному (“перець”) рівням квантування в сигналі зображення. Різкі зміни амплітуди зберігаються медіанним фільтром, а імпульсна завада, розмір якої $\leq mn/2$, таким фільтром заглушається. Однак при збільшенні маски фільтра можна втратити інформацію про малорозмірні області зображення та отримати спотворення меж областей, особливо в кутових положеннях.

Оскільки застосування МФ призводить до заглушення високих частот зображення, викликаючи розмивання країв і текстур, все більший розвиток отримують схеми адаптивної фільтрації, які дозволяють змінити імпульсну характеристику фільтра залежно від локального значення сигналу зображення.

Один з алгоритмів **адаптивної медіанної фільтрації (АМФ)** виконується таким способом. У вікні фільтрації оцінюються мінімальне значення сигналу f_{\min} , максимальне значення f_{\max} і медіана f_{med} . Фільтрації піддається тільки той центральний елемент вікна $f(x, y)$, для якого виконується умова (7.52):

а) значення медіани більше мініимального й менше максимального значень у вікні й не виконується умова (7.52);

б) значення сигналу в центрі вікна більше мініимального й менше максимального значень у вікні.

$$\text{а) } A1 = f_{med} - f_{\min}; \quad A2 = f_{med} - f_{\max}; \quad A1 > 0, \quad A2 < 0, \quad (7.52)$$

$$\text{б) } B1 = f(x, y) - f_{\min}; \quad B2 = f(x, y) - f_{\max}; \quad B1 > 0, \quad B2 < 0.$$

Застосування такого фільтра дозволяє видалити біполярну імпульсну заваду, забезпечити згладжування шумів і зменшити заглушення високих частот у зображенні.

Інверсні фільтри в задачах обробки зображень

Інверсна фільтрація (*inverse filtering*) широко застосовується в обробці зображень для розв'язання таких задач, як відновлення зображень, що вражені шумом, усунення розмиття, покращення контрастності. В задачах розпізнавання об'єктів та образів інверсні фільтри використовують як допоміжні засоби для покращення зображення в цілому перед операцією розпізнавання. Задача лінійної інверсної фільтрації полягає в тому, щоб за допомогою даних вимірювань у вигляді матриці елементів зображення $S_{i,j}$ відновити оригінальну матрицю зображення $u_{i,j}$ за умови, що матриці пов'язані деяким оператором з

імпульсною характеристикою $h_{m,n}$ розміром $M \times N$ і присутній адитивний шум $\xi_{m,n}$ з відомою кореляційною характеристикою. Формально задачу можна записати у вигляді рівняння

$$S_{i,j} = \sum_{m,n=0}^{N-1,M-1} h_{m,n} u_{i-m,j-n} + \xi_{i,j}. \quad (7.53)$$

Метод розв'язання рівняння (7.53), що став класичним, дав Н. Вінер. Метод оснований на перетворенні Фур'є. Однак застосування методу має ряд недоліків:

- в більшості прикладних задач неможливо виділити окремо шум та визначити його спектрально-кореляційну характеристику;
- визначення спектральної характеристики оригінального сигналу виконується за допомогою операції ділення, що робить метод чутливим до параметрів шуму та точності визначення імпульсної характеристики;
- для розв'язання рівняння (7.53) потрібно знайти оцінку імпульсної характеристики, що є самостійною непростою задачею.

У зв'язку з означеними проблемами часто використовують більш простий підхід до розв'язання рівняння (7.53), що нехтує складовою шуму. Для знаходження матриці оригінального зображення U використовують метод дискретного перетворення Фур'є (ДПФ). Позначимо оператор ДПФ як $\Phi(\cdot)$, обернений $\Phi^{-1}(\cdot)$, матрицю даних зображення як S . Тоді

$$U = \Phi^{-1} \left((f + W\Phi(S))^{-1} \right)$$

де W – функція спектрального вікна, $|f| \ll 1$ – функція регуляризації.

Слід відзначити, що розмір імпульсної характеристики, як правило, рівний розміру зображень, тому перетворення ДПФ виконують з використанням всієї множини елементів матриць зображень. Це є причиною того, що метод інверсної фільтрації не застосовують до розв'язання задач розпізнавання об'єктів та аналізу динамічних текстур як основний засіб фільтрації ознак.

Розглянемо задачу інверсної фільтрації з точки зору ідентифікації динамічних систем і сформулюємо її у формі, що дозволить виконувати фільтрацію ознак динамічних текстур.

Нехай задана двовимірна функція Хевісайда

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & (i \geq 0^+) \wedge (j \geq 0^+); \\ 0,5, & i = 0, j = 0; \\ 0, & (i \leq 0^-), (j \leq 0^-), \end{cases} \quad (7.54)$$

зображення текстурованого фону задано в області $(i \geq 0^+) \wedge (j \geq 0^+)$ і є відгуком лінійної динамічної системи на збудження вигляду (7.54), його можна подати як

$$u_{i,j} = \sum_{m,n=0}^{P,Q} h_{m,n} e_{i-m,j-n} + \xi_{i,j}, \quad (7.55)$$

де $h_{m,n}$ – перехідна характеристики системи розміром $(P+1) \times (Q+1)$, що значно менший розміру зображення. Поставимо задачу відтворення за допомогою інверсного фільтра з перехідною характеристикою $\tilde{h}_{m,n}$ сигналу збудження в (2.22), що є постійною величиною в межах зображення. Тоді

$$\sum_{m,n=0}^{P,Q} \tilde{h}_{m,n} u_{i-m,j-n} = E + \zeta_{i,j}, \quad (7.56)$$

де E – константа, $\zeta_{i,j}$ – відліки шуму, що пов'язані з наближеним характером інверсного фільтра щодо сигналу фону.

7.5.4 Методи на основі динамічних моделей

Для аналізу зображень використовують двовимірні дискретні лінійні та нелінійні моделі, що описують динаміку поверхні зображення у просторі. В найбільш загальній формі лінійну модель описують системою рівнянь виду

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bv(t), & v(t) \approx N(0, Q); & x(0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) + w(t), & w(t) \approx N(0, R) \end{cases}, \quad (7.57)$$

де $y(t)$ – вектор зображення, $x(t)$ – вектор стану динамічної моделі, A – матриця-оператор моделі має таку структуру

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_M & -a_{M-1} & -a_1 \end{bmatrix},$$

де M – порядок моделі, a_i – параметри оператора моделі, B – матриця фільтра ковзного середнього, C – матриця функціонального перетворення при вимірюванні значень елементів зображення, $v(t)$, $w(t)$ – вектори гауссового центрованого шуму з кореляційними функціями Q та R , x_0 – вектор початкових або граничних значень.

Для моделювання текстур використовують модель (7.57) із спрощеною характеристикою векторів шуму, допускаючи, що відліки шуму не корелюють, тоді $Q(t) = R(t) = \sigma^2 \delta(t)$, де σ^2 – дисперсія гауссового шуму, $\delta(t)$ – дельта-функція. В цьому випадку модель (7.57) можна подати як авторегресію із

ковзним середнім (*AutoRegression and Moving Average* – ARMA), дана модель має вигляд

$$u_{i,j} = - \sum_{m,n=0(m,n \neq 0)}^{P,Q} a_{m,n} u_{i-m,j-n} - \sum_{m,n=0}^{L,M} b_{m,n} w_{i-m,j-n}, \quad (7.58)$$

де $u_{i,j}$ – відліки сигналу зображення, $a_{m,n}$ – коефіцієнти лінійного передбачення (ЛП), $w_{i,j}$ – відліки білого шуму, P, Q – параметри, що задають порядок моделі умовно по координатах OX, OY , $b_{m,n}, L, M$ – коефіцієнти та порядок складової ковзного середнього.

Модель (7.58) охоплює дві складові – модель авторегресії (AR) (*autoregression* – AR), що описує динамічні властивості сигналу зображення, та модель ковзного середнього (*moving average* – MA), що описує властивості сигналу похибки. Для розв'язання задач розпізнавання та класифікації використовуємо саме авторегресійну складову, модель MA похибки використовують як допоміжну, що характеризує якість моделі AR. Тому більш широке застосування в обробці зображень знайшла модель AR

$$u_{i,j} = - \sum_{m,n=0(m,n \neq 0)}^{P,Q} a_{m,n} u_{i-m,j-n} + \varepsilon_{i,j}, \quad (7.59)$$

де $\varepsilon_{i,j}$ – відліки похибки з дисперсією σ^2 .

Параметри моделі (7.59) – коефіцієнти ЛП – можна знайти за допомогою методу найменших квадратів. Одною з найбільш важливих задач при синтезі моделі AR є вибір її порядку таким чином, щоб модель була адекватна даним і, разом з тим, не була чутливою до незначних флуктуацій. Критерієм адекватності моделі може служити відношення потужності сигналу зображення до величини похибки (шуму). В літературі це визначають терміном Signal to Noise Ratio (SNR):

$$SNR = 20 \log_{10} \frac{P(u)}{\sigma_{\varepsilon}^2},$$

де $P(u)$ – потужність сигналу базового фрагмента зображення, що використано для визначення параметрів моделі, σ_{ε}^2 – дисперсія шуму похибки.

Нечутливість моделі до незначних флуктуацій зображення досягається за допомогою умови інваріантності параметрів моделі до зсуву базового фрагмента відносно координат, в яких задано зображення. Це також важлива властивість моделі і їй приділяють особливу увагу в літературі з обробки зображень. Вона стосується всіх перелічених вище моделей. Для того, щоб модель була інваріантною до зсуву координат і разом з тим була адекватною даним, вона

повинна виконувати функції апроксимації та екстраполяції даних сигналу зображення.

У випадках, коли модель AR неадекватна динаміці даних, використовують дискретну нелінійну модель у вигляді ряду Вольтера. Оскільки така модель в разі двовимірних даних потребує значного числа параметрів, то на практиці застосування знайшли моделі не вище третього порядку нелінійності. Нелінійну модель другого порядку можна подати як

$$u = - \sum_{m,n=0}^{P,Q} a_{m,n} u_{i-m,j-n} - \sum_{k,l=0}^{L,M} \sum_{m,n=0}^{L,M} b_{k,l,m,n} u_{i-k,j-l} u_{i-m,j-n} + \varepsilon_{i,j}, \quad (7.60)$$

де $b_{m,n}, l, m, L, M$ – коефіцієнти та порядок нелінійної складової. Визначити параметри моделі (7.60) можна за допомогою розширеної системи рівнянь, що охоплює квадратичні складові сигналу. Розв'язати таку систему рівнянь можна за допомогою методу найменших квадратів. Тому нелінійна модель простіша, ніж модель ARMA.

Алгоритм обробки зображення за допомогою моделей такихй:

- 1) за допомогою базового фрагмента зображення визначають параметри моделі та параметри, що характеризують якість моделі (наприклад, статистичні параметри шуму похибки);
- 2) сигнал зображення обробляють за допомогою моделі і визначають параметри якості;
- 3) якщо параметри якості відповідають параметрам базового фрагмента, то зображення розпізнано, якщо ні, то зображення не розпізнано.

7.5.5 Методи на основі декомпозиції на власні вектори

В попередніх пунктах розглянуто методи на основі статистичного аналізу зображення в просторовій або спектральній областях та методи на основі синтезу динамічних моделей, що відображають зміну зображення в просторі або часі. Спектральний аналіз і динамічні моделі можуть бути поєднані за допомогою визначення власних значень та власних функцій моделей. Перевагою такого підходу є те, що зображення може характеризуватись мінімальним числом параметрів, наприклад резонансних частот. Причому, відбираються тільки ті резонансні частоти, амплітуда яких найбільша. Відомо декілька підходів до реалізації декомпозиції на власні вектори:

- 1) синтез фільтрів на основі власних векторів зображення або його кореляційної матриці;
- 2) відбір принципівих (найвпливовіших) компонент розкладання на власні або сингулярні вектори – Principal Component Analysis (PCA);
- 3) модальний аналіз – Empirical mode decomposition (EMD).

Метод PCA реалізують за допомогою сингулярного розкладання (Singular Value Decomposition – SVD). Перевагою SVD є те, що сингулярне розкладання реального сигналу дає систему ортогональних векторів, також реальних. Ортогональність та те, що дані реальні, спрощує алгебраїчні операції з матрицями.

Аналіз за допомогою розкладання за власними та сингулярними векторами застосовують до сигналу зображення або його кореляційної матриці. Одним з різновидів кореляційної характеристики зображень є розподіл Вігнера.

Недоліком аналізу зображень за допомогою власних і сингулярних векторів є те, що для обчислення векторів потрібні значні обчислювальні ресурси. Більш простим є модальний аналіз. Емпіричні моди визначають за допомогою виділення локальних максимумів і мінімумів сигналу зображення та їх апроксимації поверхнею у вигляді полінома або за допомогою спеціальних функцій. Отримана мода вилучається із зображення і за допомогою сигналу остачі таким же способом визначають наступну моду. Такий ітераційний процес повторюють поки сигнал залишку не стане меншим певного граничного значення. В результаті зображення є сумою модальних сигналів та незначного залишку. Моди використовують як характерні ознаки зображення у вигляді масок для класифікації стаціонарних текстур та як кореляційні фільтри для класифікації динамічних текстур.

Алгоритм аналізу зображень за допомогою власних векторів залежить від того, як вони використовуються – як фільтри чи як базис для спектрального аналізу.

7.5.6 Методи класифікації елементів зображень

Оскільки задачі розпізнавання об'єктів полягають у класифікації зображень на основі певних критеріїв, то важливим етапом є вибір оптимального класифікатора. Серед існуючих методів класифікації можна виділити:

- ймовірнісний критерій якості класифікації;
- оптимальна стратегія статистичної класифікації;
- класифікатор Байєса;
- мінімаксий класифікатор;
- класифікатор Неймана-Пірсона.

Класифікатор Байєса є найбільш широкорозповсюдженим з перелічених класифікаторів і застосовується при наявності повної апріорної інформації про класи, тобто коли відомі функція правдоподібності для кожного з класів, матриця штрафів, апріорні ймовірності для кожного з класів. Класифікатор Байєса ґрунтується на основі принципу максимуму апостеріорної ймовірності, що базується на трьох гіпотезах.

1. Множина $X \times Y$ є ймовірнісним простором з ймовірнісною мірою P . Прецеденти $(x_1, y_1), \dots, (x_i, y_i)$ з'являються випадково і незалежно відповідно до розподілу p .

2. Відомі щільності розподілу класів $p_y(x) = p(x | K_y), y \in Y$, що називаються функціями правдоподібності.

3. Відомі ймовірності появи об'єктів кожного з класів $P_y = P(K_y), y \in Y$, що називаються апіорними ймовірностями.

Базуючись на даних гіпотезах, принцип максимуму апостеріорної ймовірності записується у вигляді:

$$F(x) = \arg \max_{y \in Y} P(K_y | x) = \arg \max_{y \in Y} p_y(x) P_y.$$

Доведено, що такий вибір вирішального правила є оптимальним з погляду мінімізації загального ризику. Основна проблема полягає в тому, що на практиці гіпотези 2 і 3 майже ніколи не виконуються. Спроби оцінити ці функції розподілу за навчальною вибіркою могли б привести до деякого результату, якби не погана обумовленість задачі, що приводить до вироджених рішень.

Існують системи виявлення об'єктів зображення, що базуються на "наївному" байєсовому методі. Даний метод ґрунтується на побудові емпіричної щільності розподілу ймовірностей класів за навчальною вибіркою за припущення про незалежність компонентів вектора ознак.

Практичні результати є наступними:

1. Алгоритм побудови "наївного" байєсового класифікатора схильний до перенавчання;

2. Алгоритм побудови "наївного" байєсового класифікатора чутливий до шуму, тому що базується на емпіричних функціях щільності розподілу;

3. Швидкість роботи самого класифікатора висока, основний час може займати обчислення вектора ознак.

На основі поєднання байєсового підходу і теорії графів утворюють байєсові мережі. Суть даного підходу в тому, що будують граф, кожна вершина якого відповідає якому-небудь компоненту вектора ознак, дуги позначають причинно-наслідковий зв'язок. Побудова мережі може бути здійснена автоматично шляхом аналізу кореляції компонентів вектора ознак.

Проблемою для байєсової мережі є погана обумовленість, тому що велика розмірність вектору ознак робить граф зв'язків складним для побудови й аналізу. Також суттєво зростає обчислювальна складність. Одним з варіантів розв'язання даної проблеми є скорочення розмірності вектора ознак, що приводить до погіршення узагальнювальної здатності.

Класифікація за статистичними ознаками можлива після попередньої обробки зображення за допомогою фільтрів, що дозволяє зменшити варіацію параметрів ознак.

Наряду зі статистичними методами класифікації в обробці зображень використовують *евристичні методи*. Це ряд підходів, що їх можна розділити на групи.

1. Евристичні методи:

- повна евристична модель, де екпертом складається набір правил, що описують зображення об'єкта (будується модель), згідно з якими здійснюється розпізнавання;

- пошук характерних інваріантних ознак, де евристично описуються не зображення шуканого об'єкта в цілому, а його характерні ознаки, інваріантні щодо можливих спотворень (зміна освітленості, поворот, масштабування).

2. Метод порівняння з шаблоном. Складається шаблон для зображення всього об'єкта чи його характерних ознак. Також вводиться функція перевірки відповідності.

3. Методи з навчанням за прецедентами. Модель автоматично будується на основі набору зображень об'єкта, складених заздалегідь з можливих вхідних даних системи.

Евристичні методи є історично найбільш ранніми, вони досить прості в реалізації і працюють з високою швидкістю, однак жорстко запрограмовані правила позбавляють систему гнучкості та стійкості. Як правило, евристичні системи орієнтовані на відносно вузький клас задач.

Метод порівняння з шаблоном є більш універсальним підходом, однак даний метод вимагає наявності дуже точного шаблону об'єкта зображення. Шаблон може бути складною структурою і допускати різні деформації і перетворення, сприяючи, таким чином, інваріантності системи до просторових спотворень об'єкта зображення і змін освітленості. Системи, засновані на порівнянні з шаблоном, найчастіше використовуються для розв'язання задач відстеження об'єктів у відео з ініціалізацією на першому кадрі – до початку роботи системи існує загальна модель шаблону, при ініціалізації вона уточнюється і корегується під час роботи системи. При добре заданому шаблоні досягається висока точність і дуже низький рівень збоїв. Інваріантність до просторових спотворень і зміни освітлення залежить від складності шаблону.

Методи з навчанням за прецедентами є найбільш загальним підходом. Задача розпізнавання об'єктів зображення зводиться до задачі класифікації і для неї застосовується добре розроблений математичний апарат побудови моделі (навчання) за прецедентами. Модель будується автоматично на заздалегідь зібраному наборі прецедентів – зображень, для яких відомо, є вони зображеннями об'єкта чи ні. Спостереженням, у даному випадку, є деякий “вектор ознак”, отриманий з вихідного зображення за допомогою перетворення, що відображає зображення в просторі дійсних векторів. Гіпотеза, що підлягає перевірці, – належність зображення до класу зображень шуканого об'єкта. Таким чином, система розпадається на два модулі – модуль перетворення зображення у вектор ознак і модуль класифікації. Задачею модуля перетворення є найбільш повне й інформативне подання зображення у вигляді числового вектору.

Задачею модуля класифікації є перевірка гіпотези належності зображення класу зображень об'єкта на підставі спостереження, яким є вектор ознак. Серед евристичних найбільш поширені методи:

- опорних векторів (*SVM, supporting vectors method*);
- *Sparse network of Winnows (SNoW)*;
- посилення слабких класифікаторів (*classifier boosting*).

Метод SVM полягає в побудові оптимального лінійного класифікатора. Класичний алгоритм полягає в побудові лінійної поверхні (гіперплощини), яка рівновіддалена від опуклих оболонок класів, опукла оболонка будується за прецедентами. Стверджується, що така гіперплощина буде оптимальною, з погляду загального ризику, щодо будь-яких інших можливих гіперплощин. Якщо такої гіперплощини не існує (класи лінійно нероздільні), то для здійснення нелінійної класифікації застосовується ядрове перетворення, що проектує вихідний простір у простір ще більшої, можливо нескінченної, розмірності.

Метод опорних векторів був успішно застосований для задачі розпізнавання об'єктів зображення. Метод характеризується:

- висока стійкість до перенавчання;
- чутливість до шуму може регулюватися за рахунок зменшення точності;
- в системах розпізнавання об'єктів дає прискорення в декілька разів у порівнянні з нейронними мережами.

SNoW – особливий вид нейронної мережі. Вектор ознак бінарний. Мережа складається з двох (за числом можливих класів) лінійних нейронів, зв'язаних з компонентами вектора ознак. Класифікація проходить за принципом «переможець забирає все». Метод SNoW вважається досить ефективним методом для розв'язання задач виявлення об'єктів зображення. Відповідно до деяких досліджень SNoW перевершує за своїми параметрами метод опорних векторів.

Classifier boosting – це підхід до розв'язання задачі класифікації шляхом комбінування примітивних класифікаторів в один більш сильний класифікатор. Основна ідея методу полягає в ітеративній мінімізації опуклого функціонала помилки класифікації шляхом додавання в набір класифікаторів чергового слабкого класифікатора. Для систем розпізнавання об'єктів зображення був застосований каскадний підхід, який полягає в побудові каскаду із комплексу слабких класифікаторів, що працює за принципом послідовних наближень. Характеристики каскадного методу перевершують всі інші системи.

За показниками роботи в реальних системах розпізнавання об'єктів зображення найбільш вдалими виявилися алгоритми *boosting* (посилення слабких класифікаторів) і SNoW. Обидва підходи забезпечують високу швидкість, високий рівень розпізнавання і низький рівень похибок другого роду. Метод опорних векторів досить сильно поступається за показниками перерахованим вище підходам, тому що має дуже низький відсоток достовірних виявлень.

7.5.7 Фрактальні методи

У той час як об'єкти, побудовані людиною, такі як промислові та житлові будинки, можуть бути ефективно описані набором простих геометричних примітивів: кубів, сфер, циліндрів, конусів, кольорові текстур природного походження, через свою нерегулярність і фрагментарність, погано піддаються такому опису. У зв'язку з цим, для аналізу таких текстур виявляється природним подання їх у вигляді фрактала з деяким розміром D .

Фрактал (лат. *fractus, fractal* – дроблений) – термін, який ввів Бенуа Мандельброт в 1975 році для позначення нерегулярних самоподібних множин.

Фрактал – це нескінченно самоподібна геометрична фігура, кожний фрагмент якої повторюється при зменшенні масштабу. Масштабна інваріантність, що спостерігається у фракталах, може бути або точною, або наближеною.

Ще один варіант визначення: **фрактал** – самоподібна множина нецілої розмірності. Самоподібна множина – множина, що подається у вигляді об'єднання однакових непересічних підмножин подібних до вихідної множини.

Основні властивості фракталів.

- Вони мають тонку структуру, тобто містять довільно малі масштаби.
- Вони занадто нерегулярні, щоб бути описаними традиційною геометричною мовою.
- Вони мають деяку форму самоподоби, допускаючи наближену.
- Вони мають дробову «фрактальну» розмірність, що її також називають розмірністю Мінковського.

У наш час фрактали знайшли своє застосування при аналізі текстур ландшафтів, отриманих при аерокосмічній зйомці, при аналізі поверхонь порошків та інших пористих середовищ, при аналізі поверхні хмар тощо. Однак розмір фрактала кольорової текстури багато в чому залежить від вибору методу оцінювання. Так, при використанні різних методів оцінювання розміру фрактала ми одержимо відповідно й різні його розміри. Зіставлення текстур, таким чином, можливо при використанні того самого методу (групи методів). Більше того, не всі текстури добре розрізняються за розміром фрактала. У зв'язку з цим перш, ніж вносити в систему ознак розмір фрактала, необхідно оцінити фрактальність текстури. Оцінювання фрактальності текстури здійснюється на основі обраного методу оцінювання розміру фрактала. Оскільки розмір фрактала обчислюється через оцінку вибіркової регресії, то природно оцінювати фрактальність текстури за коефіцієнтом кореляції між логарифмом випадкової величини й логарифмом заданої функції кроку. При цьому ухвалення рішення про фрактальність текстури можна будувати таким чином:

1. Побудувати залежність коефіцієнта кореляції від кроку; значення кроку, при якому функція має максимум, є максимальним кроком у заданому діапазоні кроків при оцінюванні розміру фрактала;

2. Не враховувати оцінку розміру фрактала при низькому коефіцієнті кореляції в тих методах, де використовується оцінка фрактала як середнє значення в серії експериментів;

3. Не вносити розмір фрактала в систему ознак для сегментації текстур при значеннях коефіцієнта кореляції $< 0,7$.

Оцінка фрактальності текстур є важливою характеристикою при сегментації за розміром фрактала.

Поширення фрактального опису пояснюється тим, що більшість просторових систем у природі є нерегулярним і фрагментарним, форма цих систем погано піддається опису апаратом евклідової геометрії. Наприклад, берегова лінія острова не пряма й не кругла, і ніяка інша класична крива не може служити для опису й пояснення її форми без надмірної штучності й ускладнення.

Фрактальні структури є одним із різновидів текстур, де деталізація зображення досягається поданням об'єкта подібними меншої величини. Деякі динамічні текстур, наприклад поверхні лісу і хвиль води, хмари, пористі мінерали, метало-структури, можуть бути подані за допомогою фрактальної екстраполяції. Суть фрактальних методів в задачах розпізнавання об'єктів викладена нижче. Обриси штучних об'єктів (танків, автомобілів, тощо) створюються лініями, що описуються рівняннями цілого порядку. Природні об'єкти – рельєф, дерева – фрактальні, тобто мають фрактальну розмірність. Використовуючи цю властивість за допомогою фрактальної апроксимації об'єктів зображення можна створити систему розпізнавання образів. Така система не бачить куц, але добре розпізнає штучний об'єкт, схований за кущем. Основною перевагою даного методу над іншими є те, що він не чутливий до завад. На результат розпізнавання не впливає колір та контрастність об'єкта відносно фону, впливає лише площа, яку займає шуканий об'єкт на зображенні. В цьому полягає недолік даного методу – за допомогою фрактального аналізу можна розпізнавати об'єкти, що за розміром порівнянні зі структурою елементів фону.

Класифікації фракталів

В основному фрактали ділять на геометричні (рис. 7.25), алгебраїчні й стохастичні. Однак існують і інші класифікації: рукотворні й природні. До рукотворних належать ті фрактали, які були винайдені вченими, вони при будь-якому масштабі мають фрактальні властивості. На природні фрактали накладається обмеження на максимальний і мінімальний розміри, при яких у об'єкта спостерігаються фрактальні властивості.

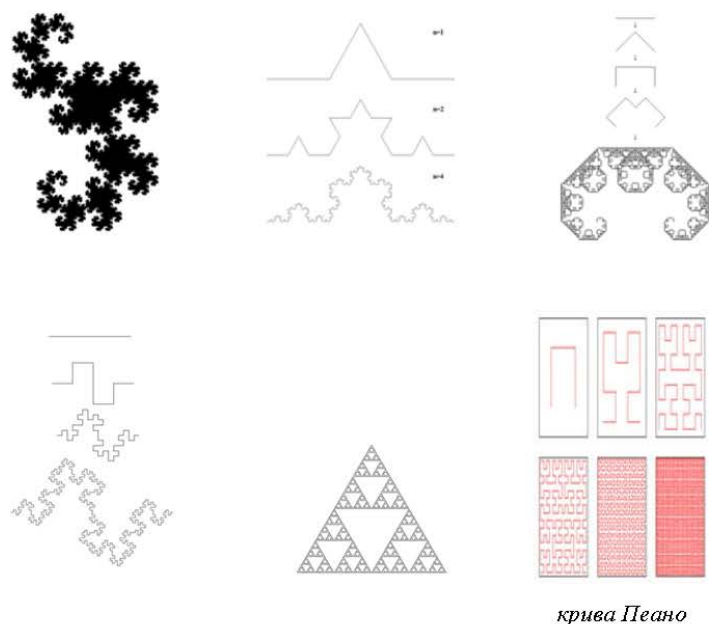


Рисунок 7.25 – Приклади геометричних фракталів

Для побудови алгебраїчних фракталів (рис. 7.26) використовуються ітерації нелінійних відображень, що задаються простими алгебраїчними формулами. Найбільш вивчений двовимірний випадок. Нелінійні динамічні системи можуть мати декілька стійких станів. Кожний стійкий стан (атрактор) має деяку ділянку початкових станів, при яких система обов'язково в нього перейде. Таким чином, фазовий простір розбивається на ділянку притягання атракторів.

Якщо фазовим є двовимірний простір, то, зафарбовуючи ділянки притягання різними кольорами, можна одержати кольоровий фазовий портрет цієї системи (ітераційного процесу). Змінюючи алгоритм вибору кольору, можна одержати складні фрактальні картини з вигадливими багатобарвними візерунками. Несподіванкою для математиків стала можливість за допомогою примітивних алгоритмів породжувати дуже складні нетривіальні структури. Приклади алгебраїчних фракталів: множина Мандельброта, множина Жюліа, басейни Ньютона, біоморфи.

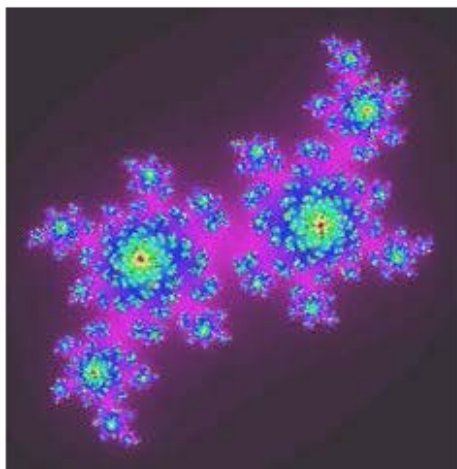


Рисунок 7.26 – Приклад алгебраїчного фрактала. Множина Жюліа

Геометричні фрактали застосовуються для одержання зображень дерев, кущів, берегових ліній тощо. Алгебраїчні та стохастичні – при побудові ландшафтів, поверхні морів, моделей біологічних об'єктів та інше.

З математичної точки зору, фрактал – це, передусім, множина з дробовою розмірністю (fractional dimension). Ми добре уявляємо собі, що точка має розмірність 0, коло та відрізок – розмірність 1, куб та сфера – 2. З одновимірними об'єктами ми пов'язуємо поняття довжини, з двовимірними – площі і т. д. Але як можна уявити собі множину з розмірністю $3/2$. Для цього необхідно дещо проміжне між довжиною та площиною, і якщо довжину умовно назвати 1-мірою, а площу – 2-мірою, то необхідна $(3/2)$ -міра. Хаусдорф визначив таку α -міру для будь-якої $\alpha \geq 0$ і на цій основі кожній множині в евклідовому просторі надав у відповідність число. Для пояснення фрактальної розмірності необхідно ввести поняття топологічної розмірності. Під топологічною розмірністю множини в лінійному просторі розуміють число лінійно незалежних координат в просторі. Фрактальна розмірність множини – розмірність того простору, який повністю заповнюється множиною. Для зв'язку фрактальної та топологічної розмірності використовують показник Херста H , який обчислюється за формулою $H = D - Dt$. Ідеї Хаусдорфа були розвинуті А. С. Безіковичем. В наступні роки розмірність Хаусдорфа-Безіковича отримала застосування в деяких розділах математики, але нічого не передбачувало їй тієї популярності цього поняття за межами математики, яка спостерігається тепер. Частково цьому допомогла наукова діяльність Б. Мандельброта, який в своїх книгах привів яскраві приклади застосування фракталів для пояснення деяких природних явищ. Тобто, фрактальна розмірність, як правило, є невід'ємним нецілим числом, яке показує деяким чином геометричну складність об'єкта.

Розмірність фрактала D визначається як

$$D = \frac{\log N}{\log(1/r)},$$

де $1/r$ – співвідношення подібності, N – число кроків, необхідне для того, щоб покрити криву.

Практично розмір фрактала для кривої оцінюється шляхом вимірювання довжин кривої при різних розмірах кроку (приклад зображено на рис. 7.27).

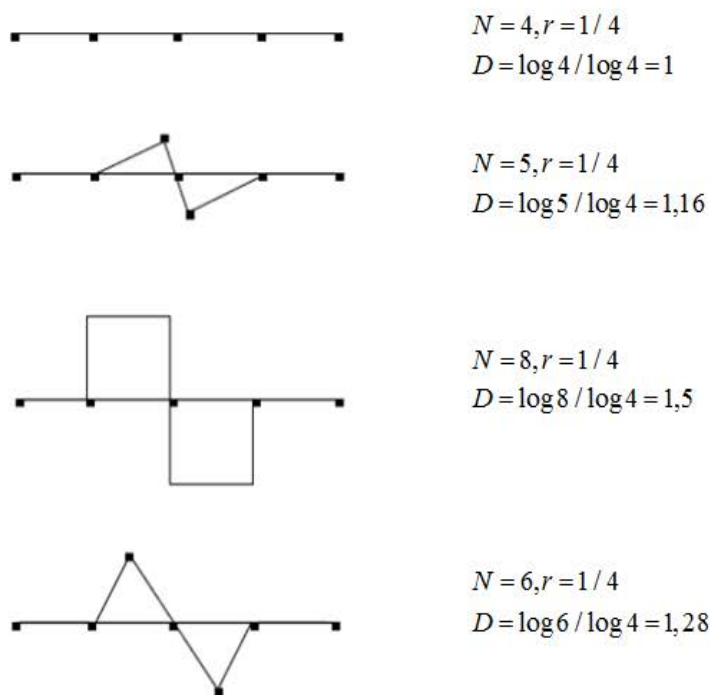


Рисунок 7.27 – Визначення розміру фрактала на прикладі

Розглянемо докладніше реалізацію фрактального підходу до аналізу хмар. В основу цього методу покладено виведене Мандельбротом співвідношення між периметром і площею об'єкта. Для кіл, квадратів, рівносторонніх трикутників та інших багатокутників відношення периметра до квадратного кореня з площі, що ним обмежується, не залежить від розміру фігури і є постійною величиною для даної сім'ї. Аналогічно для сім'ї подібних островів відношення довжини нефрактальної берегової лінії будь-якого острова до квадратного кореня з його площі не залежить від розміру площі. Однак, якщо берегова лінія фрактальна, то її довжина $L(\delta)$ залежить від довжини еталона δ і прямує до нескінченності, якщо еталон також прямує до нуля.

При цьому площа острова $A(\delta)$, обумовлена кількістю квадратів δ^2 , що на ній розташовані, залишається кінцевою. Таким чином, відношення периметра до

квадратного кореня з площі розбігаються. Мандельброт для випадку фрактальної берегової лінії одержав таке співвідношення між периметром і площею:

$$L(\delta) = C\delta^{(1-D)} [A(\delta)]^{D/2}. \quad (7.61)$$

Це співвідношення виконується для будь-якого еталона довжини δ , досить малого, щоб задовільно виміряти найменший з островів.

Співвідношення (7.61) застосовується при дослідженні геометрії хмар і зон дощу, розміри яких знаходяться в широких межах від 1 до $1,2 \times 10^6$. З'ясувалося, що периметр хмари пов'язаний з її площею співвідношенням (7.61) з фрактальним розміром $D = 1,35 \pm 0,05$. При цьому ці оцінки виявилися справедливими як для купчастих, так і для перистих хмар. У роботі А. Вальдфогеля, присвяченій аналізу фрактальної розмірності хмар з потужними конвективними струмами, було встановлене співвідношення між периметром і площею для послідовності моментів часу (з інтервалом в 1 хвилину) у площині перерізу для постійного коефіцієнта відбиття. Основні висновки можуть бути такими: для хмар, периметр яких більше 8 км, розмір фрактала приблизно збігається з розміром менш потужних хмар і становить $1,36 \pm 0,1$; для хмар з периметром від 3 км до 8 км – $D = 1,0 \pm 0,1$ і, нарешті, хмари з периметром менш 3 км не є фракталами.

Мандельброт запропонував не тільки означення фракталів, але також і алгоритм побудови одного з них, що отримав назву на честь ученого. Алгоритм побудови множини Мандельброта заснований на ітеративному обчисленні за формулою:

$$Z[i+1] = Z[i] \cdot Z[i] + C,$$

де Z і C – комплексні змінні.

Ітерації виконуються для кожної стартової точки C прямокутної або квадратної області – підмножини комплексної площини. Ітераційний процес триває доти, поки $Z[i]$ не вийде за межі кола заданого радіуса, центр якого лежить у точці $(0,0)$, або після досить великої кількості ітерацій. Залежно від кількості ітерацій, протягом яких $Z[i]$ залишається всередині кола, встановлюється колір точки C . Якщо $Z[i]$ залишається всередині кола протягом досить великої кількості ітерацій, то ця точка растра зафарбовується в чорний колір. Множині Мандельброта (рис. 7.28) належать саме ті точки, які протягом нескінченного числа ітерацій не переходять у нескінченність.

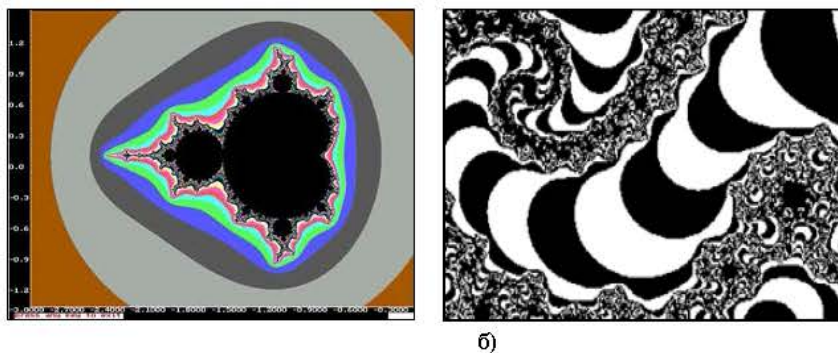


Рисунок 7.28 – а) Множина Мандельброта; б) Збільшена ділянка межі множини Мандельброта

Побудова іншої фрактальної множини, сніжинки Коха (рис. 7.29), починається з правильного трикутника, довжина сторони якого дорівнює 1.

Сторона трикутника вважається базовою ланкою для вихідного положення. Далі, на будь-якому кроці ітерації кожна ланка замінюється на утворювальний елемент – ламану, що складається по краях з відрізків довжиною $1/3$ від довжини ланки, між якими розміщуються дві сторони правильного трикутника зі стороною в $1/3$ довжини ланки. Всі відрізки – сторони отриманої кривої – вважаються базовими ланками для наступної ітерації. Крива, що одержується в результаті n -ї ітерації при будь-якому кінцевому n , називається передфракталом, і лише при n , що наближається до нескінченності, крива Коха стає фракталом. Отримана в результаті ітераційного процесу фрактальна множина є лінією нескінченної довжини, що обмежує кінцеву площу. Дійсно, при кожному кроці число сторін підсумкового багатокутника збільшується в 4 рази, а довжина кожної сторони зменшується тільки в 3 рази, тобто довжина багатокутника на n -ій ітерації дорівнює $3 \cdot (4/3)^n$ і прагне до нескінченності з ростом n .

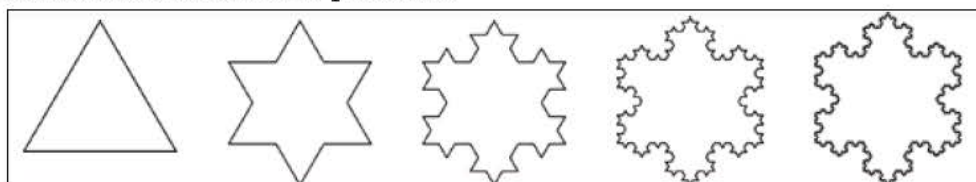


Рисунок 7.29 – Перші 5 поколінь сніжинки Коха

Площа під кривою, якщо прийняти площу утворювального трикутника за 1, дорівнює:

$$S = 1 + \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^k = 1,6.$$

З недавнього часу фрактальні методи почали використовувати при розробці методів розпізнавання образів на радіолокаційних зображеннях. Суть їх така. Важко локалізувати танк, замаскований серед кущів. Важко, навіть коли є якісний сигнал від теле- та телетелевізора. Набагато легше зробити це за допомогою фрактальних методів. Як вже було сказано вище, обриси штучних об'єктів (танків, автомобілів) створені лініями, які описуються рівняннями цілого порядку. А ось об'єкти природні – рельєф, дерева – фрактальні, тобто мають фрактальну розмірність. Ось на цьому принципі і побудовані нові системи розпізнавання образів. Системи розпізнавання не бачать кущ, але дуже добре розпізнають штучний об'єкт, схований за кущем. Маскувальне забарвлення може допомогти, але якщо воно не створене кривими другого порядку, як звичайно.

Іншими словами, якщо ми виміряємо розмірність зображення якогось природного ландшафту, то вона буде дробова. Розмірність геометричної фігури дорівнює приблизно 2 (через похибку вимірювання). А коли накласти, наприклад, прямокутник на природне зображення, то розмірність всієї картинки різко поміняється.

Основною перевагою даного методу над іншими є те, що не потрібно витрачати зусилля і час на покращення якості зображення. Це не дуже впливає на результат. Інша перевага полягає в нижчій вимозі до високої роздільної здатності зображень, порівняно з іншими методами. На результат впливає лише площа, яку займає штучний об'єкт на зображенні, а не контраст, як звичайно.

Самоподібність (self-similarity) є основною характеристикою фрактала і означає, що він більш-менш одноманітно побудований у широкому діапазоні масштабів. Так, при збільшенні маленькі фрагменти фракталу виходять дуже схожими на більші. В ідеальному випадку така самоподібність приводить до того, що фрактальний об'єкт є інваріантним до збільшень.

Звичайно, для реального природного фрактала існує деякий мінімальний масштаб довжини l_{\min} такий, що на відстанях $l \approx l_{\min}$ його основна властивість – самоподібність – пропадає. Крім того, на досить великих масштабах довжин $l > l_{\max}$, де l_{\max} – характерний геометричний розмір об'єктів, ця властивість самоподібності також порушується. Тому властивості природних фракталів розглядаються лише в масштабах l , що задовольняє співвідношення $l_{\min} \leq l \leq l_{\max}$.

Відмітимо, що властивість точної самоподібності характерна лише для регулярних фракталів. Якщо замість детермінованого способу побудови внести в алгоритм їхнього створення деякий елемент випадковості (як це буває, наприклад, у багатьох процесах дифузійного росту кластерів, електричному пробі й т. д.), то виникають так звані випадкові фрактали. Основна їхня відмінність від регулярних полягає в тому, що властивості самоподібності справедливі тільки після відповідного усереднення по всіх статистично незалежних реалізаціях об'єкта. При цьому збільшена частина фрактала не точно

ідентична вихідному фрагменту, однак їхні статистичні характеристики збігаються.

Стиск зображень (image compression)

За допомогою фракталів можна стискувати зображення з деякою втратою якості аналогічно іншим методам стику з втратами. Але фрактальний стиск дає кращі результати. Методи компресії, основані на RLE, класичний алгоритм Хаффмана, LZW не враховують природи стискуваних даних і тому дають незадовільні результати при обробці зображень. Фрактальний стиск зображень – це алгоритм стику зображень з втратами, заснований на застосуванні систем IFS до зображень. Даний алгоритм відомий тим, що в деяких випадках дозволяє одержати дуже високі коефіцієнти стику (кращі приклади – до 1000 разів при прийнятній візуальній якості) для реальних фотографій природних об'єктів, що недоступно для інших алгоритмів стику зображень у принципі.

Основна проблема фрактального стику – це те, що компресія-декомпресія виконуються швидко і однозначно в той час, як пряма процедура потребує від машини великих інтелектуальних можливостей. При компресії можна не зберігати оригінальні розміри зображення, достатньо просто запам'ятати їх відношення. А при декомпресії – задавати ті розміри, які нам найбільше підходять. Така можливість дозволяє вирішити задачу екстраполяції початкового зображення. При встановленні нових розмірів, що перевищують старі, в нове зображення додаються елементи, подібні іншим елементам зображення. І якщо обробляється природний об'єкт (наприклад, гранітний камінь), то заміна не буде помітною.

Основа методу фрактального кодування – це виявлення самоподібних ділянок у зображенні. Патенти ідеї були отримані в 1990-1991 роках.

Суть фрактального стику

В основі більшості методів фрактального кодування, що застосовуються сьогодні, використовуються системи доменних і рангових блоків зображення, блоків квадратної форми, що покривають все зображення. Фрактальне кодування напівтонових зображень ґрунтується на гіпотезі, згідно з якою в будь-якому зображенні можна знайти локальну самоподібність різних його частин. Існуючі алгоритми фрактального стику, як правило, притримуються такої схеми кодування. Зображення, яке кодується, розбивається на множини блоків, що не перекриваються (рангові області), для кожного з яких, в межах цього ж зображення, відшукується блок більшого розміру (домен), пікселі якого, шляхом деякого перетворення, переводились би в пікселі рангової області. При цьому для пошуку оптимальної відповідності рангових областей і доменів необхідний повний перебір варіантів, що веде за собою значні обчислювальні затрати. З перетворень, що переводять домени в рангові області, формується відображення, що переводить зображення в зображення. При цьому кодом зображення буде місце розташування і розміри рангових областей, а також

коефіцієнти перетворень, які описують самоподібність всередині зображення. Кількість бітів, необхідних для опису коду, буде значно меншою кількості бітів, необхідних для опису початкового зображення. *Коефіцієнтом стиску* називається відношення бітового подання зображення до бітового подання коду. В відомих фрактальних методах стиску зображень значення цього коефіцієнта може досягати 100 при достатньо непоганій якості відновлення. Для відновлення закодованого таким чином зображення використовується принцип стиснених відображень, який говорить, що стискувальне відображення, що діє в повному метричному просторі, має єдину нерухому точку. Відображення, що діє на повному метричному просторі зображень, формується з перетворень, які переводять домени в рангові області.

Відповідно до даного методу зображення розбивається на безліч неперекривних рангових підзображень і визначається безліч перекривних доменних підзображень. Для кожного рангового блока алгоритм кодування знаходить найбільш придатний доменний блок і афінне перетворення, що переводить цей доменний блок у даний ранговий блок. Структура зображення відображається в систему рангових блоків, доменних блоків і перетворень.

Основна складність фрактального стиску полягає в тому, що для знаходження відповідних доменних блоків, загалом кажучи, потрібен повний перебір. Оскільки при цьому переборі щораз повинні порівнюватися два масиви, дана операція виходить досить тривалою. Порівняно простим перетворенням її можна звести до операції скалярного добутку двох масивів, однак навіть скалярний добуток обчислюється порівняно тривалий час.

Крім стиску, іншою сферою фрактальної обробки зображень є їх генерація. В наш час існує множина найрізноманітніших пакетів прикладних програм (від простих, які створюють зображення на основі множини Мандельброта (Fractal SSE), до складних, які генерують зображення 3d, анімаційні зображення та IFS-зображення). Всі вони побудовані на основі відкриття Мандельброта: якщо нанести визначені точки на площину комплексних чисел, то можна створювати зображення надзвичайного абстрактного вигляду – множина Мандельброта. В рівняння Мандельброта підставляються координати деякої точки комплексної площини, і результатом є координати іншої точки. Результат, отриманий при введенні координат першої точки, слугує початком для наступної ітерації, її результат підставляється в наступне рівняння і так далі. Обидві ці найголовніші сфери застосування фрактальних методів в наш час знаходяться на порівняно високому рівні розвитку, незважаючи на те, що фрактальна наука досить молода. Існує надзвичайно велика кількість програм, за допомогою яких можна створити або стиснути зображення, і ефективність обробки зображень деяких з цих програм достатньо висока.

Потенційним, хоч і менш відомим видом фракталів, є фрактал на основі **системи ітераційних функцій (Iterated Function System – IFS)**. Метод IFS, який застосовується до побудови фрактальних зображень, винайшов Майкл

Барнслі. Він базується на самоподібності елементів зображення і полягає в моделюванні рисунка декількома меншими частинами його самого. Найвідомішим IFS-зображенням є чорний папоротник, в якому кожен лист в дійсності є мініатюрним варіантом самого папоротника .

Система IFS – це також сукупність стискальних афінних перетворень. Як відомо, афінні перетворення містять у собі масштабування, поворот і паралельний перенос. Афінне перетворення вважається стискальним, якщо коефіцієнт масштабування менше одиниці.

Розглянемо докладніше побудову кривої Коха з використанням афінних перетворень. Кожний новий елемент кривої містить чотири ланки, отримані з утворювального елемента з використанням масштабування, повороту й переносу.

1. Для одержання першої ланки досить стиснути вихідний відрізок у три рази. Слід зазначити, що те ж масштабування застосовується до всіх ланок.

2. Наступна ланка будується з використанням всіх можливих перетворень, а саме: стиск у три рази, поворот на 60 градусів і паралельний перенос на $1/3$ по осі X.

3. Третя ланка будується аналогічно другій: стиск у три рази, поворот на 60 градусів, паралельний перенос на $2/3$ вздовж осі X.

4. Остання ланка: стиск у три рази, паралельний перенос на $2/3$ вздовж осі X.

Для синтезу фрактала вибирається початкова точка, до якої застосовується випадковим образом обране з IFS перетворення, у результаті чого точка переміщується в інший кінець екрана. Ця операція повторюється багато разів (досить 100 ітерацій), і через деякий час точка починає блукати атрактором (безліч всіх можливих траєкторій), що і буде являти собою зображення фрактала. Кожне нове положення точки зафарбовується кольором, відмінним від фону. Існує теорема, яка доводить, що отриманий атрактор буде замкнутим. Для того, щоб така точка зафарбовувала нові пікселі, а не блукала старими, використовують сьомий параметр, що являє собою ймовірність появи конкретного афінного перетворення з набору перетворень IFS. Якщо вибрати початкову точку так, щоб вона відразу виявилася на атракторі, то вона починає блукати в області цього атрактора, не переміщуючись в інші області екрана. Розглядаючи кожне перетворення окремо, можемо помітити, що де б ми не починали, після декількох ітерацій точка перестане рухатися екраном. Точка зупинки називається нерухомою точкою – це розв'язок системи лінійних рівнянь двох змінних, який знаходиться методом простої ітерації. Нерухомі точки кожного перетворення входять до складу атрактора. Тому за початкову точку при побудові фрактала можна взяти нерухому точку першого перетворення з набору IFS.

Розмірність. Види розмірності

Ключовою величиною, що описує фрактал, кількісно є “фрактальна розмірність”, однак у різних джерелах під цим терміном розуміють різні величини: розмірність Мінковського, розмірність Хаусдорфа-Безиковича, розмірність самоподібності. Ці величини відрізняються алгоритмом обчислення, але для математичних фракталів є еквівалентними.

При визначенні евклідової або вкладеної розмірності D_E (*embedding dimension*) об'єкти розглядаються, як набори точок, поміщених в простір. Іншими словами, D_E – розмірність простору, що містить об'єкт.

Топологічна розмірність D_T – це ціла величина, що характеризує топологічний об'єкт: для лінії $D_T = 1$, для площини – 2, для поверхні – 3. D_T гомеоморфна, тобто є інваріантом відносно лінійних перетворень.

Розмірність Хаусдорфа-Безиковича D_H – це міра розбиття об'єкта E на частини розміром r з наступним підрахунком числа $N(r)$ частин, що покривають досліджуваний об'єкт.

Розмірність D_H інваріантна щодо лінійних перетворень і для її кількісного оцінювання використовується величина, яка називається метричним порядком:

$$k(E) = -\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln N(r)}{\ln r},$$

$k(E)$ пов'язана з розмірністю Хаусдорфа-Безиковича співвідношенням:

$$D_H > k(E).$$

Розмірність самоподібності D_s характеризує регулярні фрактали (крива Коха, трикутник Серпінського й т. д.) і є для них оцінкою розмірності Хаусдорфа-Безиковича. Значення D_s обчислюється точно, тому що можна чітко виділити компоненти подібності й визначити їх масштабний коефіцієнт. Для обчислення D_s використовується співвідношення:

$$N = r^{D_s},$$

де N – число компонентів подібності, r – масштабний коефіцієнт.

Таким чином, розмірність самоподібності характеризується співвідношенням:

$$D_s = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln N(r)}{\ln(r)}.$$

Фракталом в широкому сенсі називається множина, у якої розмірність Хаусдорфа-Безиковича D_H не збігається з його топологічною розмірністю D_T .

7.5.8 Вейвлет-перетворення

Вейвлет-перетворення (wavelet transformation) – це сучасний і перспективний метод обробки даних. Англійське слово wavelet (від французького “ondelette”) дослівно перекладається як “коротка (маленька) хвиля”. Апарат вейвлет-аналізу одержав свій розвиток на початку 1980-х років у роботах Морле, Гроссмана й деяких інших авторів. Результати, отримані у різних галузях за допомогою вейвлет-аналізу, підсилили інтерес до цього напрямку та сприяють його безупинному розвитку.

Методи вейвлет-аналізу можна застосувати до даних різної природи. Це можуть бути, наприклад, одновимірні функції або двовимірні зображення. Грубу класифікацію вейвлет-алгоритмів можна зробити, виділивши неперервне (CWT – *Continuous Wavelet Transform*) і дискретне (DWT – *Discrete Wavelet Transform*) вейвлет-перетворення. Одержати набір вейвлет-коефіцієнтів у випадку дискретного перетворення швидше, і воно дає досить точне подання сигналу при меншому обсязі одержуваних у результаті даних. Неперервне перетворення вимагає більших обчислювальних витрат, але, разом із цим, дозволяє детальніше роздивитися структуру сигналу.

На відміну від звичайних спектральних перетворень, вейвлет-аналіз дозволяє з однаковою точністю апроксимувати як гладкі функції, так і функції з різкими випадками, що дає можливість визначати незначні об’єкти. Застосування вейвлетів розглянуто в багатьох роботах. Оскільки вейвлет-перетворення являє собою згортання сигналу зображення з вейвлет-функцією, що зміщується відносно координат, даний метод близький за змістом до методів на основі фільтрації.

Вибір того чи іншого методу залежить від поставленого завдання й типу наявних даних, які необхідно обробити, від можливостей обчислювальної техніки і від того, у якому вигляді необхідно подати результат.

Термін вейвлет-перетворення (ВП) об’єднує два види перетворень – пряме і обернене, які, відповідно, переводять досліджувану функцію $f(x)$ в набір вейвлет-коефіцієнтів $W_\psi(a,b)f$ і назад. Розділяють неперервне та дискретне перетворення.

Пряме вейвлет-перетворення здійснюється відповідно до правила

$$W_\psi(a,b)f = \frac{1}{\sqrt{C_\psi}} \int \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) f(x) dx, \quad (7.62)$$

де a і b – параметри, що визначають, відповідно, масштаб і зсув функції ψ , яка називається аналізуювальним вейвлетом, C_ψ – нормувальний множник. Інтегрування ведуть по всій числовій осі.

Базисний, або материнський вейвлет (*parent wavelet*) ψ створює за допомогою розтягнень та зсувів сім'ю $\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$.

Маючи відомий набір коефіцієнтів $W_\psi(a,b)f$, можна відновити первинний вигляд функції $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{C_\psi}} \iint \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) [W_\psi(a,b)f] \frac{dadb}{a^2}. \quad (7.63)$$

Пряме (7.62) і обернене (7.63) перетворення залежать від деякої функції $\psi(x) \in L^2(\mathbb{R})$, яку називають базисним вейвлетом. Практично єдиним обмеженням на його вибір є умова скінченності нормувального множника

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\Psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = 2 \int_0^{\infty} \frac{|\hat{\Psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty, \quad (7.64)$$

де $\hat{\Psi}(\omega)$ – Фур'є-образ вейвлета $\psi(x)$: $\hat{\Psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-i\omega x} dx$.

Безліч функцій задовольняють дану умову, тому можна підібрати вигляд вейвлета, який найбільш підходить для рішення конкретного завдання.

Умова (7.64) означає, що Фур'є-образ вейвлета дорівнює нулю при нульовій частоті, тобто $\hat{\Psi}(\omega)|_{\omega=0} = 0$. Якщо це не так, то знаменник в інтегралі (7.64) прямує до нуля, у той час як чисельник має відмінне від нуля значення, і коефіцієнт C_ψ перестає бути кінцевим.

У свою чергу, цю вимогу можна подати в іншому вигляді. Оскільки Фур'є-образ $\hat{\Psi}(\omega)$ при нульовій частоті має вигляд $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx$, ми можемо вимагати рівність нулю інтеграла від вейвлета по всій осі:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0. \quad (7.65)$$

Головні ознаки вейвлета

Як базисні функції, що утворюють ортогональний базис, можна використовувати широкий набір вейвлетів. Для практичного застосування

важливо знати ознаки, які неодмінно повинна мати вихідна функція, щоб стати вейвлетом. Наведемо основні з них.

Обмеженість. Квадрат норми функції повинен бути скінченним:

$$\|\psi\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx < \infty.$$

Локалізація. ВП, на відміну від перетворення Фур'є, використовує локалізовану вихідну функцію і у часі, і за частотою. Для цього досить, щоб виконувалися умови:

$$|\psi(x)| \leq C(1+|t|)^{1-\varepsilon} \quad \text{і} \quad |S_\psi(\omega)| \leq C(1+|\omega|)^{-1-\varepsilon}, \quad \text{при } \varepsilon > 0.$$

Нульове середнє. Графік вихідної функції повинен бути знакозмінним в околі нуля на осі часу і мати нульову площу

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0.$$

Рівність нулю площі функції $\psi(t)$, тобто нульового моменту, призводить до того, що Фур'є-перетворення $S_\psi(\omega)$ цієї функції дорівнює нулю при $\omega = 0$ і має вигляд смугового фільтра.

Автомодальність. Характерною ознакою ВП є його самоподібність. Всі вейвлети конкретної сім'ї $\psi_{ab}(t)$ мають те ж число осциляцій, що й материнський вейвлет $\psi(t)$, оскільки отримані з нього за допомогою масштабних перетворень (a) і зсува (b).

Приклади материнських вейвлетів

Основні функції, які створюють вейвлети, так звані материнські вейвлети, наведені в табл. 7.10.

Найбільш поширені базиси створюються на основі похідних функції Гаусса ($g_0(t) = \exp(-t^2/2)$). Це обумовлено тим, що функція Гаусса має найкращі показники локалізації як у часовій, так і в частотній областях.

На рис. 7.30 показані вейвлети перших чотирьох порядків і модулі їх спектральної щільності. При $n = 1$ одержуємо вейвлет першого порядку, який називається WAVE-вейвлетом з нульовим моментом, який дорівнює нулю. При $n = 2$ одержуємо МНАТ-вейвлет, що називається "мексиканський капелюх" (mexican hat – схожий на сомбреро). У нього нульовий і перший моменти дорівнюють нулю.

Таблиця 7.10 – Материнські вейвлети

Вейвлети	Аналітичний запис $\psi(t)$	Спектральна щільність $\psi(\omega)$
Дійсні неперервні базиси		
Гауссові: – Першого порядку або WAVE-вейвлет	$-t \exp(-t^2/2)$	$(i\omega)\sqrt{2\pi} \exp(-\omega^2/2)$
– Другого порядку або МНАТ-вейвлет «мексиканський капелюх»	$(1-t^2) \exp(-t^2/2)$	$(i\omega)^2 \sqrt{2\pi} \exp(-\omega^2/2)$
– n -порядку	$(-1)^n \frac{d^n}{dt^n} [\exp(t^2/2)]$	$(-1)^n (i\omega)^n \sqrt{2\pi} \exp(-\omega^2/2)$
DOG-difference of gaussians	$e^{-t^2/2} - 0,5 e^{-t^2/8}$	$\sqrt{2\pi}(e^{-\omega^2/2} - e^{-2\omega^2})$
LP-Littlewood&Paley	$(\pi)^{-1} (\sin 2\pi t - \sin \pi t)$	$\begin{cases} (2\pi)^{-1.2}, & \pi \leq t \leq 2\pi \\ 0, & \text{при інших значеннях } \pi \end{cases}$
Дійсні дискретні базиси		
НААР-вейвлет	$\begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \geq -1, & 1/2 \leq t \leq 1 \\ 0, & t < 0, t > 1 \end{cases}$	$i e^{i\omega/2} \frac{\sin^2 \omega/4}{\omega/4}$
ФНАТ-вейвлет, або «французький капелюх»	$\begin{cases} 1, & t \leq 1/3 \\ \geq -1/2, & 1/3 \leq t \leq 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$	$\frac{4 \sin^3 \omega/3}{3 \omega/3}$
Комплексні		
Морле (Morlet)	$e^{i\omega_0 t} e^{-t^2/2}$	$\sigma(\omega) \sqrt{2\pi} e^{-(\omega-\omega_0)^2/2}$
Пауля (Paul) – чим більше n , тим більше нульових моментів має вейвлет	$\tilde{A}(n+1) \frac{i^{-n}}{(i-n)^{n+1}}$	$\sigma(\omega) \sqrt{2\pi} (\omega)^n e^{-\omega}$

Найбільш простий приклад дискретного вейвлета – це НААР-вейвлет. Його недоліком є несиметричність форми та негладкість – різкі межі в t -області. Серед комплексних вейвлетів найчастіше використовується базис, заснований на добре локалізованому у часовій та в частотній областях вейвлеті Морле. Характерний параметр ω_0 дозволяє змінювати вибірковість базису. Дійсна та уявна частини $\psi(t)$ – це амплітудно-модульовані коливання.

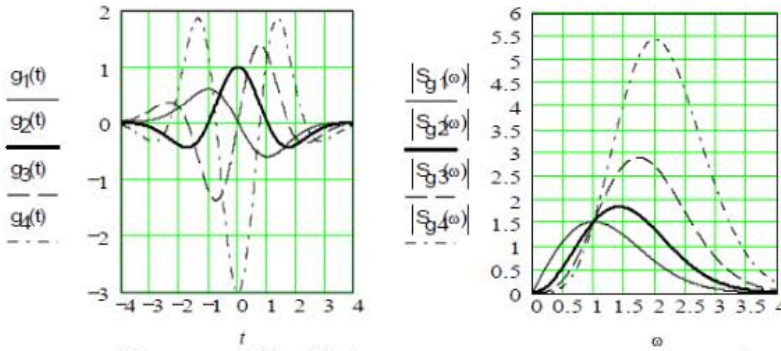


Рисунок 7.30 – Вейвлети перших чотирьох порядків

Вище був наведений невеликий перелік типів вейвлетів, що аналітично описуються в явному вигляді. Однак більшість типів вейвлетів не має аналітичного опису у вигляді однієї формули, а задається ітераційними виразами, які легко обчислюються комп'ютерами.

Вибір конкретного материнського вейвлета цілком залежить від характеру поставленого завдання та від конкретного аналізованого сигналу.

При обробці зображень доводиться мати справу з двовимірними масивами $S(x, y)$. Вони задаються в просторі $V = \{x, y\} \in R^2$ як функції двох змінних x і y . У цьому випадку двовимірна вейвлет-функція має вигляд:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1 a_2}} \psi \left(\frac{x - b_1}{a_1}, \frac{y - b_2}{a_2} \right),$$

де a_1 і a_2 , b_1 і b_2 – значення a і b для кожного виміру.

Для ВП дискретних зображень батьківський та материнський вейвлети будують таким чином:

$$\phi(x, y) = \varphi(x)\varphi(y),$$

$$\psi_{LN}(x, y) = \varphi(x)\psi(y), \quad \psi_{HL}(x, y) = \psi(x)\varphi(y),$$

$$\psi_{HH}(x, y) = \psi(x)\psi(y),$$

де індекси H і L означають реалізацію фільтрів високих частот та низьких частот складових.

Тоді двовимірні вейвлети запишуться в такому вигляді:

$$\left. \begin{aligned} &2^{-m} \varphi(2^{-m} x - k) \varphi(2^m y - 1), \quad 2^{-m} \varphi(2^{-m} x - k) \psi(2^m y - 1) \\ &2^{-m} \psi(2^{-m} x - k) \varphi(2^m y - 1), \quad 2^{-m} \psi(2^{-m} x - k) \psi(2^m y - 1) \end{aligned} \right\}$$

Таким чином, на двовимірній площині відбувається аналіз по горизонталі, вертикалі й діагоналі з однаковим розширенням відповідно до трьох наведених вище вейвлетів.

Пряме ВП зображення відбувається таким способом. Припустимо, що маємо зображення розміром $N \times N$ (рис. 7.31, а). Спочатку кожний з N рядків зображення розділяється (фільтрується) на низькочастотну (НЧ) і високочастотну (ВЧ) половини. У результаті виходить два зображення розміром $N \times N/2$ (рис. 7.31, б). Далі кожний стовпець ділиться так само, у підсумку виходить чотири зображення розміром $N/2 \times N/2$ (рис. 7.31, в): НЧ по горизонталі та вертикалі (НЧНЧ₁), ВЧ по горизонталі та вертикалі (ВЧВЧ₁), НЧ по горизонталі та ВЧ по вертикалі (НЧВЧ₁) і ВЧ по горизонталі та НЧ по вертикалі (ВЧНЧ₁). Перше із зазначених вище зображень ділиться аналогічним чином на наступному кроці (рівні) перетворення (рис. 7.31, г) і т. д.

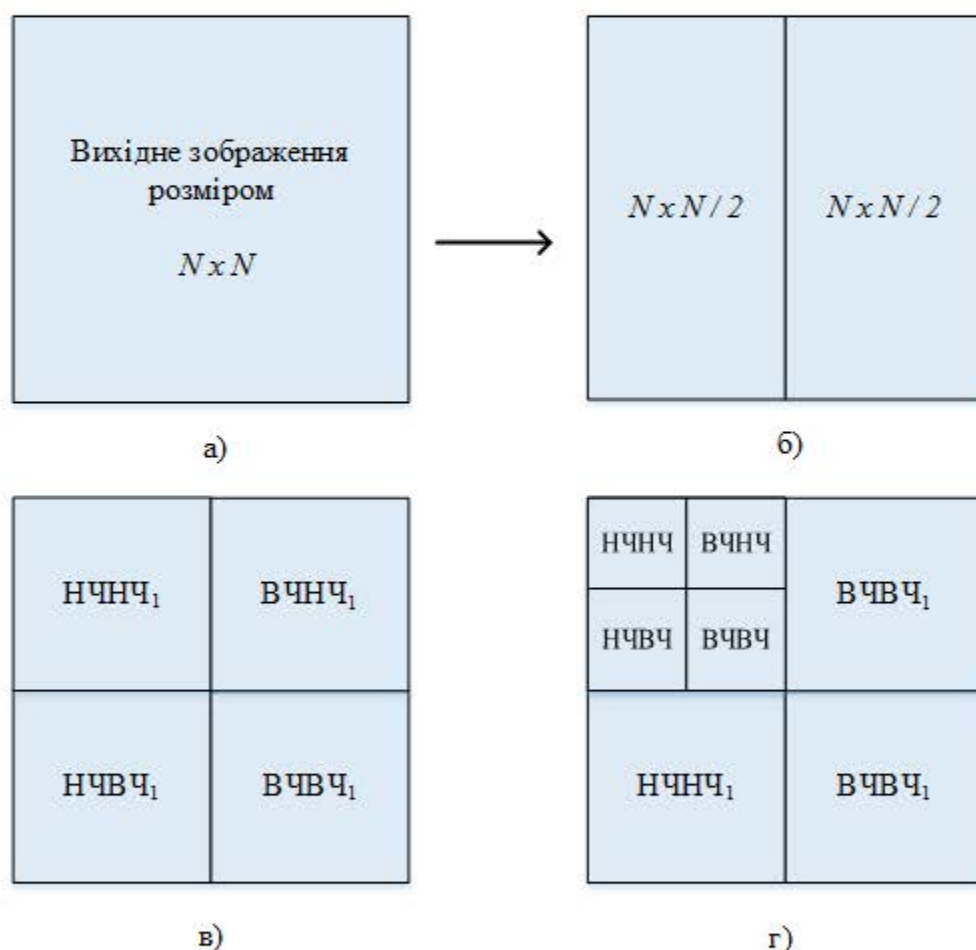


Рисунок 7.31 – Пряме ВП зображення

Кратномасштабний вейвлет-аналіз

Розглянемо $L^2(R)$ – гільбертовий простір функцій $x(t)$, для яких

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty.$$

В цьому просторі визначений скалярний добуток

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\bar{y}(t) dt \text{ і норма } \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Базисом у просторі $V \subset L^2(R)$ називають таку систему функцій $v_i(t)$, в якій будь-яка функція цього простору єдиним чином може бути подана у вигляді

$$v(t) = \sum_i c_i v_i(t).$$

У свою чергу, базис називають ортонормованим, якщо $\langle v_i(t), v_j(t) \rangle = \delta_{ij}$. В цьому випадку $c_i = \langle v(t), v_i(t) \rangle$.

Під ортогональним кратномасштабним аналізом розуміють розгляд простору $L^2(R)$ у вигляді підпростору $V_j \subset L^2(R)$, що задовольняє такі умови:

- 1) підпростори замкнуті: $V_j \subset V_{j+1}$;
- 2) підпростори не перетинаються, а замикання їхнього об'єднання збігається з $L^2(R)$: $\cap V_j = \{0\}$, $\cup \bar{V}_j = L^2(R)$;
- 3) зсув функції зберігає її в підпросторі: $v(t) \in V_0 \Leftrightarrow v(t+1) \in V_0$;
- 4) масштабування аргументу у два рази переміщає функцію в сусідній підпростір: $v(t) \in V_j \Leftrightarrow v(2t) \in V_{j+1}$;
- 5) існує функція масштабування $\varphi(t) \in V_0$, зсуви якої $\varphi_{0,m}(t) = \varphi(t-m)$, $m \in Z$, утворюють ортонормований базис простору V_0 .

Оскільки функції $\varphi_{0,m}(t)$ становлять ортонормований базис простору V_0 , то функції $\varphi_{j,m}(t) = 2^{j/2} \varphi(2^j t - m)$, $j, m \in Z$ породжують ортонормований базис простору V_j .

Якщо послідовність V_j задовольняє зазначені умови, то для кожного $j \in Z$ ортогональне доповнення W_j до простору V_j в просторі V_{j+1} ($v_{j+1} = V_j \oplus W_j$) називають простором вейвлетів, а його елементи – вейвлетами. При цьому вводиться також функція $\psi(t) \in W_0$, що називається материнським вейвлетом, множина зсувів якої $\psi(t-m)$ утворює ортонормований базис простору W_0 , а функції $\psi_{j,m}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - m)$ утворюють ортонормовані базиси просторів W_j для кожного $j \in Z$.

Сигнал $x(t)$ на j -му рівні кратномасштабного вейвлет-розкладу подається у вигляді

$$x(t) = \sum_{m=0}^{N/2^j-1} a_{j,m} \varphi_{j,m}(t) + \sum_{k=1}^j \sum_{m=0}^{N/2^k-1} d_{k,m} \psi_{k,m}(t)$$

де N – загальна кількість відліків сигналу.

Тут перший доданок виразу – це згладжені, апроксимувальні значення сигналу $x(t)$ при деякому масштабі. Другий доданок додає до «грубої» апроксимації сигналу все більш уточнювальні деталі на все менших масштабних інтервалах.

Визначення коефіцієнтів $a_{j,m}$ і $d_{k,m}$ тягне за собою проблему обчислення великої кількості інтегралів з необхідною точністю. Цю проблему вирішує алгоритм швидкого вейвлет-перетворення (ШВП), запропонований Малла. Він дає можливість обчислювати коефіцієнти вейвлет-розкладу без інтегрування, використовуючи алгебраїчні операції на основі згортки. При обчисленні коефіцієнтів в загальному випадку ітераційні формули ШВП мають вигляд:

$$a_{j+1,m} = \sum_n h_n a_{j,2m+1}, \quad d_{j+1,m} = \sum_n g_n a_{j,2m+1},$$

де h_n – НЧ фільтр декомпозиції, g_n – ВЧ фільтр декомпозиції, $a_{0,m} = \int x(t) \varphi(t-m) dt$.

Для сигналу, заданого масивом своїх відліків, початкові коефіцієнти розкладу, як правило, вибирають рівними значенням відліків: $a_{0,m} = x(t_n)$.

Таким чином, кратномасштабний вейвлет-аналіз (рис. 7.32) сигналу полягає у вивченні та обробці коефіцієнтів розкладу різних рівнів. Приміром, аналізуючи отримане частотно-часове подання аудіосигналу з урахуванням психоакустичних особливостей системи людського слуху та впливу на спектр типових операцій обробки, можна визначити області, що найбільш підходять для невідчутного стійкого впровадження додаткової інформації.

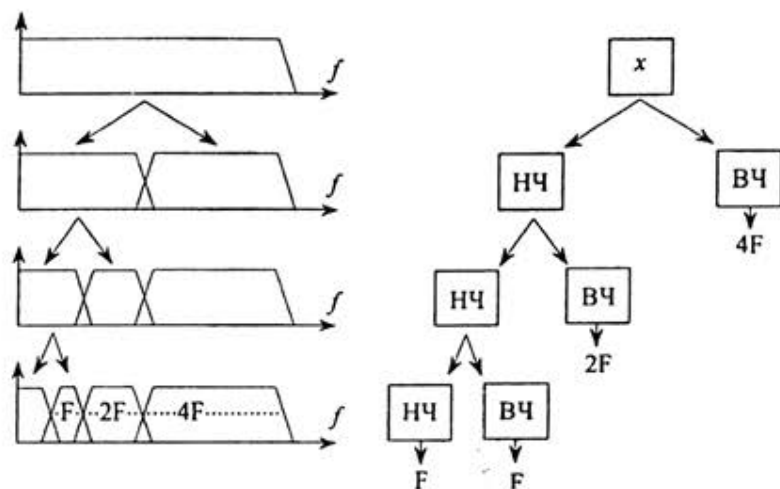


Рисунок 7.32 – Кратномасштабний вейвлет-аналіз

Після модифікації коефіцієнтів декомпозиції виконується реконструкція сигналу, тобто його відновлення в єдине ціле. На даному кроці використовується інтерполяція (вставлення нульового коефіцієнта між кожними сусідніми з наявних) і фільтрація.

В свою чергу, слід зазначити, що процедура декомпозиції може бути застосована не лише до апроксимувальних, але й до деталізувальних коефіцієнтів. Такий метод аналізу називають вейвлет-пакетною декомпозицією сигналу. Застосування такого перетворення сприяє кращій частотній локалізації сигналів в порівнянні зі звичайним ШВП. При цьому слід зазначити, що, на відміну від ШВП, пакетне перетворення дозволяє виконати частотне розбиття за критичними смугами, що дає можливість визначати свої оптимальні параметри впровадження для коефіцієнтів кожної підсмуги.