**Лекція 13**

**Загальні теореми динаміки для системи матеріальних точок**

**13.1 *Міри механічного руху***

Покажемо методи складання перших інтегралів динамічних рівнянь руху, які називаються *законами збереження* механічного руху і зв’язані з введенням спеціальних функцій.

Прикладами таких функцій є міри механічного руху.

*Першою мірою* механічного руху є векторна функція

, (1)

що називається ***кількістю руху матеріальної точки****.*

Кількість руху механічної системи дорівнює векторній сумі кількостей руху всіх точок, що входять до системи, тобто

.

Вектор - головний вектор кількостей руху. Таким чином

.

*Другою мірою* механічного руху називається скалярна функція вигляду

, (2)

яка називається *кінетичною енергією матеріальної точки*.

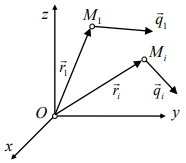
Кінетичною енергією матеріальної системи називається сума кінетичних енергій всіх точок, що входять до системи, тобто

.

*Допоміжною* мірою механічного руху є величина

,

яка називається моментом кількості руху матеріальної точки відносно центру O. Тут - радіус-вектор точки, кількість руху якої дорівнює .



***Головний момент кількостей руху*** (кінетичний момент) механічної системи дорівнює векторній сумі моментів кількостей руху всіх точок, що входять до системи.

.

***13.2. Кількість руху механічної системи***

За означенням центру мас маємо

, (3)

звідки отримаємо

.

В такому разі запишемо вираз головного вектора кількостей руху

,

тобто

***.*** (4)

***Кількість руху механічної системи*** дорівнює добутку маси системи на швидкість центру мас.

З виразу (4) випливає, що

(5)

***Проекції головного вектора кількостей руху механічної системи на осі нерухомої системи координат дорівнюють добуткам маси механічної системи на проекції швидкості центра мас на ті ж самі осі.***

***13.3. Теорема про зміну кількості руху механічної системи. Теорема про рух центра мас***

Припустимо, що механічна система рухається під дією сил, які поділяються на зовнішні і внутрішні: відповідно. Тоді для кожної точки системи можна записати

.

Знайдемо суму всіх таких рівнянь для всіх матеріальних точок, що складають систему

Якщо далі взяти до уваги, що , а сума дорівнює головному вектору зовнішніх сил , тоді отримаємо

*.*

Оскільки , то остаточно матимемо

. (6)

Таким чином, доведена **теорема I про зміну кількості руху** механічної системи (в диференціальній формі):

***перша похідна за часом від головного вектора кількостей руху механічної системи, обчислена в будь-якій інерціальній системі відліку, дорівнює головному вектору всіх зовнішніх сил, що діють на механічну систему.***

В проекціях на осі нерухомої системи координат Aξηζ (**K**) матимемо

(7)

Перші похідні за часом від проекцій головного вектора кількостей руху на координатні осі дорівнюють відповідним проекціям головного вектора зовнішніх сил на ті ж самі осі.

Припустимо, що , тоді беручи інтеграл від обох частин рівності (6), пісдя домноження на ***dt***, в границях від ***t0*** до *t* , отримаємо вираз

, (8)

який являє собою запис теореми І в інтегральній формі. Тут і 0 - головний вектор кількостей руху механічної системи в моменти часу t і t0 відповідно.

Розкриємо запис (8), беручи до уваги, що ,

.

Тут - елементарний імпульс сили ,

– повний імпульс сили ,

- головний вектор імпульсів всіх зовнішніх сил за проміжок часу ***t – t0***. .

Таким чином маємо

. (9)

Це є так звана **теорема імпульсів** (теорема І в інтегральній формі):

*зміна кількості руху механічної системи − за деякий проміжок часу дорівнює головному вектору імпульсів зовнішніх сил за той же проміжок часу.*

Проеціювання виразу (9) на координатні осі нерухомої системи координат ( Aξηζ ) дає

(10)

Із виразів (10) випливає, що зміна проекцій головного вектора кількостей руху механічної системи на координатні осі за деякий проміжок часу дорівнює проекціям на ті ж самі осі головного вектора імпульсів зовнішніх сил.

Далі, з виразу (6), беручи до уваги, що , а також формулу (3), матимемо

,

або остаточно запишемо вираз (6) у вигляді

**,** (11)

де є прискоренням центра мас.

Формула (11) є математичним виразом **теореми про рух центра мас**, яка формулюється наступним чином:

*центр мас механічної системи рухається як вільна матеріальна точка, маса якої дорівнює масі всієї системи, і на яку діє сила, що дорівнює головному вектору зовнішніх сил, прикладених до системи.*

В проекціях на осі нерухомої системи координат з виразу (11) отримаємо

(12)

де ξC, ηC, ζC - координати центру мас у даній системі координат.

Рівняння (12) є диференціальними рівняннями руху центру мас механічної системи.

***13.4. Закони збереження кількості руху механічної системи***

**1)** Розглянемо замкнену механічну систему, на точки якої не діють ніякі зовнішні сили (тобто ). Тоді з рівняння (6) випливає, що

(13)

В цьому рівнянні векторна стала визначається із початкових умов.

Нехай у початковий момент часу ***t0*** точки ***Mi*** механічної системи з масами ***mi*** мали початкові швидкості ***vi0***. Тоді головний вектор кількостей руху у початковий момент часу дорівнюватиме , а оскільки має місце рівність (13), то матимемо

. (14)

Це є *перший інтеграл* рівнянь руху механічної системи.

Оскільки , тому враховуючи вираз (4), отримаємо з (14)

, (15)

інший вираз першого інтегралу рівнянь руху механічної системи.

Із виразу (15) випливає, що для замкненої механічної системи, яка рухається в інерціальній системі відліку, центр мас рухається з однією й тією ж постійною швидкістю, яка визначається із початкових умов.

Якщо проінтегрувати вираз (15), отримаємо

. (16)

Із цієї формули (16) випливає, що для замкненої механічної системи, яка рухається в інерціальній системі відліку, центр мас рухається прямолінійно і рівномірно.

**2)** Розглянемо випадок, коли механічна система незамкнена. Тут є два окремих випадки.

**а)** . Тоді справедливі всі закони збереження кількості руху.

**б)** , причому . Тоді з першої з формул (7) отримаємо

яка визначається з початкових умов, і тоді матимемо

(17)

*перший інтеграл у скалярній формі.*

Співвідношення (17) виражає закон збереження проекції головного моменту кількостей руху на вісь **ξ** .