**Лекція 12**

**12.1 Кінетична енергія (T)**

1) Кінетична енергія матеріальної точки і системи матеріальних точок

Як відомо, кінетична енергія матеріальної точки маси *m* дорівнює

Розглянемо вирази кінетичної енергії точки для трьох способів задання руху точки.

**а)** *Векторний спосіб*

Рух задається радіус-вектором , тоді швидкість точки дорівнюватиме , звідки отримуємо вираз кінетичної енергії

*.*

**б)** *Координатний спосіб*

Рух задається виразами: ξ = ξ(t), η = η, ζ = ζ(t), тому , а вираз кінетичної енергії набуде вигляду

.

**в)** *Натуральний спосіб*

Рух задається дуговою координатою точки як функції часу: s = s(t) , тоді , де , а для кінетичної енергії матимемо такий вираз:

,

тому що =1.

Розглянемо тепер систему матеріальних точок з масами *mi* .

Припустимо, що *кожна* точка має швидкість *vi*, тоді

. (1)

*Кінетична енергія механічної системи дорівнює сумі кінетичних енергій всіх тіл, що входять до даної системи.*

2) Перетворення кінетичної енергії механічної системи при переході від неінерціальної системи відліку, що рухається поступально, до нерухомої. Теорема Кеніга

Розглянемо механічну систему, що складається з *n* матеріальних точок з масами *mi*, які рухаються в неінерціальній системі відліку, яка, в свою чергу, рухається поступально відносно нерухомої (інерціальної) системи відліку (K).

Тут - швидкість поступального руху неінерціальної системи відліку.

З рисунку випливає, що . Звідси шляхом диференціювання отримуємо



де - швидкість *i* -тої точки в рухомій системі координат *Oxyz*.

Тоді кінетична енергія механічної системи визначиться за формулою:

,

де – кінетична енергія механічної системи в її русі відносно рухомої системи координат. Останній доданок у цій формулі утворився так:

.

Таким чином, маємо

. (2)

Вираз (2) являє собою формулу перетворення кінетичної енергії механічної системи при переході від неінерціальної системи відліку, що рухається поступально, до нерухомої (інерціальної).

Введемо поняття кенігової системи відліку.

*Якщо початок рухомої системи координат помістити в центр мас механічної системи і при цьому вказану систему змусити рухатись поступально, так, щоб осі Cx,Cy,Cz весь час руху були паралельні осям Aξ, Aη, Aζ, відповідно, тоді така система відліку називається кеніговою і позначається* **KC***.*



За неінерціальну систему відліку приймемо кенігову систему відліку. Для цієї системи відліку маємо: , а , оскільки швидкість початку рухомої системи координат (центру мас C ) по відношенню до неї самої дорівнює нулю.

Тоді вираз (2) набуває вигляду

 (3)

Це і є математичний вираз теореми Кеніга.

***12.2. Tеорема Кеніга***

*Кінетична енергія механічної системи відносно нерухомої системи відліку дорівнює сумі двох доданків: кінетичній енергії поступального руху механічної системи, що визначається рухом центру мас за умови, що маса всієї системи зосереджена в центрі мас, і кінетичній енергії механічної системи в її відносному русі в кеніговій системі відліку.*

Тепер розглянемо рух механічної системи як складний, приймаючи за переносний рух поступальний рух рухомої системи відліку, а за відносний рух – рух механічної системи в кеніговій системі відліку.

Тоді теорема про додавання швидкостей при складному русі точки для кожної i -тої точки набуває вигляду

, (4)

де - абсолютна швидкість точки, - переносна швидкість, а відносна швидкість .

В такому разі знайдемо вираз кінетичної енергії механічної системи з урахуванням наведених вище залежностей:

.

Тут враховано, що оскільки

Таким чином, остаточно отримуємо

, (5)

тобто *кінетична енергія механічної системи в її абсолютному русі дорівнює сумі кінетичних енергій в її переносному і відносному рухах*.

Проаналізуємо окремі випадки, що випливають з виразу .

**а)** Для *поступального руху* твердого тіла маємо:

.

**б)** Визначимо кінетичну енергію тіла, яке *обертається навколо нерухомої осі* Oz.

Для цього виділимо елементарний об’єм тіла з масою *dm* і знайдемо елементарну кінетичну енергію цього об’єму:

,

інтегрування якого за масою дає

. (6)



Таким чином, *кінетична енергія твердого тіла в його обертальному русі навколо осі Oz дорівнює половині добутку моменту інерції цього тіла відносно осі, навколо якої воно обертається, на квадрат кутової швидкості обертання.*

**в)** Якщо тіло здійснює плоскопаралельний рух, тоді його кінетична енергія визначиться за теоремою Кеніга:

. (7)

**Теорема Кеніга** (для плоскопаралельного руху):

*кінетична енергія тіла в його плоскопаралельному русі дорівнює сумі двох доданків: кінетичній енергії поступального руху твердого тіла, яка визначається рухом центру мас, і кінетичній енергії цього тіла в обертальному русі відносно осі Oz, що проходить через центр мас тіла.*

Зауважимо, що осьовий момент інерції диска залежить від розподілу його маси:

|  |  |
| --- | --- |
|  | • для суцільного однорідного диску він дорівнює ;  |
|  | • якщо маса диску рівномірно розподілена по його ободу, тоді матимемо . |

**Приклад.** Визначити кінетичну енергію механічної системи, що складається з суцільного однорідного шківа маси *m2* та радіуса *r* і тягаря маси *m1*, який являє собою суцільний однорідний диск, з’єднаних ідеальним тросом. Шків обертається навколо нерухомої осі з кутовою швидкістю ω , а тягар рухається вздовж похилої площини без ковзання.

***Дано***: *m1 , m2* ; *ω, r* .

***Знайти***: *T*.

**Р о з в ’ я з а н н я**

Кінетична енергія ***T*** даної механічної системи складається з двох складових: кінетичної енергії тягаря ***T1*** та кінетичної енергії шкиву ***T2*** , тобто ***T =T1 +T2*** .

Кінетична енергія шківу, що обертається навколо нерухомої осі, визначиться за формулою (див. формулу (7)):



Тягар знаходиться у плоскопаралельному русі, тому його кінетична енергія за теоремою Кеніга матиме вираз

а оскільки та , тому

*,*

і остаточно

***12.3. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки***

**1)** Розглянемо *вільну матеріальну точку*

На підставі ІІ-го закону Ньютона маємо

. (8)

Домножимо цей вираз (8) скалярно на вектор :

.



Внесемо під знак диференціала:

, або .

Величина є *елементарною роботою* сили на елементарному дійсному переміщенні *d* , і позначається . Тоді останній вираз можна перетворити таким чином:

. (9)

Це є математичний запис *теореми про зміну кінетичної енергії вільної матеріальної точки в диференціальній формі.*

**Теорема**

*Елементарний приріст кінетичної енергії вільної матеріальної точки дорівнює елементарній роботі сил, що діють на матеріальну точку.*

Штрих в позначенні елементарної роботи *d′A* означає, що вираз не є повним диференціалом деякої функції координат точки і, можливо, часу.

Далі, проінтегрувавши вираз , матимемо

*.*  (10)

В цій формулі , де .

Формула (10) є математичним записом *теореми про зміну кінетичної енергії вільної матеріальної точки в інтегральній формі*.

**Теорема**

*Зміна кінетичної енергії вільної матеріальної точки на деякому відрізку дуги її траєкторії дорівнює роботі сили, прикладеної до точки, на тому ж відрізку дуги траєкторії (∪ M1M2).*

Скалярний добуток є елементарною роботою по переміщенню точки прикладання сили. *T0, T* - вирази кінетичної енергії матеріальної точки, які відповідають її положенням *M1* і *M2* на дузі траєкторії.

Таким чином, можна записати такий вираз цієї теореми:

 . (11)

Із виразів (10) і (11) випливає, що зміна другої міри механічного руху матеріальної точки за деякий проміжок часу визначається роботою сили, яка діє на цю точку на відповідному цьому проміжку часу скінченному відрізку дуги траєкторії.

***12.4. Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи***

Розглянемо систему ***n*** -точок, на кожну з яких діють внутрішні і зовнішні сили.



Для кожної точки запишемо вираз теореми про зміну кінетичної енергії

. (12)

Додаючи такі рівняння, записані для всіх точок системи, отримаємо

,

або

. (13)

Таким чином, доведена **теорема** (про зміну кінетичної енергії механічної системи): *приріст кінетичної енергії системи за деякий проміжок часу дорівнює повній роботі, виконаній зовнішніми і внутрішніми силами, прикладеними до системи, за той же проміжок часу.*

***12.5. Робота сили***

*Елементарною роботою сили* на елементарному переміщенні *d* називається скалярна міра дії сили, що дорівнює скалярному добутку сили на елементарне переміщення *d* точки прикладення сили, тобто

. (14)

Криволінійний інтеграл від виразу (14), якщо його взяти вздовж дуги *∪M1M2* кривої, яку описує точка прикладення сили, являє собою повну роботу сили.

. (15)

Ця величина ще називається *роботою сили на скінченному переміщенні*.

Записи (14) і (15) відповідають випадку, коли рух точки заданий векторним способом.

Для координатного способу задання руху точки маємо:

і відповідно

 (16)

Оскільки , то і тоді отримаємо такий вираз для повної роботи сили:

.

Для натурального способу задання руху матеріальної точки, для якого ( - одиничний вектор дотичної, τ =1 ) вираз повної роботи має вигляд

*.*

Тут *s1, s2* - дугові координати, які відповідають положенням M1 і M2 матеріальної точки.

Зауважимо, що робота сили на елементарному переміщенні є інваріантом (незмінною) по відношенню до вибору системи координат, що випливає з властивостей скалярного добутку.

Якщо на матеріальну точку *діє система сил*, які зводяться до рівнодійної, тоді елементарна робота рівнодійної дорівнюватиме сумі елементарних робіт всіх сил, що діють на точку, тобто

. (17)

Дійсно,

 **.**

***12.6. Робота сили ваги***

Нехай матеріальна точка M рухається у просторі по дузі траєкторії під дією лише сили ваги (*m*) цієї точки.

Обчислимо повну роботу сили *m* за формулою (16), для цього спочатку знайдемо проекції сили ( на осі системи координат *Oxyz* : . Тоді за формулою (16) матимемо:



Таким чином, маємо

, (18)

де .

Зауважимо, що коли точка наближається до поверхні Землі (), тоді A> 0 , і навпаки, коли точка віддаляється від поверхні Землі, тоді , а A< 0.

*Робота сили ваги* матеріальної точки:

• дорівнює добутку модуля цієї сили на різницю висот початкового і кінцевого положень точки;

• ніколи не залежить від форми траєкторії, по якій точка перейшла з початкового положення в кінцеве;

• є додатньою, якщо кінцеве положення точки нижче за початкове;

• дорівнює нулю на разі, якщо точка повертається на ту ж саму висоту над горизонтальною площиною, на якій вона знаходилася спочатку.

***12.7. Робота сил, що діють на механічну систему***

*Елементарною роботою сил*, що діють на механічну систему, називається сума елементарних робіт всіх сил (зовнішніх і внутрішніх), що діють на систему.

***,***

***,***

***,***

***.***

Без доведення приймемо, що сума елементарних робіт всіх сил, що діють на тверде тіло (незмінювану систему матеріальних точок), є сумою елементарних робіт лише зовнішніх сил:

*,* або .

***12.8. Елементарна робота сил, що прикладені до твердого тіла***

Розглянемо тверде тіло, яке здійснює вільний рух. На точки *Mi* цього тіла діють зовнішні сили . Тоді матимемо наступний вираз елементарної роботи цих сил:

*.* (19)

З курсу кінематики відомо, що швидкість будь-якої точки вільного тіла визначається формулою

 (20)

де - швидкість точки, яку приймають за полюс;

***ω*** - кутова швидкість тіла;

 - радіус-вектор точки *Mi* відносно полюса.

Тепер підставимо формулу (20) в вираз (19):

**.**

Розглянемо кожний доданок окремо:

.

Тут використана можливість циклічної перестановки множників у змішаному скалярно-векторному добутку.

Таким чином, маємо

**.**  (21)

Це є вираз для елементарної роботи зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла, яке здійснює вільний рух. Ця робота визначається через головний вектор () і головний момент () зовнішніх сил відносно точки , яку приймаємо за полюс. При цьому окрім вказаних характеристик дії зовнішніх сил необхідно знати ще й швидкість полюса і кутову швидкість ***ω*** тіла.

Надамо виразу (21) більш простої форми.

Для цього введемо вектор елементарного переміщення полюса, тобто т. O: , а також елементарний поворот тіла відносно полюса: , тоді вираз (21) набуде такого вигляду:

 (22)

тобто

*елементарна робота зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла, яке здійснює вільний рух, дорівнює сумі елементарної роботи головного вектора зовнішніх сил на елементарному переміщенні полюса і елементарної роботи головного моменту зовнішніх сил, обчисленого відносно полюса, на елементарному повороті тіла навколо полюса.*

***12.9. Приватні випадки обчислення елементарних робіт для різних видів руху тіла***

**1)** Поступальний рух твердого тіла

За такої умови маємо ω= 0 , і з виразу (22) випливає, що

.

**2)** Обертальний рух тіла відносно нерухомої осі

Якщо вибрати полюс на осі обертання (*Oz*), тоді і матимемо:

**,**

де ( - орт осі z ).

**3)** Плоскопаралельний рух твердого тіла

Вважаємо, що вісь *Oz* перпендикулярна основній площині, тоді з виразу (22) маємо:

**.**

Вирази повних робіт отримаємо шляхом інтегрування відповідних виразів для елементарних робіт.