**Лекція 10**

**Розділ 3. Д и н а м і к а**

*Динаміка* – це розділ теоретичної механіки, в якому вивчається рух матеріальних об’єктів з урахуванням сил, що діють на ці об’єкти.

В основі теоретичної механіки лежить невелика кількість гіпотез, пов’язаних з введенням ньютоновських уявлень про простір і час, поняття ІСВ, сили, маси, а також самі закони Ньютона, отримані в результаті узагальнень спостережень уповільнено плинучих рухів макроскопічних тіл.

В механіці постулюється наявність такої системи відліку, в якій ізольована матеріальна точка знаходиться у стані спокою або рівномірного і прямолінійного руху як завгодно довго. Така система відліку називається інерціальною (ІСВ) або *галілеєвою*.

Системи відліку, в яких вказані властивості не зберігаються, називаються *неінерціальними.*

Припущення про існування ІСВ складає зміст першого закону Ньютона (закону інерції)

**І-й закон Ньютона:** *будь-яке тіло продовжує утримуватись в стані спокою або рівномірного і прямолінійного руху доки і оскільки воно не примушується прикладеними силами змінити свій стан.*

Цей закон віддзеркалює одну з найважливіших властивостей об’єктивної реальності – властивість інертності, яка полягає в тому, що ізольована матеріальна точка зберігає стан спокою або рівномірного і прямолінійного руху як завгодно довго.

Таким чином самочинна зміна руху (спокою) матеріальної точки неможлива. Рух точки може змінитися тільки в результаті її взаємодії з іншими тілами. Наявність такої взаємодії викликає відхилення руху матеріальної точки від рівномірного і прямолінійного, тобто виникає деяке прискорення відносно ІСВ.

Наявність абсолютного прискорення точки (відмінного від нуля) свідчить про те, що на цю точку діють інші тіла.

Інтенсивність і напрямленість цієї дії характеризується силою.

*Сила* – це векторна міра механічного прояву фізичної дії на матеріальну точку інших тіл. Поняття сили дає можливість вводити кількісні співвідношення, які виражають характер механічної взаємодії тіл.

Перед тим як сформулювати ІІ-й закон Ньютона, слідуючи Ньютону введемо ще два фундаментальних поняття механіки – масу точки та її кількість руху.

*Масою* (m) матеріальної точки називається фізична величина, яка є мірою її інертних і гравітаційних властивостей. Під інертними розуміють властивості об’єкту чинити опір при спробах змусити його рухатися, або змінити величину чи напрямок його швидкості. Під гравітаційними розуміють властивості взаємного тяжіння часток об’єктивної реальності.

*Кількістю руху* матеріальної точки називається векторна величина, що дорівнює добутку маси точки на її швидкість

(1)

**ІІ-й закон Ньютона:** *зміна кількості руху матеріальної точки пропорційна силі, що до неї прикладена, і напрямлена вздовж тієї ж прямої, по якій ця сила діє.*

. (2)

Враховуючи вираз (1), останню формулу можна переписати у вигляді

, (3)

звідки за умови m = const матимемо

. (4)

У разі, якщо одна з величин у виразі (4) відома, тоді ІІ-й закон Ньютона у формі (4) стає визначальним співвідношенням, тобто таким, в результаті розгляду якого можна знайти іншу невідому величину. На цьому базуються *дві основні задачі динаміки*.

**10.1. Динаміка вільної матеріальної точки**

Матеріальна точка називається *вільною*, якщо в довільний момент часу можна довільним чином задати її радіус-вектор і швидкість .

Покажемо диференціальні рівняння руху матеріальної точки при трьох способах задання руху (векторному, координатному та натуральному).

***1.1. Диференціальні рівняння руху матеріальної точки***

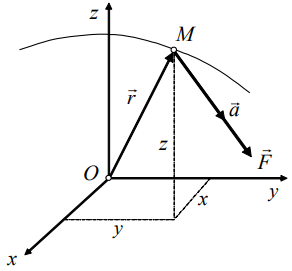
Якщо рух точки задано ***векторним способом***, тобто відомий радіус-вектор як функція часу, а саме , тоді прискорення , а з виразу (4) матимемо

(5)

*динамічне рівняння руху матеріальної точки у векторній формі.*

Розглянемо матеріальну точку, рух якої задано у ***координатній формі.***

Для цього введемо нерухому систему координат *Oxyz* .



Відомі координати точки у функції часу, тобто

звідки

Якщо спроектувати вираз (5) на осі цієї системи координат, то отримаємо наступні співвідношення:

(6)

Це є *динамічні рівняння руху вільної матеріальної точки в координатній формі.*

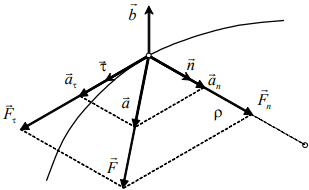
У разі якщо точка рухається в площині (наприклад, Oxy ), тоді динамічними рівняннями її руху будуть наступні вирази:

(7)

Якщо точка рухається вздовж однієї прямої, з якою сумістимо вісь Ox , тоді динамічним рівнянням прямолінійного руху буде наступне:

(8)

Якщо описувати рух матеріальної точки натуральним способом, тобто відома її дугова координата як функція часу: ***s = s(t)*** , тоді, проектуючи вирази (4) або (5) на осі натурального тригранника (його ортами є , , ), отримаємо (згадуючи, що завжди дорівнює нулю)



(9)

Згадуючи, що

отримаємо

(10)

(тут ρ - радіус кривизни траєкторії точки).

***1.2. Дві задачі динаміки вільної матеріальної точки***

В динаміці руху вільної матеріальної точки розрізняють дві задачі:

* пряму (першу);
* обернену (другу).

Обернена задача динаміки називається основною. Розглянемо більш детально, в чому полягають ці задачі.

1. **Пряма задача динаміки**: за відомої маси точки, закону її руху, треба знайти силу, яка діє на цю матеріальну точку (або рівнодійну сил, що викликають даний рух). В залежності від того, в якій формі заданий закон руху, для визначення сили можна застосувати рівняння руху у векторній, координатній або натуральній формі. В цьому разі перша задача динаміки зводиться до визначення прискорення точки за відомими кінематичними рівняннями її руху.

Так, наприклад, при координатному способі задання руху відомі координати точки як функції часу, тобто ***x = x(t), y = y(t), z = z(t)*** . Знайшовши другі похідні за часом від цих залежностей і підставивши вирази в рівняння (6), знайдемо проекції сили на координатні осі:

(11)

Після цього можна визначити модуль шуканої сили , та її напрямок за напрямними косинусами:

2. ***Обернена задача динаміки*** полягає в тому, що визначається закон руху матеріальної точки за відомою її масою та прикладеною до неї силою. Крім цього для розв’язання цієї задачі необхідно знати початкове положення даної точки та її початкову швидкість.

***Основний алгоритм розв’язання оберненої (другої) задачі динаміки***

Використаємо рівняння руху матеріальної точки у формі (6) та припустимо, що праві частини рівнянь є однозначними та скінченними функціями вказаних аргументів. Тоді визначення закону руху точки в даному випадку зводиться до інтегрування диференціальних рівнянь (6) другого порядку. Результатом інтегрування є наступні функції:

(12)

де - сталі інтегрування.

Рівняння (12) являють собою загальний розв’язок системи диференціальних рівнянь (6).

З цих рівнянь випливає, що матеріальна точка маси m під дією заданої сили може здійснювати сукупність рухів, що визначаються різними наборами *Ci* . Для того, щоб виділити конкретний вид руху, необхідно скористатися додатковими умовами, в якості яких виступають початкові умови:

або більш детально

(13)

(14)

Для того, щоб використати умови (13) і (14), треба здиференціювати функції (12):

(15)

Підставимо (13) в (12), а (14) в (15), і визначимо сталі інтегрування

(16)

Якщо тепер підставити знайдені сталі інтегрування у вирази (12), то отримаємо остаточний розв’язок системи рівнянь (6).

***10.2. Динаміка невільної матеріальної точки***

**2.1. В’язі. Звільнення від в’язей**

Матеріальна точка називається ***вільною***, якщо в будь-який момент часу можна довільним чином задати її радіус-вектор і швидкість .

Для вільної матеріальної точки можна здійснити рух вздовж заздалегідь вибраної траєкторії, якщо визначеним чином підібрати механічні взаємодії між цією точкою і іншими тілами.

Ці взаємодії, які підтримуються вподовж всього часу руху, називаються активними силами, або силами, що задаються.

Механічні взаємодії, що відбулися в початковий момент часу і закінчилися до даного моменту, називаються ***початковими умовами руху***.

Умови, що створюють обмеження вільного руху матеріальної точки, називаються в’язями. Механічні взаємодії в’язей, на відміну від вказаних (активних), обмежують область зміни радіус-вектора і швидкості матеріальної точки. Ці взаємодії виникають за рахунок ***накладення в’язей*** і називаються ***дією в’язей***. Міра цих взаємодій визначається також силами (***реакціями в’язей***), які в рівняннях динаміки завжди є невідомими.

Для характеристики в’язей використовують рівняння2 в’язей.

Обмежимось розглядом ***стаціонарних геометричних в’язей***.

Геометричні в’язі – це такі в’язі, в рівняння яких входять лише координати точки і, можливо, час.

Якщо рівняння в’язі не залежить від часу, тоді така в’язь називається стаціонарною.

Накладені на точку геометричні в’язі змушують її рухатись в деякій області простору (по поверхні або кривій).

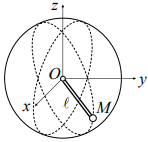
***Рівняння в’язі*** – це рівняння лінії або поверхні, по якій може рухатись дана точка при наявності активних сил і початкових умов.

У випадку руху точки по незмінній поверхні (стаціонарна геометрична в’язь) її координати повинні задовольняти відповідному рівнянню поверхні

(17)

Якщо ж точка рухатиметься по деякій незмінній кривій (стаціонарна геометрична в’язь), то її координати повинні задовольняти рівнянням поверхонь

(18)

які при перетині утворюють розглядувану криву

Розглянемо сферичний маятник, кінець якого (матеріальна точка M), з’єднаний невагомим ідеальним стрижнем довжини λ з сферичним шарніром O , рухається по поверхні сфери, рівняння якої має вигляд

(19)

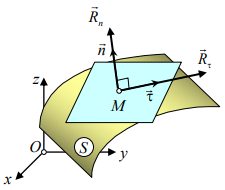
Рівняння (19) є рівнянням в’язі для точки M .

Дія в’язі на матеріальну точку характеризується деякою силою, прикладеною до цієї точки, яка називається ***реакцією в’язі***.

На відміну від сил, що задаються, в рівняннях динаміки реакції в’язей завжди є невідомими величинами, що підлягають визначенню. Розробка методів їх визначення є однією із задач динаміки невільної матеріальної точки.

Невільну матеріальну точку можна розглядати як вільну, якщо скористатися аксіомою про звільнення від в’язей і думкою відкинути в’язі, замінивши їх дію відповідними реакціями в’язей. При цьому вважають, що розглядувана точка рухається під дією активних сил і реакцій в’язей. Тоді рівняння її руху набуває вигляду

. (20)

Розглянемо матеріальну точку M, що рухається по поверхні S .

Проведемо в цій точці дотичну площину до поверхні. Відкидаючи думкою поверхню (в’язь), подамо невідому її реакцію у вигляді двох складових: однієї (τ), що належить площині, дотичній до поверхні S у точці M , та іншої (n), що напрямлена по нормалі до поверхні S у точці M ( - орт нормалі). Таким чином, в загальному випадку

,

де τ - сила тертя (дотична складова реакції в’язі).

Нормальна складова реакції (n) може бути подана у вигляді

(21)

де λ - множник Лагранжа, ϕ - функція, що описує поверхню, або безпосередньо через орт:

.

Тоді множник λ визначиться за формулою

, (22)

оскільки .

Розглянемо два типи поверхонь, що найчастіше зустрічаються на практиці.

**а) Ідеально гладенька поверхня**

Це така поверхня, реакція якої завжди напрямлена перпендикулярно (тобто по нормалі) до цієї поверхні. У цьому випадку . Зауважимо, що в’язь, для якої повна її реакція напрямлена вздовж нормалі до поверхні і невідомим є лише її модуль, називається ***ідеальною в’яззю***.

**б) Негладенька поверхня**

Це така поверхня, реакція якої напрямлена не по нормалі до неї, тобто присутня і дотична складова τ .

При цьому можна вважати, що матеріальна точка рухається по ідеально гладенькій поверхні, але тоді складову τ слід віднести до категорії активних сил.

***2.2. Динамічні рівняння руху невільної матеріальної точки. Дві задачі динаміки невільної матеріальної точки. Рівняння руху матеріальної точки по нерухомій поверхні (рівняння Лагранжа І-го роду)***

У векторній формі динамічне рівняння руху невільної матеріальної точки має вигляд

(23

де - рівнодійна активних сил, прикладених до матеріальної точки, а - рівнодійна реакцій в’язей.

В координатній формі рівняння (23) набуває вигляду

(24)

Таким чином, рівняння (23) і (24) є динамічними рівняннями руху невільної матеріальної точки.

***Пряма задача динаміки*** для невільної матеріальної точки полягає у визначенні невідомих реакцій в’язей за відомою масою ***m*** точки, кінематичними рівняннями руху і активними силами (силами, що задаються) з рівнодійною .

Для розв’язання цієї задачі достатньо розв’язати систему (24), оскільки вона містить у трьох рівняннях три невідомі величини: .

***Обернена задача динаміки*** полягає у визначенні і *x, y, z* (реакцій в’язей і кінематичних рівнянь руху) за відомими: масою ***m*** , активними силами (), початковими умовами, а також за відомим рівнянням в’язі, -

(25)

Розглянемо систему (24) і (25), що складається з чотирьох рівнянь з шістьма невідомими.

Припустимо, що в’язь є ідеальною, тобто

(26)

а з іншого боку . Порівнюючи ці вирази маємо

звідки отримаємо

(27)

Якщо підставити ці вирази в рівняння (24), тоді отримаємо ***рівняння Лагранжа І-го роду***

(28)

Рівняння (28) разом з (25) утворюють систему з чотирьох рівнянь з чотирма невідомими: ***x, y, z, λ*** . Розв’язання цієї системи дає можливість визначити множник ***λ*** , а потім з рівнянь (27) знайти невідомі ***Rx, Ry, Rz***,.