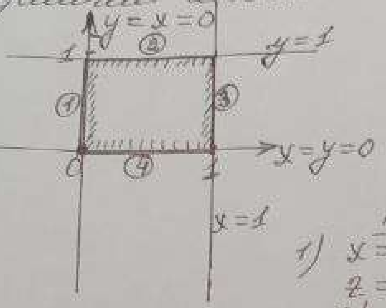
Знайти найбільше та найменше значення функції $z = 5x^2 - 3xy + y^2$ в області D, що обмежена заданими лініями: $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$



I. $z'_x = 10x - 3y$
$z'_y = -3x + 2y$

$\begin{cases} 10x - 3y = 0 & |\cdot 2 \\ -3x + 2y = 0 & |\cdot(-3) \end{cases}$

$\begin{cases} 29x = 0 \\ 10x - 3y = 0 \end{cases}$ $\quad x = 0$, $y = 0$ $\quad O(0;0) \in D$ $\quad z(0;0) = 0$

II. Досліджуємо функцію на межі області

1) $x = 0$, $0 \le y \le 1$
$z = y^2$
$z'_y = 2y = 0 \Rightarrow y = 0,\ x = 0$ $\quad O(0;0)$
$z(0) = 0$ $\quad z(1) = 1^2 = 1$

2) $y = 1$, $0 \le x \le 1$
$z = 5x^2 - 3x + 1$
$z'_x = 10x - 3$
$z'_x = 0 \Rightarrow 10x = 3$, $x = \frac{3}{10} \in [0;1]$
$z\left(\frac{3}{10}\right) = 5\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^2 - 3\cdot\frac{3}{10} + 1 = 5\cdot\frac{9}{100} - \frac{9}{10} + 1 = \frac{9}{20} + \frac{1}{10} = \frac{11}{20}$
$z(0) = 1$
$z(1) = 5\cdot 1^2 - 3\cdot 1 + 1 = 3$

3) $x = 1$, $0 \le y \le 1$
$z = 5 - 3y + y^2$
$z'_y = -3 + 2y = 0$, $2y = 3$ $\quad y = \frac{3}{2} \notin [0;1]$
$z(0) = 5$
$z(1) = 5 - 3 + 1 = 3$

4) $y = 0$, $0 \le x \le 1$
$z = 5x^2$
$z'_x = 10x$ $\quad 10x = 0 \Rightarrow x = 0,\ y = 0$ $\quad O(0;0)$
$z(0) = 0$
$z(0) = 0$
$z(1) = 5$

III. Порівнюємо всі знайдені значення функції z і робимо висновок:

$z(0;0) = 0$
$z(0;1) = 1$
$z\left(\frac{3}{10};1\right) = \frac{11}{20}$ $\quad \Rightarrow \quad z_{min}(0;0) = 0$, $\quad z_{max}(1;0) = 5$
$z(1;1) = 3$
$z(1;0) = 5$