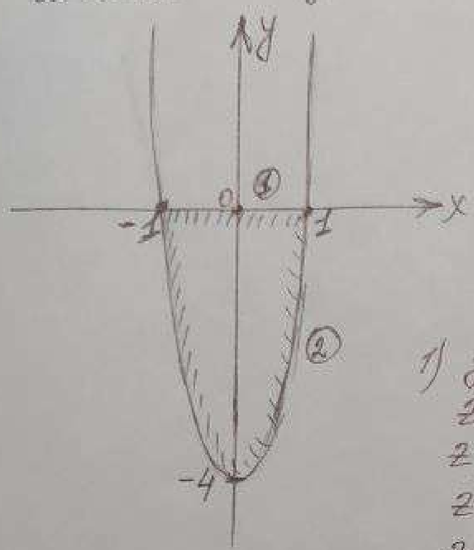
Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + xy - 2$ в області D, що обмежена заданими лініями: $y = 4x^2 - 4$, $y = 0$.



I. Знаходимо стаціонарні точки:

$z'_x = 2x + y$, $z'_y = x$

$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow O(0;0) \in D$

$z(0;0) = -2$

II Досліджуємо функцію на межі області

1) $y = 0$, $-1 \le x \le 1$

$z = x^2 - 2$

$z'_x = 2x = 0 \Rightarrow x = 0$, $y = 0$

$z(0;0) = -2$

$z(-1) = 1 - 2 = -1$

$z(1) = 1 - 2 = -1$

2) $y = 4x^2 - 4$, $-1 \le x \le 1$

$z(x) = x^2 + x(4x^2 - 4) - 2 = 4x^3 + x^2 - 4x - 2$

$z'(x) = 12x^2 + 2x - 4 = 0 \quad 6x^2 + x - 2 = 0 \quad D = 1 - 4 \cdot 6 \cdot (-2) = 49$

$x_1 = \frac{-1-7}{12} = -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3} \in D$

$y = 4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 4 = 4 \cdot \frac{4}{9} - 4 = -\frac{20}{9}$

$x_2 = \frac{-1+7}{12} = \frac{1}{2} \in D$

$y = -3$

$z\left(-\frac{2}{3}\right) = 4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^3 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 4\left(-\frac{2}{3}\right) - 2 = -4 \cdot \frac{8}{27} + \frac{4}{9} + \frac{8}{3} - 2 = -\frac{2}{27}$

$z\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - 2 - 2 = \frac{3}{4} - 4 = -\frac{13}{4}$

$z(-1) = 4 \cdot (-1)^3 + (-1)^2 - 4(-1) - 2 = -4 + 1 + 4 - 2 = -1$

$z(1) = 4 + 1 - 4 - 2 = -1$

III. Порівнюємо всі знайдені значення функції z і робимо висновок:

$z(0;0) = -2$

$z(-1;0) = -1$

$z(1;0) = -1$

$z\left(-\frac{2}{3}; -\frac{20}{9}\right) = -\frac{2}{27}$

$z\left(\frac{1}{2}; -3\right) = -\frac{13}{4}$

$z(-1;0) = -1$

$z(1;0) = -1$

$\Rightarrow z_{min}\left(\frac{1}{2}; -3\right) = -\frac{13}{4}$

$z_{max}\left(-\frac{2}{3}; -\frac{20}{9}\right) = -\frac{2}{27}$