Лекція 6.

Тема. Пряма в просторі. Функція. Границя функції.

§ 4. Пряма в просторі.

4.1. Різні види рівнянь прямої в просторі.

Як уже зазначалося в § 2, коли пряма задана точкою і напрямним вектором, то її векторне параметричне рівняння (як на площині так і в просторі) має вигляд (1.4): $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s}t$, де $\vec{r}$— радіус-вектор змінної точки M прямої; $\vec{r}_0$ — радіус-вектор заданої точки M_0; $\vec{s}$ — ненульовий напрямний вектор прямої; t — параметр.

Нехай у просторі в прямокутній системі координат задано пряму точкою $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, і напрямним вектором $\vec{s} = (m; n; p)$. Візьмемо довільну точку $M(x;\ y;\ z)$ цієї прямої (рис. 9). Тоді аналогічно тому, як було знайдено формули (1.5) — (1.7), дістаємо:

1) параметричні рівняння прямої в просторі:

$$x = x_0 + mt, y = y_0 + nt, z = z_0 + pt; \qquad (4.1)$$

2) канонічні рівняння прямої в просторі:

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}; \qquad (4.2)$$

3) рівняння прямої в просторі, яка проходить через дві задані точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (4.3)$$

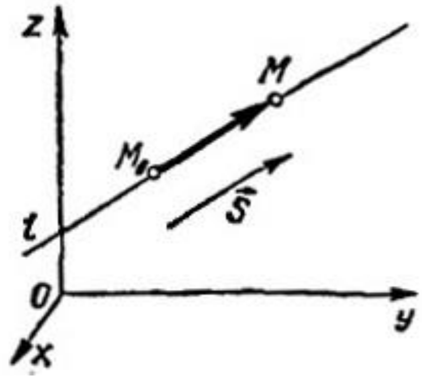


Рис. 9.

У рівняннях (4.1) — (4.3) одна або дві координати напрямного вектора можуть дорівнювати нулю (випадки $m = n = p = 0$ та $x_2 - x_1 = y_2 - y_1 = z_2 - z_1 = 0$ неможливі, бо за означенням $\vec{s} \neq \vec{0}$).

Якщо $m = 0, n \neq 0, p \neq 0$, то напрямний вектор перпендикулярний до осі Ox, тому рівняння

$$\frac{x-x_0}{0} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$$

визначає пряму, перпендикулярну до осі Ox. Аналогічно рівняння, в яких лише $n = 0$ або $p = 0$, визначають прямі, перпендикулярні до осі Oy або Oz.

Якщо $m = n = 0,\ p \neq 0$, або $m = p = 0,\ n \neq 0$, або $n = p = 0,\ m \neq 0$, то рівняння (4.2) визначають прямі, відповідно паралельні осям Oz, Oy, Ox.

Розглянемо тепер випадок, коли пряма в просторі задається перетином двох площин. Відомо, що дві непаралельні площини перетинаються по прямій лінії. Отже, система рівнянь двох площин

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}, \qquad (4.4)$$

нормальні вектори яких $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ не колінеарні, визначає в просторі пряму лінію.

Рівняння (4.4) називаються загальними рівняннями прямої в просторі.

4.2. Кут між двома прямими. Умови паралельності і перпендикулярності прямих.

Нехай прямі l_1 і l_2 задано рівняннями

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad ; \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$

Кут між цими прямими (рис. 11) дорівнює куту φ між їхніми напрямними векторами $\vec{s}_1 = (m_1; n_1; p_1)$ і $\vec{s}_2 = (m_2; n_2; p_2)$, тому аналогічно з випадком а) п. 2.2 дістанемо:

1) формулу для кута φ між прямими l_1 і l_2:

$$cos\ \varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1|\,|\vec{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\,\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}; \qquad (4.6)$$

2) умову паралельності прямих l_1 і l_2:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}; \qquad (4.7)$$

3) умову перпендикулярності прямих l_1 і l_2:

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0. \qquad (4.8)$$

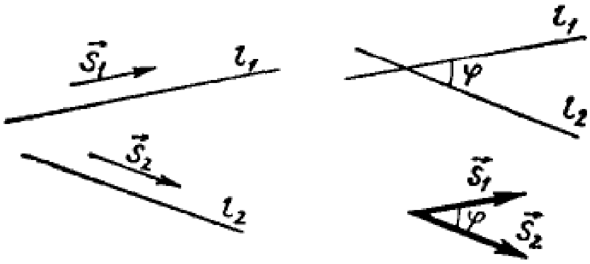


Рис. 11.

Приклад. Знайти кут φ між прямими $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-4}{-2}$ і $\frac{x+5}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+3}{-1}$.

Розв’язання. Прямі задані своїми канонічними рівняннями. Тому відомі їх напрямні вектори $\vec{s}_1 = (1; 2; -2)$ і $\vec{s}_2 = (1; 0; -1)$. Тоді за формулою (4.6) маємо

$$cos\ \varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1|\,|\vec{s}_2|} = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + (-2) \cdot (-1)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}\,\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{1+0+2}{\sqrt{9}\,\sqrt{2}} = \frac{3}{3 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

або

$$\varphi = arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = 45^{\circ}.$$

4.3. Кут між прямою і площиною. Умови паралельності і перпендикулярності прямої і площини.

Кут між прямою l і площиною *П* за означенням є кут між прямою l і її проекцією на площину *П*.

Нехай площина *П* і пряма l задані рівняннями

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ і } \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}.$$

Позначимо гострий кут між прямою l (рис. 12) і її проекцією l_1 на площину *П* через φ, а кут між нормальним вектором $\vec{n} = (A; B; C)$ площини *П* і напрямним вектором $\vec{s} = (m; n; p)$ прямої l — через θ. Якщо $\theta \le 90^{\circ}$, то $\varphi = 90^{\circ} - \theta$, тому $sin\ \varphi = cos\theta$; якщо ж $\theta > 90^{\circ}$, то $\varphi = \theta - 90^{\circ}$ і $sin\ \varphi = -cos\theta$. Отже, в будь-якому випадку $sin\ \varphi = |cos\theta|$. Але

$$cos\ \theta = \frac{\vec{n} \cdot \vec{s}}{|\vec{n}|\,|\vec{s}|},$$

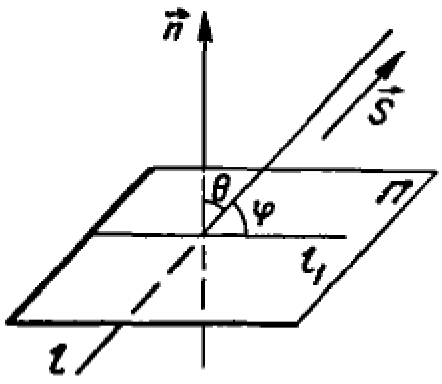


Рис. 12.

тому кут між прямою і площиною знаходиться за формулою

$$sin\ \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{s}|}{|\vec{n}|\,|\vec{s}|} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \qquad (4.9)$$

Якщо пряма l паралельна площині *П*, то вектори $\vec{n}$ і $\vec{s}$ перпендикулярні, тому $\vec{n} \cdot \vec{s} = 0$, тобто

$$Am + Bn + Cp = 0 \qquad (4.10)$$

— умова паралельності прямої і площини.

Якщо пряма l перпендикулярна до площини *П*, то вектори $\vec{n}$ і $\vec{s}$ паралельні, тому співвідношення

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}. \qquad (4.11)$$

є умовою перпендикулярності прямої і площини.

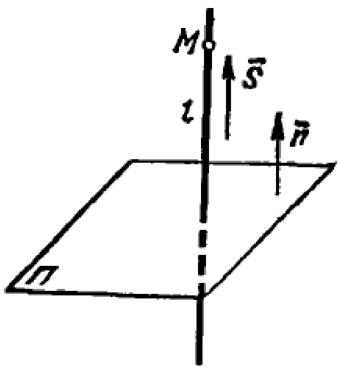


Рис. 13.

На самостійне вивчення пропонуються наступні теми:

1. **Лінії другого порядку. Коло. Еліпс. Гіпербола. Парабола.**
2. **Поверхні другого порядку.**

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Математичний аналіз — це сукупність розділів математики, присвячених дослідженню функцій методами нескінченно малих. Основи дано у працях І. Ньютона, Г. Лейбніца, Л. Ейлера та інших математиків 17—18 ст. Обґрунтування математичного аналізу за допомогою поняття границі належить О. Л. Коші.

Курс математичного аналізу містить такі розділи: вступ до аналізу, диференціальне числення, інтегральне числення і теорія рядів.

§1. Функції.

1.1. Множини.

Поняття множини є одним з фундаментальних у математиці.

Означення. Множиною називають сукупність (сімейство, набір, зібрання) деяких об'єктів, об'єднаних за певною ознакою, характеристикою чи властивістю.

Прикладами множин може бути множина деталей, з яких складається даний механізм, множина шкіл даного міста, множина зірок певного сузір'я, множина розв'язків даного рівняння, множина всіх цілих чисел тощо.

Об'єкти, з яких складається множина, називаються її елементами. Множини позначають великими буквами латинського алфавіту, а їх елементи — малими. Якщо елемент x належить множині X, то пишуть $x \in X$.

Запис $x \notin X$ означає, що елемент x не належить множині X.

Множина вважається заданою, якщо відома характеристика її елементів, коли про кожний елемент можна сказати, належить він цій множині чи ні. Так, множині цілих чисел належить число 9, але не належить число 0,9.

Множина, яка містить скінченну кількість елементів, називається скінченною. Запис $A = \{a_1, a_2, \dots, a_s\}$ означає, що множина A скінченна і містить s елементів. Множина $X = \{x_1, x_2, \dots, x_s, \dots\}$, яка містить нескінченну кількість елементів, називається нескінченною. Так, множина слухачів в даній аудиторії — скінченна, а множина трикутників, які можна вписати в дане коло, — нескінченна.

Множина, яка не містить жодного елемента, називається порожньою і позначається символом $\emptyset$.

Прикладом порожньої множини є множина дійсних коренів рівняння $x^2 + 1 = 0$.

Нехай задано дві множини A і B. Якщо кожен елемент множини A є елементом множини B, то множину A називають *підмножиною* множини B і пишуть $A \subset B$ або $B \supset A$ («A міститься в B» або «B містить A»), Наприклад, множина натуральних чисел є підмножиною цілих чисел.

Очевидно, що кожна множина є своєю підмножиною і порожня множина є підмножиною будь-якої множини.

Якщо множини A і B містять одні і ті самі елементи, тобто $A \subset B$ і $B \subset A$ то їх називають *рівними* і пишуть $A = B$.

Визначимо деякі операції, які можна виконувати над множинами.

Множину C, яка містить елементи, кожен з яких належить множині A або множині B, називають *об'єднанням (сумою) множин* A та B і позначають $C = A \cup B$ (рис. 1, а).

Множину D, що складається з елементів, кожен з яких одночасно належить множинам A і B, називають *перерізом (добутком) множин* A та B і позначають $D = A \cap B$ (рис. 1, б).

Множину E, що складається з елементів, кожен з яких належить множині A і не належить множині B, називають різницею множин A та B і позначають $E = A \backslash B$ (рис. 1, в).

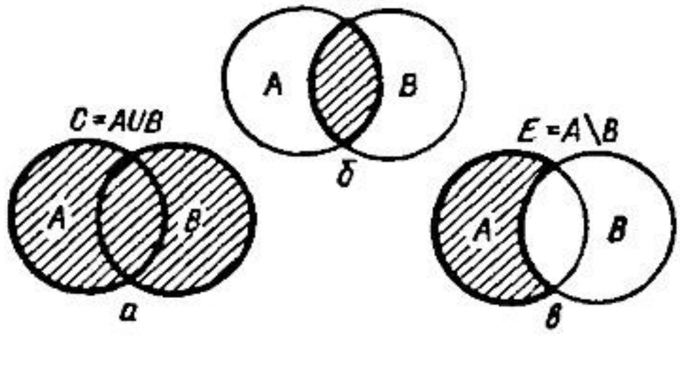


Рис 1.

Квантори.

Загальноприйняті в математиці символи і позначення називають кванторами:

$\Leftrightarrow$ − рівносильно,

$\Rightarrow$ − слідує,

$\exists$ − існує,

$\exists!$ − існує єдиний, єдина, єдине (в залежності від контексту),

$\forall$ − будь-який, довільний, всякий.

1.2. Сталі та змінні величини.

Величина — одне з основних математичних понять, зміст якого з розвитком математики змінювався і узагальнювався. Це поняття настільки широке і всеохоплююче, що його важко визначити. Маса, сила, тиск, напруга, довжина, об’єм, дійсне число, вектор — все це приклади величин.

На першій стадії під величиною розуміли те, що, виражаючись в певних одиницях (наприклад, довжина в метрах, маса — в грамах і т. д.), характеризується своїм числовим значенням.

Згодом величинами стали і такі поняття, як число, вектор та інші. Величини в деякому процесі можуть набувати різних або однакових числових значень. У першому випадку величина називається змінною, у другому — сталою.

Приклади.

1. Відношення довжини кола до його діаметра є величина стала для всіх кіл і дорівнює числу π.
2. Величина *x,* яка задовольняє умову $x \in [0; 1]$, є змінною величиною.
3. Якщо в різних місцях і на різних глибинах озера вимірювати одночасно тиск води і її густину, то виявиться, що тиск — змінна величина, а густину можна вважати величиною сталою.

У перших двох прикладах стала і змінна величини визначаються точно. У третьому випадку густина води, хоч і незначно, але змінюється, тому вона є сталою тільки з певною точністю. В багатьох реальних явищах можна вказати величини, які лише умовно будуть сталими.

Предметом вищої математики є вивчення змінних величин.

Стала величина вважається окремим випадком змінної: стала — це така змінна, всі значення якої рівні між собою.

Якщо величина набуває своїх значень дискретно (перервно), то її називають *послідовністю*. Якщо ж змінна величина набуває неперервних значень, то її просто називають змінною.

1.3. Означення функції.

Якщо кожному числу x з деякої числової множини X за певним правилом f поставлене у відповідність єдине число y з деякої числової множини Y, то кажуть, що задана функція $f: X \to Y$ або $y = f(x),\ x \in X$.

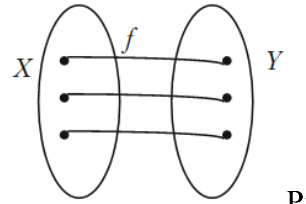


Рис 2.

Змінна x називається *незалежною змінною,* або *аргументом,* а змінна y — *залежною змінною,* або *функцією;* під символом f розуміють те правило, за яким кожному x відповідає y, або ті операції, які треба виконати над аргументом, щоб дістати відповідне значення функції.

Множина X називається *областю визначення функції.* Множина Y усіх чисел y, таких, що $y = f(x)$ для кожного $x \in X$ називається *множиною значень функції.*

1.4. Способи задання функцій.

Основні способи задання функції:

1. Аналітичний;
2. Графічний;
3. Табличний.

При аналітичному способі задання функції відповідність між аргументом і функцією задається формулою (аналітичним виразом), де зазначено, які дії потрібно виконати над значенням аргументу та сталими числами, щоб дістати відповідне значення функції.

При графічному способі функція задається своїм графіком, тобто множиною точок площини з координатами $(x; f(x))$.

Графічним способом задання функції широко користуються при дослідженнях, пов'язаних з використанням таких самописних приладів, як барограф (для запису змін атмосферного тиску), осцилограф (для запису змін електричного струму або напруги), електрокардіограф (для запису електричних явищ, пов'язаних з діяльністю серця), термограф (для запису змін температури повітря) тощо. Криві (відповідно барограма, осцилограма, електрокардіограма, термограма), що їх виписують прилади, задають цілком певні функції, які характеризують перебіг того чи іншого процесу.

Табличний спосіб задання функції $y = f(x)$ полягає в тому, що відповідність між змінними x та y задається у вигляді таблиці.

Табличний спосіб досить часто використовується при проведенні експериментів, коли задають певну сукупність $x_1, x_2, \dots, x_n$ значень аргументу і дослідним шляхом знаходять відповідні значення функції: $y_1, y_2, \dots, y_n$.

1.5. Класифікація елементарних функцій.

Основними елементарними функціями називаються такі:

1. *Степенева функція* $y = x^\alpha, \alpha \in R$. Область визначення і графіки цієї функції залежать від значення α.

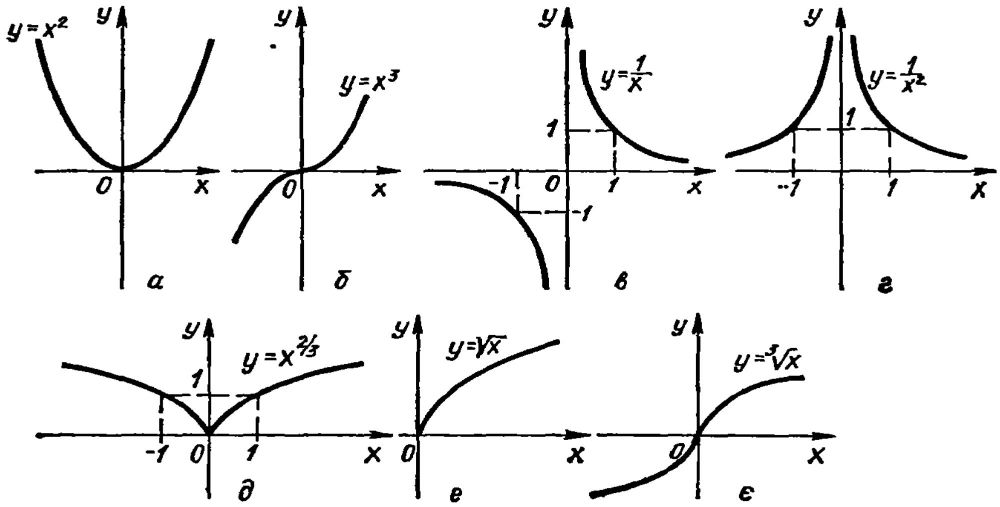


Рис 3.

2. *Показникова функція* $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

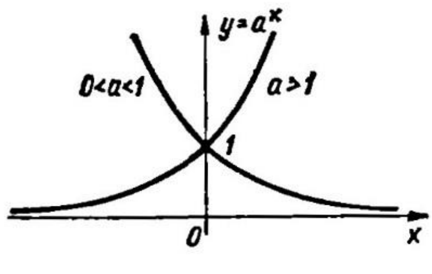


Рис 4.

4. *Логарифмічна функція* $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

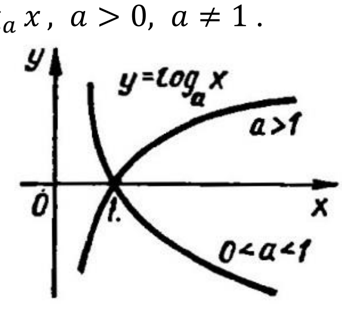


Рис 5.

5. *Тригонометричні функції*: $y = sin\, x, y = cos\, x, y = tg\, x, y = ctg\, x.$

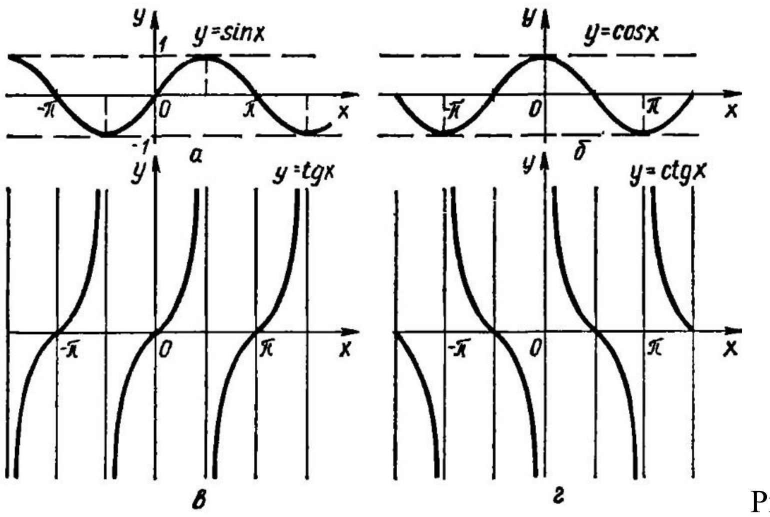


Рис 6.

5. *Обернені тригонометричні функції*: $y = arcsin\, x$, $y = arccos\, x$, $y = arctg\, x$, $y = arcctg\, x$.

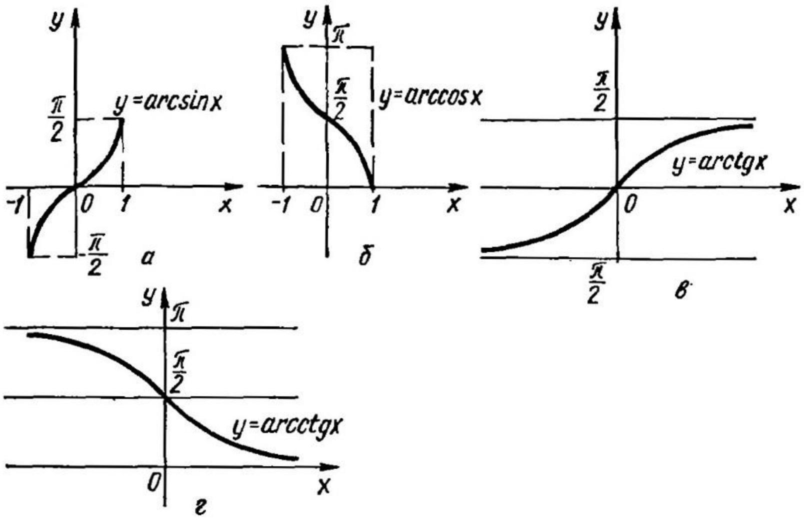


Рис 7.

1.6. Складена функція (суперпозиція функцій).

Над функціями виконують і так звану операцію *суперпозиції,* або *накладання.* Нехай функція $z = g(y)$ визначена на множині Y, а функція $y = f(x)$— на множині X, причому для кожного значення $x \in X$ відповідне значення $y = f(x) \in Y$. Тоді на множині X визначена функція $g\big(f(x)\big)$, яку називають *складеною функцією* від x, або *суперпозицією* заданих функцій, або *функцією від функції.*

Змінну $y = f(x)$ функції $z = g(y)$ називають проміжним аргументом, або внутрішньою функцією, а змінну $z = g(y)$ зовнішньою функцією.

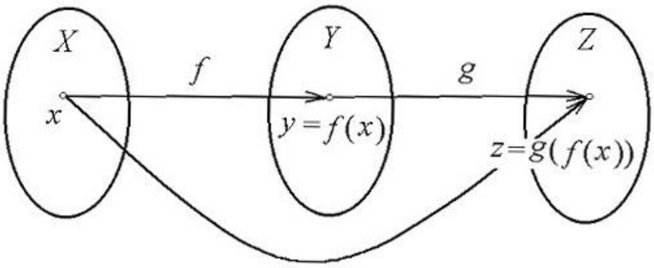


Рис 8.

Приклади.

1. Функція $y = \sqrt[5]{cos\, x}$ є суперпозицією двох основних елементарних функцій— степеневої $y = \sqrt[5]{u}$, $u \in [—1; 1]$ та тригонометричної $u = \cos x$, $x \in (—\infty; +\infty)$.

Складені функції можна утворювати за допомогою суперпозиції не тільки двох, а й більшої кількості функцій.

2. Функцію $y = 3^{sin\, x^7}$ можна розглядати як суперпозицію трьох функцій:
$y = 3^u$, $u \in [—1; 1]$, $u = \sin v$, $v \in (—\infty; +\infty)$, $v = x^7$, $x \in (—\infty; +\infty)$.

Основні елементарні функції, а також функції, утворені за допомогою формул, в яких над основними елементарними функціями виконується лише скінченне число арифметичних операцій (додавання, віднімання, множення, ділення) і суперпозицій, називаються *елементарними.*

Приклад.

$$y=\sqrt[9]{\frac{2^{arctg2x}-7\sin\log_4\left(3x^2-5x+4\right)}{6+\left(tg(9x+\ln x)-8\cos x\right)^3}}$$

1.7. Обмежені функції.

Означення. Функцію $f(x)$, визначену на множині A, називають обмеженою на цій множині, коли існує таке число $M>0$, що для всіх $x\in A$ виконується нерівність $|f(x)|\le M$.

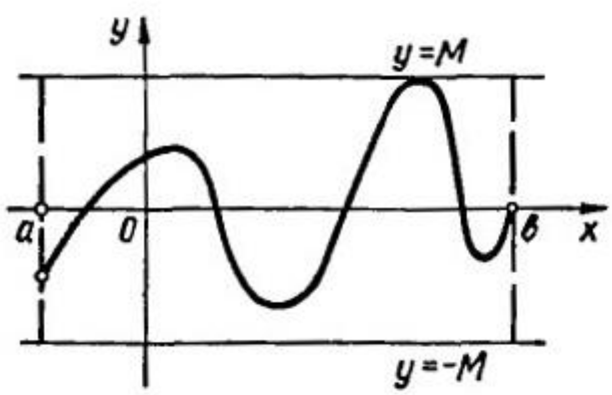
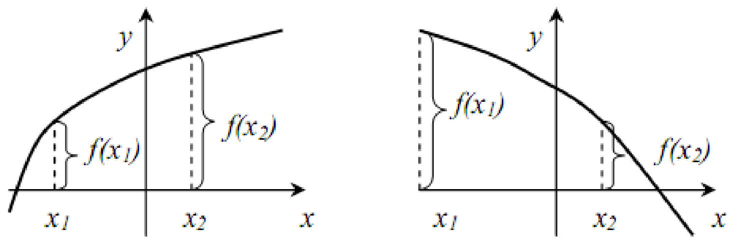


Рис 9.

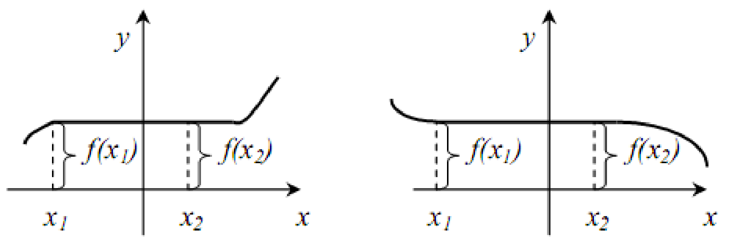
1.8. Монотонні функції.

Означення. Нехай функція $f(x)$ визначена на множині A. Якщо для двох довільних різних значень x_1 і x_2 аргументу, взятих із множини A, з нерівності $x_1<x_2$ випливає, що:

а) $f(x_1)<f(x_2)$, то функція називається зростаючою;
б) $f(x_1)>f(x_2)$, то функція називається спадною;
в) $f(x_1)\le f(x_2)$, то функція називається неспадною;
г) $f(x_1)\ge f(x_2)$, то функція називається незростаючою.



а) зростаюча б) спадна



в) неспадна г) незростаюча

Рис 10.

1.9. Парні і непарні функції.

Нехай функція $f(x)$ визначена на множині A точок осі Ox, розміщених симетрично відносно точки $x = 0$, тобто якщо $x \in A$, то й $-x \in A$.

Означення. Функцію $f(x)$ називають парною, якщо $f(-x) = f(x)$, $x \in A$, і непарною, якщо $f(-x) = -f(x)$, $x \in A$.

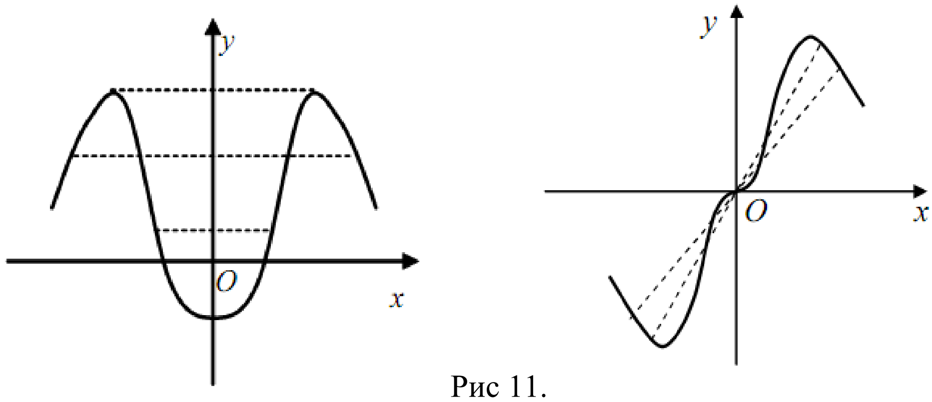


Рис 11.

Графік парної функції симетричний відносно осі ординат; графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

Функцію, що не є ні парною, ні непарною, називають функцією загального вигляду.

1.10. Періодичні функції.

Функція $f(x)$, визначена на всій числовій прямій, називається періодичною, якщо існує таке число T, $f(x+T) = f(x)$. Число T називається періодом функції. Якщо T — період функції, то її періодами є також числа kT, де $k = \pm 1, \pm 2, \dots$. Найменший з додатних періодів функції, якщо такий існує, називається основним періодом функції.

Ми визначили періодичну функцію, задану на всій числовій прямій. Більш загальним є таке означення.

Означення. Функція $f(x)$, визначена на множині X, називається періодичною на цій множині, якщо існує таке число $T \neq 0$, що $x + T \in X$ і $f(x+T) = f(x)$, $x \in X$.

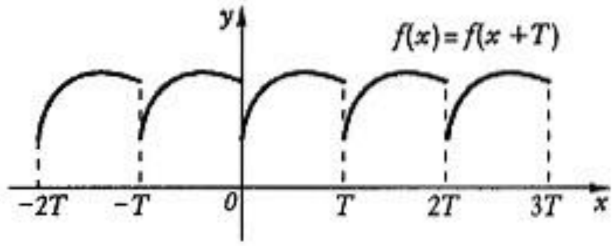


Рис 12.

1.11. Неявно задані функції.

Якщо функція задана рівнянням $y = f(x)$, розв'язаним відносно залежної змінної y, то кажуть, що функція задана у явній формі або є явною.

Під неявним заданням функції розуміють задання функції y вигляді рівняння $F(x, y) = 0$, не розв'язаного відносно залежної змінної.

Довільну явно задану функцію $y = f(x)$ можна записати як неявно задану рівнянням $f(x) - y = 0$, але не навпаки. Наприклад, функцію $cos\, y - y^2 sin\, x + xy = 0$ явно записати не можна, бо це рівняння не можна розв'язати відносно y. Тому неявна форма запису функції більш загальна, ніж явна. Неявно задану функцію називають неявною.

1.12. Обернені функції.

Нехай задана функція $y = f(x)$ з областю визначення X і множиною значень Y. Функція $f(x)$ кожному значенню $x_0 \in X$ ставить у відповідність єдине значення $y_0 \in Y$ (рис. 13). При цьому може виявитись, що різним значенням аргументу x_1, і x_2 відповідає одне й те саме значення функції y_1 (рис. 14). Додатково вимагатимемо, щоб функція $f(x)$ різним значенням x ставила у відповідність різні значення y. Тоді кожному значенню $y \in Y$ відповідатиме єдине значення $x \in X$, тобто можна визначити функцію $x = \varphi(y)$з областю визначення Y і множиною значень X. Ця функція називається оберненою функцією до даної.

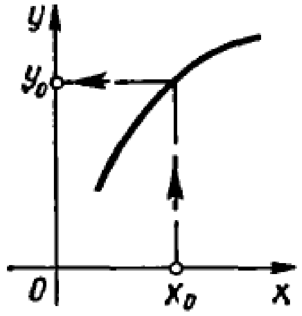


Рис 13.

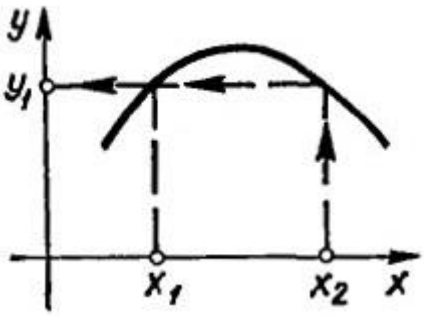


Рис 14.

Отже, функція $x = \varphi(y)$ є оберненою до функції $y = f(x)$, якщо:
1) областю визначення функції φ є множина значень функції f;
2) множина значень функції φ є областю визначення функції f;
3) кожному значенню змінної $y \in Y$ відповідає єдине значення змінної $x \in X$.

З цього випливає, що кожна з двох функцій $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ може бути названа прямою або оберненою, тобто ці функції взаємно обернені.

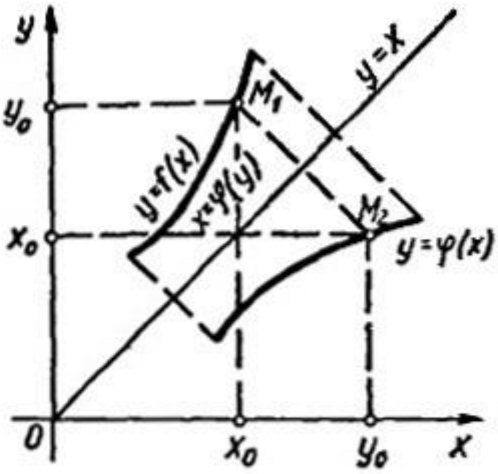


Рис 15.

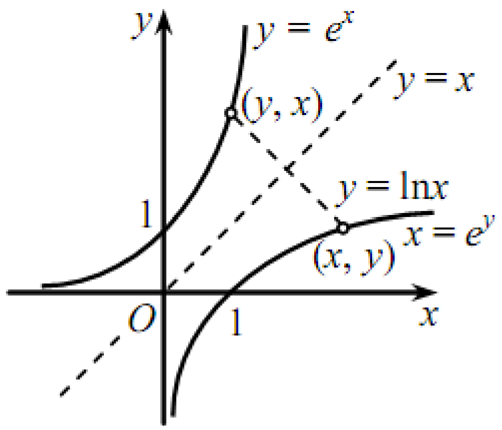


Рис 16.

§ 2. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ.

2.1. Числова послідовність.

Означення. Якщо кожному натуральному числу $n \in N$ за певним правилом ставиться у відповідність число x_n, то множину чисел $\{x_1,\ x_2, \dots, x_n, \dots\}$ називають *числовою послідовністю* (або коротко *послідовністю)* і позначають символом $\{x_n\}$.

Окремі числа $x_1,\ x_2, \dots, x_n, \dots$ називають членами або елементами послідовності: x_1— перший член послідовності, x_2 — другий і т. д., x_n —n-й, або загальний член послідовності.

Послідовність вважається заданою, якщо вказано спосіб знаходження її загального члена. Найчастіше послідовність задається формулою її загального члена.

Очевидно, що всяка функція $y = f(n)$, задана на множині натуральних чисел N, визначає деяку числову послідовність $\{y_n\}$ з загальним членом $y_n = f(n)$.

Іншими словами послідовність – це функція натурального аргументу.

Приклади:

1. $\left\{\frac{1}{n},\ n \geq 1\right\}$ або $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \frac{1}{n}, \dots\right\}$.
2. $\{(-1)^n,\ n \geq 1\}$ або $\{-1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots\}$.

2.2. Границя послідовності.

Означення. Число a називається границею послідовності $\{x_n\}$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N = N(\varepsilon)$, що при всіх $n > N$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$, або $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$.

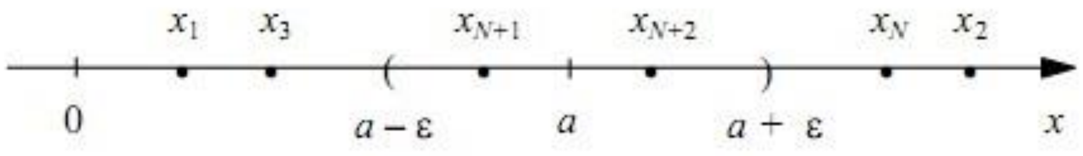


Рис 17.

Запис: $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Теорема. Якщо границя послідовності існує, то вона єдина.

2.3. Границя змінної величини.

Означення. Число a називається границею змінної величини x, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке значення x', починаючи з якого для всіх наступних значень x виконується нерівність $|x - a| < \varepsilon$.

Запис: $\lim x = a$ або $x \to a$.

2.4. Нескінченно великі змінні величини.

Якщо для довільного числа $M > 0$ існує таке значення x', починаючи з якого всі наступні значення x задовольняють нерівність $|x| > M$, то кажуть, що змінна x прямує до нескінченності.

Запис: $\lim x = \infty$ або $x \to \infty$.

Якщо змінна $x \to \infty$, то її називають нескінченно великою змінною величиною.

2.5. Властивості нескінченно великих величин.

1. Сума нескінченно великої величини і величини обмеженої є величина нескінченно велика.

2. Сума двох нескінченно великих величин одного знаку є нескінченно велика величина.

На відміну від цього сума двох нескінченно великих величин різних знаків не завжди буде нескінченно великою величиною, тому ця сума називається невизначеністю виду $\infty - \infty$.

3. Добуток двох нескінченно великих величин є величиною нескінченно великою.

4. Добуток нескінченно великої величини на величину, що більша за абсолютним значенням деякого додатного числа, також є нескінченно велика величина.

Частка двох нескінченно великих величин не завжди є нескінченно великою величиною, тому дробовий вираз, чисельник і знаменник якого нескінченно великі змінні величини, називають невизначеністю виду $\frac{\infty}{\infty}$.

2.6. Границя функції у точці.

Припустимо, що незалежна змінна x має границю x_0. Розглянемо зміну функції $y = f(x)$, при $x \to x_0$.

Нехай функція $y = f(x)$, визначена в деякому околі X точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0.

Означення границі за Гейне. *Число A називають границею функції $y = f(x)$ в точці x_0 (або при $x \to x_0$), якщо для довільної збіжної до x_0 послідовності $\{x_n\}$, де $x_n \in X$, $x_n \neq x_0$, послідовність $\{f(x_n)\}$, має границю, яка дорівнює числу A.*

Запис: $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$.

Функція $f(x)$ може мати в точці x_0 тільки одну границю. Це випливає з того, що кожна змінна може мати лише одну границю.

Геометричний зміст границі функції: співвідношення $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ означає, що для всіх точок x досить близьких до точки x_0 відповідні значення функції як завгодно мало відрізняються від точки A.

З цим пов'язане друге означення границі. Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі X точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0.

Означення границі за Коші. Число A називається границею функції в точці x_0, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх $x \in X$, які задовольняють нерівність

$$0 < |x - x_0| < \delta,$$

виконується нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Це означення коротко можна записати так:

$$(\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\colon\ 0 < |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - A| < \varepsilon)\ \Leftrightarrow\ \lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Геометрично це ілюструється так: число A є границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$, якщо для довільного ε-околу точки A знайдеться δ-окіл точки x_0 такий, що коли значення аргументу x взяти з множини $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)\backslash\{x_0\}$, то відповідні значення функції $f(x)$ лежатимуть в ε-околі точки A (рис. 18).

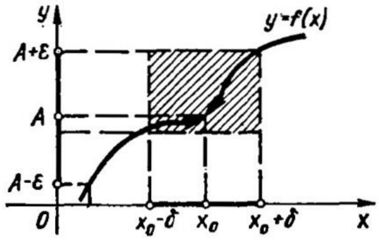


Рис 18.

2.7. Нескінченно малі величини.

Нескінченно малою величиною називається змінна величина, границя якої дорівнює нулю. Зокрема, функція $\alpha(x)$ називається нескінченно малою величиною (або нескінченно малою функцією) при $x \to x_0$ або $x \to \infty$, якщо

$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ або $\lim_{x \to \infty} \alpha(x) = 0$.

2.8. Властивості нескінченно малих величин.

1. Для того щоб число А було границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$, необхідно і достатньо, щоб різниця $f(x) - A$ була нескінченно малою величиною, тобто

$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, де $\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

2. Якщо функція $\alpha(x)$ — нескінченно мала величина при $x \to x_0$ $(\alpha \neq 0)$, то функція $\frac{1}{\alpha(x)}$ є нескінченно великою величиною при $x \to x_0$, і навпаки, якщо функція $\beta(x)$ — нескінченно велика величина при $x \to x_0$, то $\frac{1}{\beta(x)}$ є нескінченно малою величиною при $x \to x_0$.

3. Сума скінченного числа нескінченно малих величин в величина нескінченно мала.

4. Добуток обмеженої функції на нескінченно малу є величина нескінченно мала.

5. Частка від ділення нескінченно малої величини на функцію, яка має відмінну від нуля границю, є величина нескінченно мала.

2.9. Односторонні границі.

У деяких випадках спосіб наближення аргументу x до x_0 суттєво впливає на значення границі функції. Тому доцільно ввести поняття односторонніх границь.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0.

Означення. *Число A називається границею функції $y = f(x)$ зліва (або лівою границею) в точці x_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при $x \in (\,x_0 - \delta;\ x_0)$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.*

Означення. *Число B називається границею функції $y = f(x)$ справа (або правою границею) в точці x_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при $x \in (\,x_0;\ x_0 + \delta)$ виконується нерівність $|f(x) - B| < \varepsilon$.*

Ліву і праву границі функції називають односторонніми границями і позначають

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) = A$$

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) = B\,.$$

Якщо $x_0 = 0$, то записують

$$\lim_{x \to -0} f(x) = f(-0) = A$$

$$\lim_{x \to +0} f(x) = f(+0) = B\,.$$

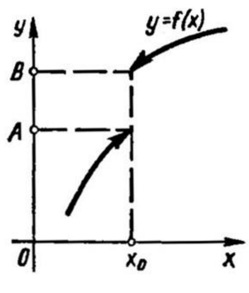


Рис. 19.