ЛЕКЦІЯ АРИФМЕТИЧНІ ОСНОВИ ЦИФРОВОЇ ЕЛЕКТРОНІКИ

Довжина розрядної сітки – термін, що використовується для визначення довжини числа.

Наприклад, $96_{10}=140_8=10120_3=1100000_2$.

$$\boldsymbol{X_{max}=q^n-1.}$$

Діапазон представлення (ДП) чисел в заданій системі числення – інтервал числової осі, укладений між максимальними і мінімальними числами, представленими довжиною розрядної сітки

$X_{max} \geq ДП \geq X_{min}$. Звичайно $X_{min} = 0$.

Таблиця 1. Таблиця відповідності чисел в різних системах числення

Основа	10	2	8	16
Числа	0	00	0	0
	1	01	1	1
	2	10	2	2
	3	11	3	3
	4	100	4	4
	5	101	5	5
	6	110	6	6
	7	111	7	7
	8	1000	10	8
	9	1001	11	9
	10	1010	12	A
	11	1011	13	B
	12	1100	14	C
	13	1101	15	D
	14	1110	16	E
	15	1111	17	F
	16	10000	20	10
	17	10001	21	11

Арифметичні операції над двійковими числами

Додавання :

$$0 + 0 = 0$$
$$0 + 1 = 1$$
$$1 + 0 = 1$$
$$1 + 1 = 10$$ – відбувається перенос одиниці в старший розряд

Віднімання :

$$0 – 0 = 0$$
$$1 – 0 = 1$$
$$1 – 1 = 0$$
$$10 – 1 = 1$$ – відбувається позичка одиниці в старшому розряді

Множення :

$$0 \times 0 = 0$$
$$0 \times 1 = 0$$
$$1 \times 0 = 0$$
$$1 \times 1 = 1$$

Таблиця 2. Таблиця відповідності 16- та 8-кових цифр і двійкових комбінацій

16-кова цифра	2-кова комбінація	16-кова цифра	2-кова комбінація
0	0000	8	1000
1	0001	9	1001
2	0010	A	1010
3	0011	B	1011
4	0100	C	1100
5	0101	D	1101
6	0110	E	1110
7	0111	F	1111

8-кова цифра	2-кова комбінація
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

1 Кбайт = 1024 байт;
1 Мбайт = 1024 Кбайт;
1 Гбайт = 1024 Мбайт.

Фіксована форма запису – це звична для нас форма, в якій положення крапки, що відділяє цілу частину числа від дробової, фіксується в певному місці відносно розрядів числа.

Якщо крапка фіксована перед старшим розрядом, то по абсолютному значенню числа можна представити в діапазоні

$$.111...11 \le X \le .000...00$$

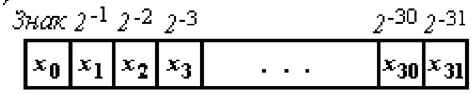
що відповідає десятковим значенням $1-2^{-n} \le X \le 0$ (n – число розрядів).

Якщо крапка фіксована після молодшого розряду, то в десятковому зображенні числа можуть бути представлені в діапазоні

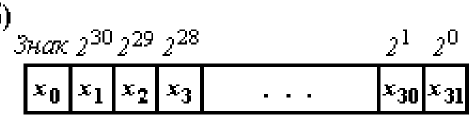
$$2^n - 1 \le X \le 0.$$

$$0 \le X \le 1 – 2^{-31}.$$

а)



б)



Представлення двійкового числа у формі з фіксованою крапкою.
а – числа по модулю менше 1; ***б*** – цілі числа.

$$0 \le X \le 2^{31} - 1,$$

Представлення чисел у формі з плаваючою крапкою.

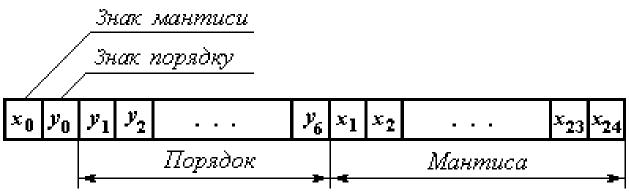
$$\boldsymbol{X = q^{p} \times M},$$

де $\boldsymbol{q}$ – основа системи числення;

$\boldsymbol{p}$ – порядок числа (ціле число);

$\boldsymbol{M}$ – мантиса числа (дробове число).

1234,567 = $10^4 \times 0{,}1234567$; 0,0009876 = $10^{-3} \times 0{,}9876$.



$\boldsymbol{N} = 2^{\boldsymbol{k}}$, де k – кількість розрядів, що відводяться на порядок..

$$0{,}0009876 = \mathbf{10^{-3}\times 0{,}9876} = 10^{-4}\times 9{,}876 = 10^{-2}\times 0{,}09876 = \ldots$$

Приведення числа до нормалізованого виду називається ***нормалізацією***..

Кодування чисел в МП-системах

Прямий код. Зображення двійкового числа $\boldsymbol{X}$ в прямому коді $[\boldsymbol{X}]_{пр}$ засноване на представленні його абсолютного значення із закодованим знаком.

У загальному випадку формула для утворення прямого коду двійкового числа $\boldsymbol{X}$ має вигляд

$$[\boldsymbol{X}]_{пр} = \begin{cases} \boldsymbol{X}, & \textit{якщо} \ \ \boldsymbol{X} \ge 0; \\ 1 + \boldsymbol{X}, & \textit{якщо} \ \ \boldsymbol{X} \le 0. \end{cases}$$

Прямий код $[\boldsymbol{X}]_{пр}$ додатного числа $\boldsymbol{X}$ в закодованому вигляді повністю співпадає із записом самого числа: якщо $\boldsymbol{X} = +\,0\,.\,\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2 \ldots \boldsymbol{x}_m$, то $[\boldsymbol{X}]_{пр} = 0\,.\,\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2\ldots\boldsymbol{x}_m$.

Прямий код $[\boldsymbol{X}]_{пр}$ від’ємного числа $-\boldsymbol{X}$ в закодованому вигляді має такий запис: якщо $\boldsymbol{X} = -\,0\,.\,\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2 \ldots \boldsymbol{x}_m$, то $[\boldsymbol{X}]_{пр} = 1\,.\,\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2\ldots\boldsymbol{x}_m$.

Приклади:

$$\boldsymbol{X} = +0.11010,$$

$$[\boldsymbol{X}]_{пр} = 0.11010;$$

$$\boldsymbol{X} = -0.01010,$$

$$[\boldsymbol{X}]_{пр} = 1.01010.$$

Зображення нуля в прямому коді неоднозначне

$$0 = +\,0 = \ 0,\ [+0]_{пр} = 0.00\ldots00;\ [-0]_{пр} = 1.00\ldots00.$$

Обернений код.

$2-2^{-m}$ (m – кількість розрядів, 2 – основа двійкової системи числення). Код, утворений доповненням до 2, називається додатковим, а код утворений доповненням до $2-2^{-m}$, – оберненим. Обернений код числа $\boldsymbol{X}$ позначається $[\boldsymbol{X}]_{обр}$.

$$[\boldsymbol{X}]_{обр} = \begin{cases} \boldsymbol{X}, & \textit{якщо} \ \ \boldsymbol{X} \ge 0; \\ 2 - 2^{-m} + \boldsymbol{X}, & \textit{якщо} \ \ \boldsymbol{X} < 0. \end{cases}$$

Обернений код від’ємного числа утворюється так:

1. в знаковому розряді записується одиниця;
2. в цифрових розрядах одиниці замінюються нулями, а нулі – одиницями.

Приклади:

$X = +0.10110$,

$[X]_{обр} = 0.10110$;

$X = -0.01001$,

$[X]_{обр} = 1.10110$.

Отже,

$[+0]_{обр} = [+0.00\ldots0]_{обр} = 0.00\ldots0$;

$[-0]_{обр} = [-0.00\ldots0]_{обр} = 10.00\ldots0 - 0.00\ldots01 = =1.11\ldots11$.

Приклад: скласти числа $X = +\ 0.101$ і $Y = -\ 0.001$ в обернених кодах:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} [X]_{обр} = 0.101 \\ [Y]_{обр} = 1.110 \end{array} \\ \hline 10.011 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} \mathbf{1}0.011 \\ \downarrow \rightarrow 1 \end{array} \\ \hline 0.100 \end{array}$$

При використанні цілих чисел формула для утворення оберненого коду має вигляд

$$[X]_{обр} = \begin{cases} X, & якщо\ \ X \geq 0; \\ 2^n - 2^0 + X, & якщо\ \ X < 0, \end{cases}$$

де n – число розрядів.

Додатковий код.

Для дробового двійкового числа

$$[X]_{дод} = \begin{cases} X, & якщо\ \ X \geq 0; \\ 2 + X, & якщо\ \ X < 0. \end{cases}$$

Для цілого двійкового числа:

$$[X]_{дод} = \begin{cases} X, & якщо\ \ X \geq 0; \\ 2^n + X, & якщо\ \ X < 0, \end{cases}$$

де n – число розрядів.

Додатковий код від’ємного двійкового числа утворюється так:

1. в знаковому розряді ставиться одиниця;
2. в усіх цифрових розрядах одиниці замінюються нулями, а нулі – одиницями;
3. до молодшого розряду числа додається одиниця.

Приклад:

$\boldsymbol{X}$ = +0.10010,

$[\boldsymbol{X}]_{\text{дод}}$ = 0.10010;
$\boldsymbol{X}$ = –0.0110,
$[\boldsymbol{X}]_{\text{дод}}$ = 1.1001+0.0001=1.1010;
$\boldsymbol{X}$ = –0.11001,
$[\boldsymbol{X}]_{\text{дод}}$ = 1.00110+0.00001=1.00111;

[+0]дод = [–0]дод = 0.00…0.

Приклад 1:

скласти числа $\boldsymbol{X}$**= +** 0.101 і $\boldsymbol{Y}$= – 0.001 в додаткових кодах:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} [\boldsymbol{X}]_{\text{дод}} = 0.101 \\ [\boldsymbol{Y}]_{\text{дод}} = 1.111 \end{array} \\ \hline 0.100 \end{array}$$

Приклад 2:

скласти додатні числа $\boldsymbol{X}$ **=** 0.101 і $\boldsymbol{Y}$= 0.100:

$$\begin{array}{c} + \begin{array}{r} [\boldsymbol{X}]_{\text{дод}} = 0.101 \\ [\boldsymbol{Y}]_{\text{дод}} = 0.100 \end{array} \\ \hline [\boldsymbol{X}]_{\text{дод}} + [\boldsymbol{Y}]_{\text{дод}} = 1.001 \rightarrow \textit{Результат} \end{array}.$$