

ПРАКТИЧНА РОБОТА №2

Форми представлення двійкових чисел

1. Мета роботи

Вивчити форми представлення двійкових чисел і виконання арифметичних операцій в двійковому коді над числами з плаваючою комою

2. Теоретичні відомості

Нормальна форма з плаваючою комою числа A має структуру:

$$A = m \cdot p^\beta, \quad (1)$$

де m - мантиса числа A ,

p^β - характеристика числа A ,

β - порядок числа A ,

p - основа системи числення.

Часто використовується нормалізована форма запису, для якої справедлива умова

$$p^{-1} \leq |m| < 1. \quad (2)$$

Так, числа $A = 17,31 \cdot 10^2$ і $B = -0,00537 \cdot 10^{-4}$ у нормалізованій формі повинні бути записані так: $A = 0,1731 \cdot 10^4$ і $B = -0,537 \cdot 10^{-6}$.

Для запису десяткового (чи іншого) числа у двійковій нормалізованій формі з плаваючою комою необхідно:

- перевести дане число у двійкову систему числення за правилами, означеними вище;

- виконати нормалізацію мантиси згідно з умовою (5);

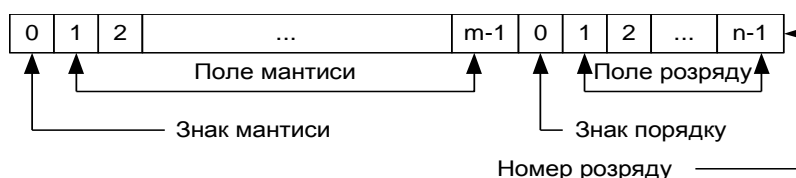
- врахувати процедуру нормалізації у величині порядку числа.

Наприклад, якщо для представлення мантиси числа $A = -173,23_{10}$ виділяється $m = 16$ двійкових розрядів зі знаком, а для представлення порядку $n = 6$ двійкових розрядів зі знаком, то після виконання процедури переведення числа A у двійкову систему одержимо:

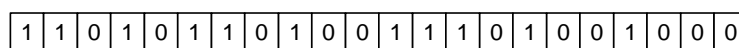
$$\begin{aligned} A = -173,23_{10} &= -10101101,0011101_2 = \\ &= -0,101011010011101_2 \cdot 2^8. \end{aligned}$$

Тому $|m| = 0,101011010011101_2$, $p_a = 8_{10} = +1000_2$.

Загальний вигляд представлення числа у формі з плаваючою комою показано на рис. 1.а. Для заданих m і n розглянутого вище прикладу представлення числа A показано на рис. 1.б.



а)



б).

Рис.1. Представлення чисел у формі з плаваючою комою

На рис. 1.б враховано, що знак мантиси числа A від'ємний (у знаковому розряді мантиси записано число 1).

При використанні форми запису числа з плаваючою комою у двійковій системі числення діапазон представлення числа N буде

$$2^{-2^{(n-1)}} \leq N \leq [1 - 2^{-(m-1)}] \cdot 2^{2^{(n-1)}}, \quad (3)$$

де m - кількість розрядів у запису мантиси числа, враховуючи знаковий розряд,
 n - кількість розрядів у запису порядку числа, враховуючи знаковий розряд,

Максимальна відносна похибка представлення дійсного числа у формі з плаваючою комою дорівнює

$$\delta_{\max} \approx 2^{-(m-1)} \quad (4)$$

При використанні форми запису числа з фіксованою комою положення коми може бути або перед старшим розрядом або після молодшого розряду. Приклади формату даних для представлення двійкових чисел у цих варіантах зображені на рис. 2.

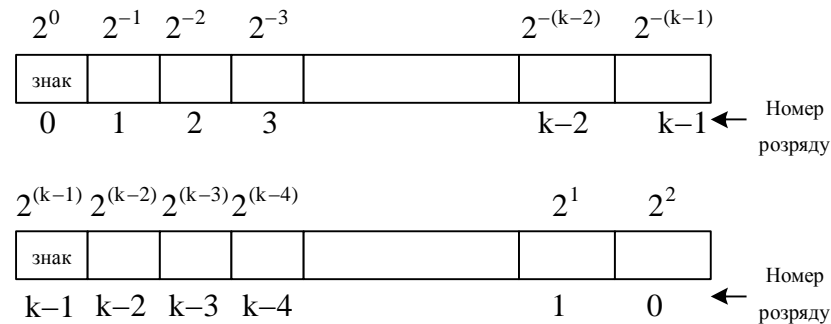


Рис. 2. Приклади формату даних у формі із фіксованою комою

Для визначення масштабних коефіцієнтів при представленні числа у двійковій системі з фіксованою комою необхідно:

- перевести дане число у двійкову систему числення за правилами, означеними вище;
- перенести кому відповідно з вибраною формою запису числа (положення коми перед старшим розрядом або положення коми після молодшого розряду);
- врахувати процедуру перенесення коми у величині масштабного коефіцієнту.

Наприклад, якщо для представлення числа $B = +217,61$ виділяється 16 двійкових розрядів зі знаком, то після виконання процедури переведення числа B у двійкову систему отримаємо

$$\begin{aligned} B = +217,61_{10} &= +11011001,1001110 = \\ &= +0,110110011001110 \cdot 2^8. \end{aligned}$$

Масштабний коефіцієнт $s = 2^8$.

При використанні форми запису числа з фіксованою комою у двійковій системі числення діапазон представлення числа N буде:

$$2^{-(k-1)} \leq |N| \leq 1 - 2^{-(k-1)}. \quad (5)$$

де k - кількість розрядів у запису числа, включаючи знаковий розряд.

При цьому для максимального правильного дробу відносна похибка представлення числа не перевищує величини

$$\delta[N_{\max}] \approx 2^{-(k-2)} \quad (6)$$

Для мінімального правильного дробу відносна похибка представлення числа дорівнює:

$$\delta[N_{\min}] \approx 1/2.$$

3. Завдання

Завдання 1. Згідно з вказаним викладачем варіантом запишіть зображення дійсних десяткових чисел G і Q (табл. 1) в формі з плаваючою комою, якщо для мантиси виділяється m двійкових розрядів зі знаком, а для порядку - n двійкових розрядів зі знаком.

Для тих же чисел визначте масштабні коефіцієнти та запишіть зображення дійсних десяткових чисел G і Q в формі з фіксованою комою при умові, що машинне зображення кожного числа з фіксованою комою містить k двійкових розрядів зі знаком.

Для обох форм (плаваюча і фіксована кома) визначте діапазон і максимальну відносну похибка зображення дійсних чисел для заданих m, n, k .

Таблиця 1

№ варіанту	1	2	3	4	5
G	-343,87	431,67	-199,57	367,47	-514,37
Q	0,097	-0,017	0,095	-0,021	0,092
m	16	17	18	19	20
n	10	9	8	7	6
k	16	17	18	19	20
№ варіанту	6	7	8	9	10
G	152,17	-672,93	183,76	-514,56	471,36
Q	-0,025	0,089	-0,027	0,086	-0,032
m	16	17	18	19	20
n	5	6	7	8	9
k	21	22	23	24	25
№ варіанту	11	12	13	14	15
G	-337,26	523,06	-924,85	731,65	-265,54
Q	0,083	-0,020	0,080	-0,026	0,078
m	16	17	18	19	20
n	10	9	8	7	6
k	26	27	28	29	30
№ варіанту	16	17	18	19	20
G	143,45	-371,35	732,43	-155,05	462,94
Q	-0,030	0,075	-0,018	0,068	-0,035
m	16	17	20	19	20
n	12	11	12	9	8
k	19	20	23	22	23
№ варіанту	21	22	23	24	25
G	-629,84	715,54	-461,34	729,14	-123,04
Q	0,065	-0,041	0,061	-0,044	0,057
m	16	17	18	19	20
n	7	6	5	4	10
k	24	25	26	27	28
№ варіанту	26	27	28	29	30
G	291,83	-367,63	712,48	-179,24	427,18
Q	-0,050	0,052	-0,054	0,048	-0,058
m	16	17	18	19	20
n	5	6	7	8	9
k	30	20	21	22	23

Завдання 2. Виконайте такі дії над числами P_2 і L_2 , що задані в формі з плаваючою комою згідно з вказаним викладачем варіантом (табл. 2):

а). Додавання у прямому коді.

б). Множення, використовуючи метод “додавання + зсув”, починаючи з старшого або молодшого розряду згідно варіанту.

в). Ділення, використовуючи метод “віднімання + зсув” з відновленням або без відновлення остачі згідно варіанту.

Таблиця 2

№ варіанту	1	2
P	$111100,1101 \cdot 2^{-5}$	$111101,1001 \cdot 2^{-5}$
L	$-111110,1110 \cdot 2^{-3}$	$111110,1110 \cdot 2^{-3}$
Початковий розряд	молодший	старший
Остача	з відновленням	без відновлення
№ варіанту	3	3
P	$111100,0111 \cdot 2^{-3}$	$111101,0101 \cdot 2^{-4}$
L	$111101,1010 \cdot 2^{-2}$	$111110,0100 \cdot 2^{-2}$
Початковий розряд	молодший	старший
Остача	з відновленням	без відновлення
№ варіанту	5	6
P	$111000,1100 \cdot 2^{-3}$	$111001,0101 \cdot 2^{-2}$
L	$111101,0011 \cdot 2^{-5}$	$111101,0110 \cdot 2^{-3}$
Початковий розряд	молодший	старший
Остача	з відновленням	без відновлення
№ варіанту	7	8
P	$111010,1010 \cdot 2^{-3}$	$111000,1011 \cdot 2^{-4}$
L	$111100,1110 \cdot 2^{-4}$	$111100,1101 \cdot 2^{-3}$
Початковий розряд	молодший	старший
Остача	з відновленням	без відновлення
№ варіанту	9	10
P	$111011,1011 \cdot 2^{-2}$	$111011,1101 \cdot 2^{-2}$
L	$111110,1100 \cdot 2^{-3}$	$111100,0011 \cdot 2^{-3}$
Початковий розряд	молодший	старший
Остача	з відновленням	без відновлення
№ варіанту	11	12
P	$111010,1010 \cdot 2^{-4}$	$111001,0011 \cdot 2^{-3}$
L	$111101,0101 \cdot 2^{-3}$	$111110,1001 \cdot 2^{-4}$
Початковий розряд	молодший	старший
Остача	з відновленням	без відновлення
№ варіанту	13	14
P	$111001,0011 \cdot 2^{-5}$	$111001,0001 \cdot 2^{-4}$
L	$111101,1010 \cdot 2^{-4}$	$111110,0101 \cdot 2^{-5}$
Початковий розряд	молодший	старший
Остача	з відновленням	без відновлення
№ варіанту	15	16
P	$110101,1101 \cdot 2^{-5}$	$110100,1010 \cdot 2^{-5}$
L	$111000,1101 \cdot 2^{-6}$	$111000,0010 \cdot 2^{-6}$
Початковий розряд	молодший	старший
Остача	з відновленням	без відновлення

№ варіанту	17	18
P	$110011,0110 \cdot 2^{-6}$	$101000,1011 \cdot 2^{-5}$
L	$111010,1001 \cdot 2^{-5}$	$101110,1011 \cdot 2^{-3}$
Початковий розряд	молодший	старший
Остача	з відновленням	без відновлення
№ варіанту	19	20
P	$110101,0111 \cdot 2^{-2}$	$110101,1101 \cdot 2^{-4}$
L	$111001,1100 \cdot 2^{-4}$	$111001,0111 \cdot 2^{-2}$
Початковий розряд	молодший	старший
Остача	з відновленням	без відновлення
№ варіанту	21	22
P	$110100,1101 \cdot 2^{-2}$	$110100,0101 \cdot 2^{-4}$
L	$111011,1100 \cdot 2^{-4}$	$111011,0100 \cdot 2^{-2}$
Початковий розряд	молодший	старший
Остача	з відновленням	без відновлення
№ варіанту	23	24
P	$110101,1011 \cdot 2^{-3}$	$110101,1101 \cdot 2^{-6}$
L	$111100,1010 \cdot 2^{-6}$	$111010,1100 \cdot 2^{-3}$
Початковий розряд	молодший	старший
Остача	з відновленням	без відновлення
№ варіанту	25	26
P	$101110,1010 \cdot 2^{-3}$	$101110,1001 \cdot 2^{-6}$
L	$111010,0101 \cdot 2^{-6}$	$111001,1001 \cdot 2^{-3}$
Початковий розряд	молодший	старший
Остача	з відновленням	без відновлення
№ варіанту	27	28
P	$101010,1110 \cdot 2^{-5}$	$101001,1011 \cdot 2^{-5}$
L	$110011,0101 \cdot 2^{-2}$	$110010,1000 \cdot 2^{-2}$
Початковий розряд	молодший	старший
Остача	з відновленням	без відновлення
№ варіанту	29	30
P	$101001,1010 \cdot 2^{-2}$	$101110,1100 \cdot 2^{-2}$
L	$110001,1010 \cdot 2^{-5}$	$110010,1010 \cdot 2^{-5}$
Початковий розряд	молодший	старший
Остача	з відновленням	без відновлення

4. Приклад виконання

Завдання 1. Згідно з вказаним викладачем варіантом запишіть зображення дійсних десяткових чисел G і Q (табл. К4) в формі з плаваючою комою, якщо для мантиси виділяється m двійкових розрядів зі знаком, а для порядку - n двійкових розрядів зі знаком.

Для тих же чисел визначте масштабні коефіцієнти та запишіть зображення дійсних десяткових чисел G і Q в формі з фіксованою комою при умові, що машинне зображення кожного числа з фіксованою комою містить k двійкових розрядів зі знаком.

Для обох форм (плаваюча і фіксована кома) визначте діапазон і максимальну відносну похибка зображення дійсних чисел для заданих m , n , k .

$$G = 276,15 \quad Q = -0,033 \quad m = 18 \quad n = 10 \quad k = 21.$$

Для рішення задачі необхідно перевести числа з десяткової системи в двійкову систему.

$$G = 276,15_{10} = 100010100,00100110011_2$$

$$Q = -0,060_{10} = -0,00001000011100101011_2$$

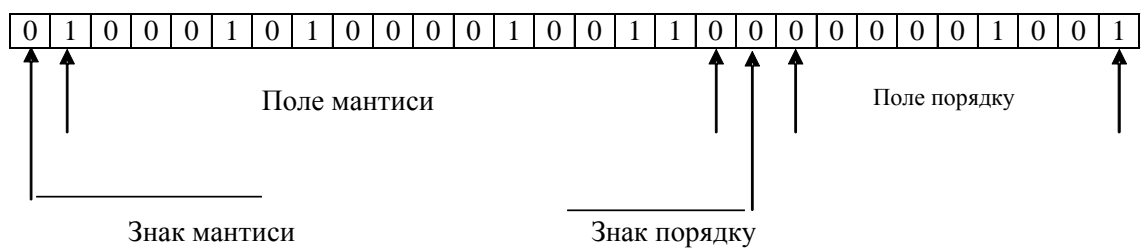
Нормалізуємо число **G**

$$G = 100010100,00100110011 = 0,10001010000100110011 \cdot 2^9$$

Мантиса дорівнює: $|m_G| = 0,10001010000100110011$

Порядок дорівнює: $P_G = 9_{10} = 1001_2$

Тоді врахувавши, що $m = 18$, $n = 10$, загальний вигляд числа **G** з плаваючою комою буде мати вигляд:



Нормалізуємо число **Q**

$$Q = -0,00001000011100101011 = -0,1000011100101011 \cdot 2^{-4}$$

$|m_Q| = -0,1000011100101011$

$P_Q = -4_{10} = -100_2$

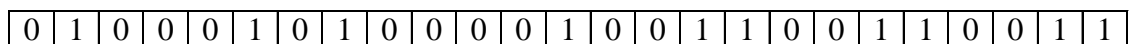
Тоді врахувавши, що $m = 18$, $n = 10$, загальний вигляд числа **Q** з плаваючою комою буде мати вигляд:



Для чисел **G** и **Q** визначимо масштабні коефіцієнти за умовою, що машинне зображення кінцевого числа с фіксованою комою містить **k=21** двійкових розрядів зі знаком.

Для числа **G**:

$$G = 276,15_{10} = +100010100,00100110011 = 0,10001010000100110011 \cdot 2^9$$



Масштабний коефіцієнт **S = 2⁹**

Для числа Q :

$$Q = -0,033_{10} = -0,000010000111001010110000001_2 = -0,10000111001010110000001 \cdot 2^{-4}$$

1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Масштабний коефіцієнт $S = 2^{-4}$

Для обох форм визначимо діапазон и максимальну відносну похибку зображення дійсних чисел для заданих значень m, n, k .

Визначимо діапазон представлення числа с плаваючою комою:

$$2^{-2^{(n-1)}} \leq N \leq [1 - 2^{-(m-1)}] \cdot 2^{2^{(n-1)}}$$

$$2^{-2^9} \leq N \leq [1 - 2^{-17}] \cdot 2^{2^9}$$

Визначимо максимальну відносну похибку:

$$\delta_{\max} \approx 2^{-(m-1)}$$

$$\delta_{\max} \approx 2^{-(18-1)} = 2^{-17}$$

Визначимо діапазон представлення числа с фіксованою комою:

$$2^{-(k-1)} \leq |N| \leq 1 - 2^{-(k-1)}$$

$$2^{-(21-1)} \leq |N| \leq 1 - 2^{-(21-1)}$$

$$2^{-20} \leq |N| \leq 1 - 2^{-20}$$

Визначимо максимальну відносну похибку:

$$\delta[N_{\max}] \approx 2^{-(k-2)}$$

$$\delta[N_{\max}] \approx 2^{-(21-2)} = 2^{-19}$$

Завдання 2. Виконайте такі дії над числами P_2 і L_2 , що задані в формі з плаваючою комою згідно з вказаним викладачем варіантом (табл. К6):

а). Додавання у прямому коді.

б). Множення, використовуючи метод “додавання + зсув”, починаючи з старшого або молодшого розряду згідно варіанту.

в). Ділення, використовуючи метод “віднімання + зсув” з відновленням або без відновлення остачі згідно варіанту.

а). Додавання у прямому коді.

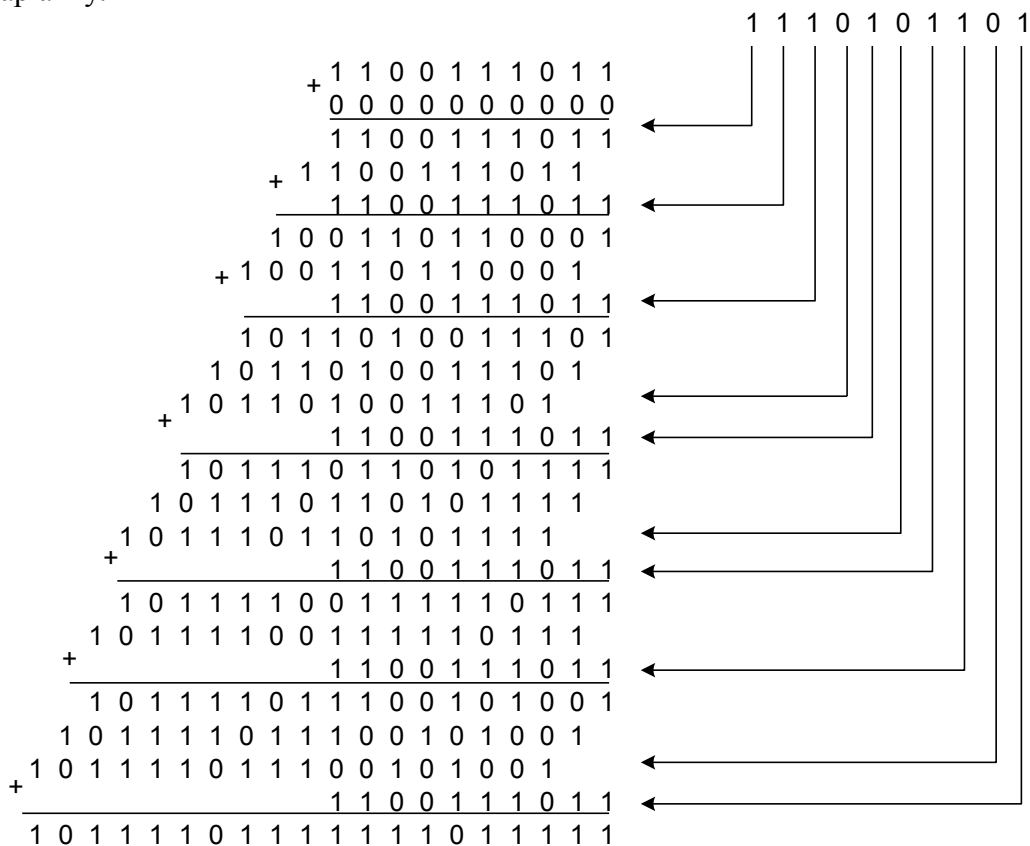
$$P = 110011,1011 \cdot 2^{-6} = 0,1100111011 \cdot 2^0$$

$$L = 111010,1101 \cdot 2^5 = 11101011010 \cdot 2^0$$

$$\begin{array}{r}
 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
 +\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1 \\
 \hline
 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1
 \end{array}$$

$$P + L = 11101011010,1100111011 \cdot 2^0$$

б). Множення, використовуючи метод “додавання + зсув”, починаючи з старшого розряду згідно варіанту.



Знак результату – плюс.

$$P * L = 101111011111,11011111 \cdot 2^{-1} = 10111101111,11011111$$

в). Ділення, використовуючи метод “віднімання + зсув” без відновлення остачі згідно варіанту.

$$P = 110011,1011 \cdot 2^{-6}$$

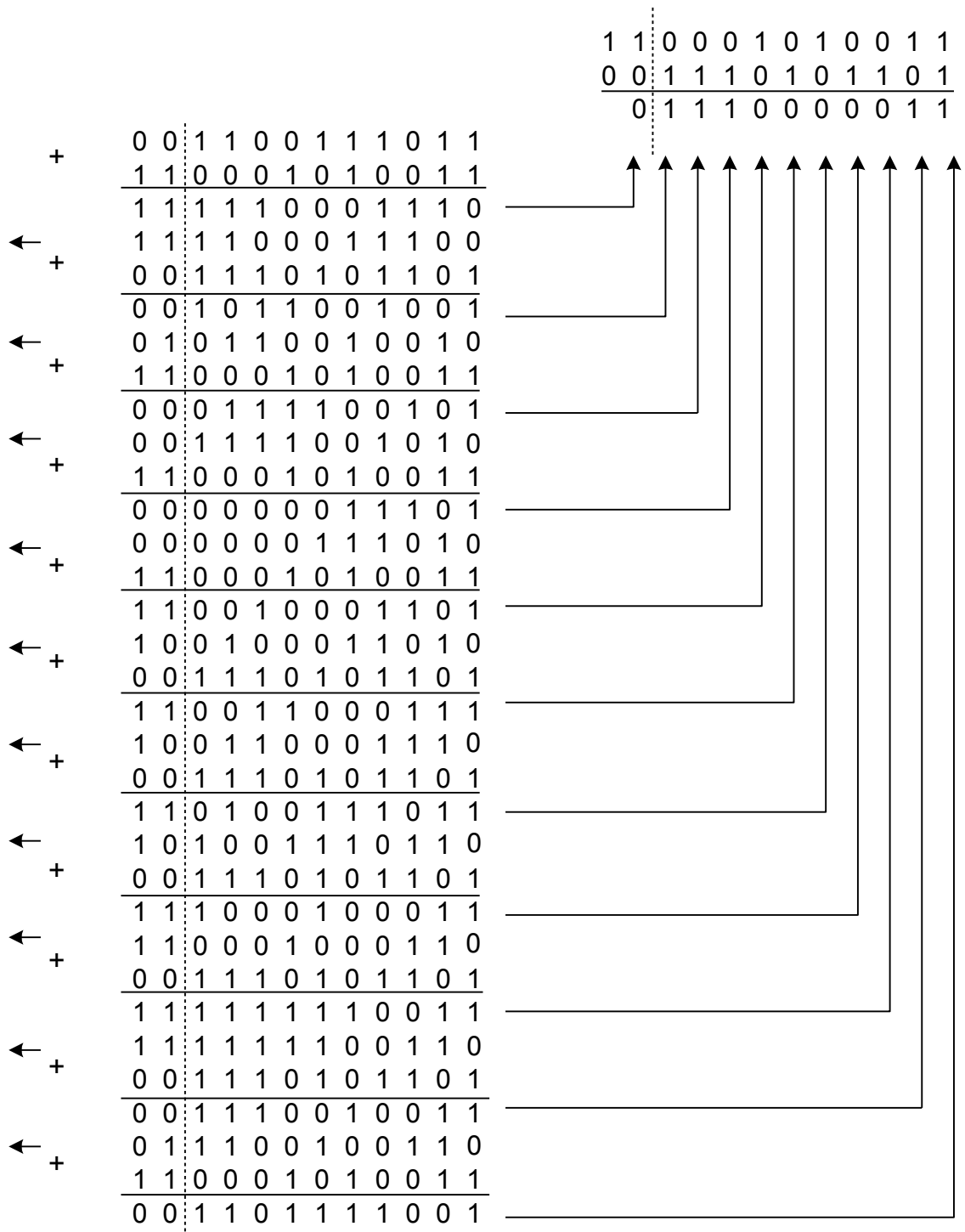
$$L = 111010,1101 \cdot 2^5$$

Модулі мантис від діленого і дільника

$$[P_{пр}] = 00.1100111011$$

$$[L_{пр}] = 00.1110101101$$

$$[L_{доп}] = 11.0001010011$$



Результат $P/L = 0,1110000011 \cdot 2^{-11}$
 Знак результату – плюс