Лекція 1 Системи числення

1.1. Загальні поняття про системи числення

Системою числення називається сукупність заходів і правил для найменування і позначення чисел.

Умовні знаки, що використовуються для позначення чисел називаються цифрами. Далі будемо припускати, що кількість цифр кінцева, тобто абетка, на основі якої складаються числа в деякій системі числення, складається з кінцевого числа елементів (цифр).

Звичайно всі системи числення поділяються на два класи: *непозиційні* і *позиційн*і.

Непозиційною називають систему числення, в якій значенню кожної цифри у будь – якому місці запису числа існує один і той же кількісний еквівалент. Такі системи з'явилися раніше в історичному плані, наприклад, загальновідома римська нумерація. Але непозиційні системи числення знаходять обмежене застосування в ОТ, так як вони характеризуються дуже складними і громіздкими алгоритмами подання чисел і виконання арифметичних операцій.

Системи, в яких значення кожної цифри залежить від місця (позиції) у послідовності цифр при записі числа, носять назву ***позиційних***. Позиційною системою числення є широко розповсюджена звичайна десяткова система числення. Звичайно позиційні системи числення мають найменування, яке співпадає з кількістю цифр, що в ній використовуються. Наприклад, в десятковій системі числення використовується десять цифр від 0 до 9. а число 123 визначається як $1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$. З цього прикладу ми бачимо, що позиція кожної цифри має свій ваговий коефіцієнт, і перша позначає кількість сотень, а остання – кількість одиниць.

У сучасних цифрових ЕОМ використовуються головним чином позиційні системи числення, тому що в них простіше реалізуються правила, ніж в непозиційних системах [10].

Основними характеристиками позиційних систем числення є:

- основа системи числення – P;
- абетка цифр системи числення (кількість використовуваних в системі цифр);
- вага розрядів – R_i , де $i = \overline{0, n-1}$ - розрядність числа.

Основа позиційної системи числення є число, яке виявляє у скільки разів одиниця старшого розряду більша одиниці сусіднього молодшого розряду.

Абетка цифр позиційної системи числення характеризує значення цифр, які використовуються для зображення чисел у даній системі числення. Звичайно цифри обираються таким чином, щоб вони складали відрізок натурального ряду чисел, включаючи число "0". У цьому випадку максимальне значення цифри, яка використовується у системі числення, дорівнює P – 1. У десятковій системі числення абетка характеризується значеннями цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Вага розряду визначає кількісне значення цифри у зображенні числа. Вагою розряду називається відношення кількісного еквівалента цифри, яка стоїть в i-му розряді a_i, до кількісного еквіваленту тієї ж цифри, яка стоїть у нульовому розряді.

$$R_i = \frac{a_i}{a_0} = \frac{p^i}{p^0} = p^i. \qquad (1)$$

В якості прикладу в табл. 1 наведено десяткове число 34043,9145, вказані номери його розрядів і вага цифр у відповідних розрядах.

Таблиця 1

Десяткове число	3	4	0	4	3	9	1	4	5
Номери розрядів	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
Вага розрядів	10^{4}	10^{3}	10^{2}	10^{1}	10^{0}	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}

В даному прикладі одні й ті ж самі цифри повторюються у декількох розрядах, але їх кількісне значення різне. Так, вага цифри 4 у третьому розряді дорівнює 10^3, що надає їй кількісний вміст у даному числі в чотири тисячі одиниць, а вага тієї ж цифри 4 у мінус третьому розряді дорівнює 10^{-3} і кількісний вміст її дорівнює чотирьом тисячам часток одиниці.

Таким чином, в позиційній системі числення будь – яке число **A** може бути подане у вигляді:

$$A_{(p)} = a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2} + \cdots + a_1p^1 + a_0p^0 + a_{-1}p^{-1} + a_{-2}p^{-2} + \cdots + a_{-m}p^{-m} = \sum_{i=-m}^{n-1} a_i\, p^i \;, \qquad (2)$$

де a_i – значення цифри в i-м розряді;
p – основа системи числення;
m – кількість розрядів дрібної частини числа;
n – кількість розрядів цілої частини числа.

Для скорочення запису числа **A** вага розрядів не пишеться і вираз (2) можна подати у вигляді:

$$A_{(p)} = a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1a_0, a_{-1}a_{-2}\ldots a_{-m}. \qquad (3)$$

<u>*Приклад.*</u> Десяткове число 3125,267 можна подати у вигляді:

$$3125,267 = 3\cdot10^3 + 1\cdot10^2 + 2\cdot10^1 + 5\cdot10^0 + 2\cdot10^{-1} + 6\cdot10^{-2} + 7\cdot10^{-3}\ .$$

В якості основи систем числення може бути взяте будь – яке відмінне від одиниці ціле число.

У залежності від того, яке число обране у якості основи системи числення, розрізняють: двійкову, трійкову, п’ятіркову, вісімкову, шістнадцяткову та ін. системи числення.

Систем числення можна побудувати незліченну кількість, але для того, щоб обрати систему числення для використання у цифрових ЕОМ необхідно враховувати цілу низку вимог. Основні з них такі [10]:

- однозначність подання чисел;
- можливість подання будь – якого числа із заданого діапазону чисел;
- простота виконання арифметичних і логічних операцій;
- зручність вводу початкових даних і виводу результатів обчислень;
- зручність відтворення кожної цифри стійкими станами декотрої фізичної системи. Кількість стійких станів фізичної системи повинно дорівнювати кількості цифр в системі числення, яку передбачають використовувати у цифровій ЕОМ.

Перерахованим вище вимогам у великій мірі задовольняє двійкова система числення. Вона потребує тільки два стійких стани для подання цифр **0** і **1**.

Разом з двійковою системою числення, яка знайшла широке застосування у цифрових ЕОМ, для зручності вводу і виводу початкових даних, а також для інших допоміжних операцій застосовують вісімкову і шістнадцяткову системи числення, а для обробки економічної інформації у малих обчислювальних машинах – двійково–десяткову.

Двійкова система числення

Основа цієї позиційної системи числення Р = 2, тобто старший розряд числа у два рази більший сусіднього молодшого розряду. В цій системі використовуються тільки дві цифри: 0 і 1. Тому будь – яке число у двійковій системі числення записується як комбінація цифр 0 і 1. Основа двійкової системи числення записується як 10, тобто $2_{(10)} = 10_{(2)}$ і читається: “один, нуль”.

Будь – яке число в цій системі числення записується у вигляді (2):

$$A_{(2)} = \sum_{i=-m}^{n-1} a_i \cdot 10^i_{(2)}.$$

<u>*Приклад*</u>.

$$A_{(2)} = 1101{,}101 = 1 \cdot 10^{011}_{(2)} + 1 \cdot 10^{010}_{(2)} + 0 \cdot 10^{001}_{(2)} +$$

$$+ 1 \cdot 10^{000}_{(2)} + 1 \cdot 10^{-001}_{(2)} + 0 \cdot 10^{-010}_{(2)} + 1 \cdot 10^{-011}_{(2)}.$$

Для зручності кількісного аналізу двійкових чисел у наведеному прикладі основа 10 і показники ступеню основи допускається подавати у десятковій системі числення, тоді, виконавши відповідні арифметичні операції, можна отримати кількісний еквівалент двійкового числа у десятковій системі числення. Для нашого випадку маємо:

$$A_{(10)} = 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^{-1} + 0\cdot 2^{-2} + 1\cdot 2^{-3} =$$

$$= 8 + 2 + 0 + 1 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{8} = 13\frac{5}{8} = 13{,}625.$$

Відповідно, кількісно

$1101{,}101_{(2)} = 13{,}625_{(10)}$.

Основними перевагами двійкової системи числення перед іншими системами є простота і надійність фізичних елементів, які використовуються для подання розрядів двійкового числа у машині (будь – який простий елемент, який має два стійких стани: тригер, феритове кільце, магнітна поверхня та ін.), що створює більші зручності виконання арифметичних операцій.

Одним з суттєвих недоліків двійкової системи числення є необхідність використання спеціальних підпрограм переводу початкових даних, які подані у десятковій системі, у двійкову систему числення, і підпрограм переводу результатів обчислень із двійкової системи у звичайну для людини десяткову систему числення.

Двійкова система числення використовується для подання внутрішньої інформації в цифрових ЕОМ.

Вісімкова система числення

В цій системі числення для запису будь – якого числа застосовується перші вісім цифр десяткової абетки: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

У відповідності з виразом (3) зображення числа у вісімковій системі числення має вигляд:

$$A_{(8)} = a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_k\ldots a_1a_0, a_{-1}a_{-2}\ldots a_{-m}.$$

Приклад.

$$A_{(8)} = 3726{,}145,$$

і читається таким чином: три, сім, два, шість, кома, один, чотири, п'ять. Основою системи є число вісім (Р = 8), тобто одиниця старшого розряду у вісім разів більша одиниці сусіднього молодшого розряду.

Використовуючи формулу (2), можна знайти кількісне значення будь – якого вісімкового числа у звичайній для нас десятковій системі числення.

Приклад.

$$A = 175{,}36_{(8)} = 1\cdot 8^2 + 7\cdot 8^1 + 5\cdot 8^0 + 3\cdot 8^{-1} + 6\cdot 8^{-2} = 125\frac{15}{32}_{(8)}.$$

$$B = 10_{(8)} = 1\cdot 8^1 + 0\cdot 8^0 = 8_{(10)}.$$

Вісімкова система числення використовується при ручному програмуванні в кодах особливо у спеціалізованих цифрових ЕОМ.

Шістнадцяткова система числення

Основою системи числення є число шістнадцять (Р = 16). Це означає, що одиниця старшого розряду у шістнадцять разів більша одиниці сусіднього молодшого розряду. В записі числа, який поданий виразом (3), на місці коефіцієнта a_i може знаходитися будь – який з шістнадцяти символів, що застосовуються у шістнадцятковій абетці.

Звичайно ними є перші шістнадцять чисел десяткової абетки. Але для того, щоб не було двозначних символів, в шістнадцятковій абетці використовуються такі шістнадцять знаків:

$$a_i = 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},$$

де знаки з рискою зверху означають: $\overline{0}$ – десять, $\overline{1}$ – одинадцять, $\overline{2}$ – дванадцять, $\overline{3}$ – тринадцять, $\overline{4}$ – чотирнадцять, $\overline{5}$ – п’ятнадцять.

Найчастіше для зображення додаткових символів використовуються початкові букви латинської абетки: **A, B, C, D, E, F**.

Згідно виразу (3) зображення числа у шістнадцятковій системі числення матиме такий вигляд:

$A_{(16)}$ = A37B,6D5,

яке читається таким чином: десять, три, сім, одинадцять, кома, шість, тринадцять, п’ять. Десяткове подання шістнадцяткового числа можна визначити, використовуючи формулу (2).

Приклад.

$A_{(16)}$ = A5D,2B,

тоді

$$A_{(10)} = 10 \cdot 16^2 + 5 \cdot 16^1 + 13 \cdot 16^0 + 2 \cdot 16^{-1} + 11 \cdot 16^{-2} =$$

$$= 2560 + 80 + 13 + \frac{2}{16} + \frac{11}{256} = 2653\frac{43}{256},$$

тобто кількісно A5D,2B$_{(16)}$ = $2653\frac{43}{256}$

Шістнадцяткова система числення використовується для подання декотрих специфічних видів інформації в спеціалізованих ЕОМ.

Двійково – десяткова система числення (код Д 1)

Так як у більшості сучасних цифрових ЕОМ використовуються елементи, що придатні для подання цифр двійкової системи числення, а поза машинами завжди використовується десяткова система числення, то значний інтерес має двійкове кодування десяткових цифр. Системи числення, в яких використовується двійкове кодування десяткових цифр називають двійково – кодованими десятковими системами.

Для двійкового кодування десяткових цифр необхідно мати чотири двійкових розряди (двійкова тетрада). Найбільше застосування в теперішній час знайшов код під шифром “8 – 4 – 2 – 1”, де цифри шифру позначають вагу існуючих двійкових цифр у коді. Система числення, що використовує такий код, називається двійково – десятковою системою числення.

Приклад. Число $A_{(10)}$ = 849, 05 в двійково – десятковій системі числення матиме такий вигляд:

849,05 $_{(10)}$ = 1000 0100 1001, 0000 0101 $_{(2\text{-}10)}$.

Для зручності читання ми записали тетради з проміжками між ними. Але всі цифри можуть бути поставлені і рядом.

Двійково – десяткова система числення (код “8 – 4 – 2 – 1” або код прямого заміщення) зручна для машинних перетворень з десяткової системи у двійкову і навпаки.

Але ця система незручна для виконання арифметичних операцій над десятковими числами. Це пов’язано з труднощами виявлення перенесення в наступний десяткових розряд (більш старшу тетраду). Крім того, код прямого заміщення характеризується складністю переходу до зворотних і додаткових кодів для десяткових чисел, що полегшують виконання алгебраїчного додавання. Це пояснюється тим, що код прямого заміщення не є тим, що самодоповнюється, тобто інверсія його двійкових цифр не дає коду доповнення десяткової цифри до 9.

Двійково – десяткова система числення з надлишком 3 (код Д 4)

Формування цифр в цій системи числення відбувається методом додавання до десяткової цифри числа 3 і подальшим поданням результату у вигляді двійкових тетрад. Код з надлишком 3 є зручним для виконання арифметичних операцій над числами, так як є тим, що самодоповнюється, тобто додавання до дев’яти отримується шляхом заміни одиниць на нулі і навпаки нулів на одиниці.

Перевагою коду з надлишком 3 є також те, що легко визначається перенесення в старшу двійкову тетраду. Але код з надлишком 3 незручний для перетворення чисел з однієї системи числення в іншу.

Треба відзначити, що разом з двійково – десятковою системою числення з надлишком 3 в обчислювальних машинах широке застосування знаходять і системи числення з надлишком 6. Побудова цих систем відбувається по тій же схемі, що і система числення з надлишком 3.

В табл. 2 показано подання десяткових чисел в коді “8 – 4 – 2 – 1”, коді з надлишком 3 і коді з надлишком 6.

1.2. Переведення чисел з одних систем числення в інші

При розв’язанні задач на цифрових ЕОМ початкові дані задаються звичайно в десятковій системі числення і в той же системі, як правило, потрібно отримати і кінцеві результати. Але, якщо ЕОМ працює в будь – якій іншій системі числення, наприклад, у двійковій, то виникає необхідність переводу чисел з однієї системи числення і другу. Переведення чисел відбувається або вручну – на аркуші паперу, або самою ЕОМ – шляхом обчислення спеціальної програми переводу.

Таблиця 2

	Код “8 – 4 – 2 – 1”	*Код з надлишком 3*	*Код з надлишком 6*	*Доповнення коду з надлишком 3 до 9*
0	0000	0011	0110	1100

1	0001	0100	0111	1011
2	0010	0101	1000	1010
3	0011	0110	1001	1001
4	0100	0111	1010	1000
5	0101	1000	1011	0111
6	0110	1001	1100	0110
7	0111	1010	1101	0101
8	1000	1011	1110	0100
9	1001	1100	1111	0011

Перевести число з однієї системи числення в іншу – це означає знайти зображення цифр числа заданої системи в необхідній системі числення [10]. Якщо задана система має основу P_1 , а необхідна P_2, то з певним ступенем точності повинна виконуватися рівність $A_{(P_1)} = B_{(P_2)}$.

Якщо $A_{(P_1)} = \sum_{i=-m}^{n-1} a_i \cdot P_1^i$, а $B_{(P_2)} = \sum_{j=-l}^{K-1} b_j \cdot P_2^j$, то

$$\sum_{i=-m}^{n-1} a_i \cdot P_1^i = \sum_{j=-l}^{K-1} b_j \cdot P_2^j, \tag{4}$$

причому $\{a_i\} = \overline{0, P_1 - 1}; \{b_j\} = \overline{0, P_2 - 1}.$

Далі задачу переводу чисел $A_{(P1)}$ у $B_{(P2)}$ будемо позначати

$$A_{(P_1)} \to B_{(P_2)}.$$

Існують різноманітні методи переведення чисел із одної системи числення в другу. Розглянемо декотрі з них.

1.2.1. Переведення цілих чисел з одної позиційної системи числення в іншу діленням на основу нової системи числення

Нехай задане ціле число в системі числення з основою P_1 – $A_{(P1)}$. Необхідно розв'язати задачу $A_{(P1)} \to B_{(P2)}$.

Ціле число $A_{(P1)}$ в системі з основою P_2 буде записане у вигляді

$$B_{(P_2)} = \mathbf{b_K \cdot P_2^K + b_{K-1} \cdot P_2^{K-1} + \ldots + b_1 \cdot P_2^1 + b_0 \cdot P_2^0}.$$

Переписавши цей вираз за схемою Горнера, отримаємо

$$B_{(P_2)} = (\ldots((\mathbf{b_K} \cdot \mathbf{P}_2 + \mathbf{b_{K-1}}) \cdot \mathbf{P}_2 + \mathbf{b_{K-2}}) \cdot \mathbf{P}_2 + \mathbf{b_{K-2}}) \cdot \mathbf{P}_2 + \ldots + \mathbf{b_1})\mathbf{P}_2 + \mathbf{b_0}. \tag{5}$$

Праву частину виразу (5) розділимо на величину основи P_2. В результаті визначимо перший залишок b_0 і цілу частину $(\ldots((\mathbf{b_K} \cdot \mathbf{P}_2 + \mathbf{b_{K-1}}) \cdot \mathbf{P}_2 + \ldots + \mathbf{b_1})$. Розділивши цілу частину на P_2 , знайдемо другий залишок b_1. Повторюючи процес ділення К + 1 раз, отримаємо останній цілий залишок b_K, який за умовою, менше основи системи P_2 і є старшою цифрою числа, поданого в системі з основою P_2.

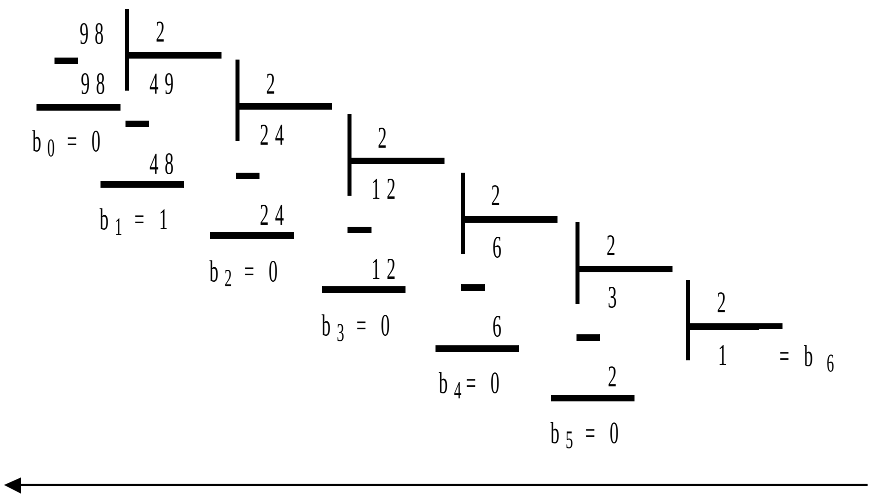
ПРАВИЛО. Для переведення цілого числа з однієї системи числення в іншу необхідно послідовно ділити це число і проміжкові частки на основу нової системи числення до тих пір, доки проміжкова частка не буде менше основи нової системи числення. Остання частка і залишки у порядку зворотному їх отриманню є зображеннями цифр числа в новій системі числення [13].

Так як всі операції виконуються в старій, тобто в P_1-річній системі числення, тому коефіцієнти, які шукаємо будуть отримані у цій же системі числення. Для кінцевого запису числа $A_{(P1)}$ в P_2-річній системі числення необхідно кожний з отриманих коефіцієнтів b_i записати одною P_2-річною цифрою.

Розглянутий метод переведення, як правило, застосовується для переводу чисел з десяткової системи числення в інші системи числення.

Приклад. Перевести десяткове число $A_{(10)} = 98$ у двійкову систему числення ($P_2 = 2$).

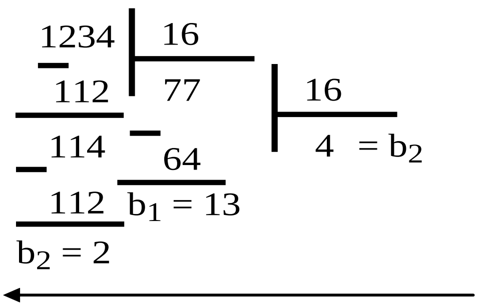
Розв'язання.



Відповідь: $B_{(2)}$=1100010.

Приклад. Перевести число $A_{(10)}$=1234 в шістнадцяткову систему числення.

Розв'язання.



Таким чином, $b_2=4_{(10)}$, $b_1=13_{(10)}$, $b_0=2_{(10)}$.

Для закінчення запису числа $A_{(10)}$ в шістнадцятковій системі треба кожний з коефіцієнтів записати однією шістнадцятковою цифрою.

Відповідь: $B_{(16)}$=4D2.

1.2.2. Переведення дробових чисел з однієї системи числення в іншу множенням на основу нової системи числення

Нехай початкове число, яке записане в системі числення з основою P_1 має вигляд

$$A_{(P_1)} = a_{-1}P_1^{-1} + a_{-2}P_1^{-2} + \ldots + a_{-m}P_1^{-m} .$$

Тоді в новій системі з основою P_2 це число буде зображено як

$0, b_{-1}, b_{-2} \ldots b_{-l}$, або

$$B_{(P_2)} = b_{-1}P_2^{-1} + b_{-2}P_2^{-2} + \ldots + b_{-l}P_2^{-l} .$$

Якщо переписати цей вираз за схемою Горнера, то отримаємо

$$B_{(P_2)} = P_2^{-1}(b_{-1} + P_2^{-1}(b_{-2} + \ldots + P_2^{-1}(b_{-(l-1)} + P_2^{-1}b_{-l}))\ldots) \qquad (6)$$

Якщо праву частину виразу (6) помножити на величину основи P_2, то знайдемо новий десятковий дріб, в цілій частині якої буде число b_{-1}.

Потім помножити дробову частину яка залишилася на величину основи P_2, отримаємо дріб, в цілій частині якої буде b_{-2}.

Повторюючи процес множення *l* раз, знайдемо все *l* цифр числа в новій системі числення. При цьому всі дії повинні виконуватися за правилами P_1-річної арифметики і, відповідно, в цілій частині отриманих дробів будуть проявлятися еквіваленти цифр нової системи числення, які записані в початковій системі числення.

При переведенні десяткових дробів з однієї системи числення в іншу можна отримати дроби у вигляді нескінченності, або рядка, який розходиться. Процес переведення можна закінчити, якщо появиться дробова частина, яка має у всіх розрядах нулі, або буде досягнута задана точність переведення (отримано необхідна кількість розрядів результату).

Викладене означає, що при переведенні дробів необхідно вказувати кількість розрядів числа в новій системі числення. На основі викладеного можна записати загальне правило, яке дозволить переводити десяткові дроби з одної позиційної системи в іншу.

ПРАВИЛО. Для переведення десяткового дробу з однієї позиційної системи числення в іншу його необхідно послідовно множити на основу нової системи числення до того часу, поки в новому дробі не буде потрібної кількості цифр, яка визначається потрібною точністю представлення дробу.

Десятковий дріб в новій системі числення записується з цілих частин добутків, які отримані при послідовному множенні, причому перша ціла частина буде старшою цифрою нового дробу [13].

Приклад. Перевести десятковий дріб $A_{(10)} = 0,625$ із десяткової в двійкову систему числення (P_2=2) з точністю до четвертого знаку.

Розв'язання:

0,	625
x	2
b_{-1}=1,	250
x	2
b_{-2}=0,	500
x	2
b_{-3}=1,	000
x	2
b_{-4}=0	000

Відповідь: $B_{(2)} = 0,1010$.

Приклад. Перевести десяткове число $A_{(10)}$=0,12 у вісімкову систему числення з точністю до шостого знака.

Розв'язання:

0,	12
x	8
b_{-1}=0,	96
x	8
b_{-2}=7,	68
x	8
b_{-3}=5,	44
x	8
b_{-4}=3,	52
x	8
b_{-5}=4,	16
x	8
b_{-6}=1,	28

Відповідь: $B_{(8)} = 0,075341$.

Треба відзначити, що якщо основа нової системи числення $P_2<P_1$, то коефіцієнти (цілі частини добутку є цифрами P_2-річної системи числення, як це було в приведених вище прикладах. Якщо $P_2>P_1$, то коефіцієнти b_i представляють собою числа в P_1-річній системі числення, які необхідно замінити цифрами P_2-річної системи.

Приклад. Перевести десяткове число $A_{(10)}$=0,87 у шістнадцяткову систему числення.

Розв'язання: Так як основа нової системи числення $P_2 > P_1$, то переведення треба робити в такій послідовності:

1. Основа нової системи $P_2=10_{(16)}$ подається в початковій системі числення $P_1=10$:

$$10_{(16)} = 16_{(10)};$$

2. Виконується послідовне множення дробової частини на основу $P_2=16_{(10)}$

0,	87
x	16
$b_{-1}=13$,	22
x	16
$b_{-2}=14$,	72
x	16
$b_{-3}=11$,	52
x	16
$b_{-4}=8$,	32

3. Цілі частини (коефіцієнти b_{-i}) переводяться у шістнадцяткову систему числення

$$13_{(10)} = D_{(16)}; \quad 14_{(10)} = E_{(16)}; \quad 11_{(10)} = B_{(16)}; \quad 8_{(10)} = 8_{(16)}.$$

Відповідь: $B_{(16)} = 0{,}DEB8$ переведення визначено четвертим знаком.

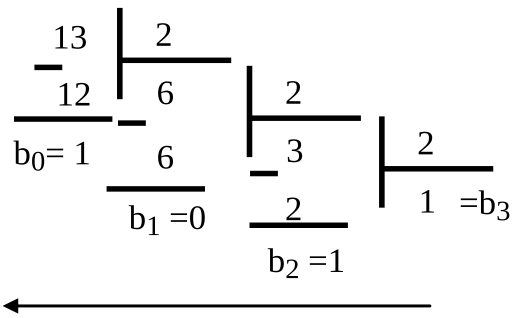
Треба відзначити універсальність цього методу переведення, але на практиці він частіше всього використовується для переведення чисел з десяткової системи числення в інші системи, так як арифметичні дії в цьому випадку робляться у звичній для нас десятковій системі числення.

Переведення звичайних дробів в двійкову систему числення робиться за розглянутим вище правилом після переведення їх в десяткові дроби [10].

Для переведення в двійкову систему числення звичайних дробів, знаменники яких є ціла ступінь двійки (основа двійкової системи числення), потрібно перевести їх чисельник як ціле число, відділивши комою, починаючи з молодшого розряду, кількість цифр, що дорівнює ступеню двійки в знаменнику дробу.

Приклад. Перевести число $A_{(10)} = \frac{13}{16}$ в двійкову систему числення.

Розв'язання: переводимо чисельник дробі як ціле число, методом ділення на основу нової системи числення



Так як число 16 = 2^4, то, відокремивши комою чотири розряди, починаючи з молодшого отримаємо:

$$\frac{13}{16_{(10)}} = 0{,}1101_{(2)}\,.$$

<u>Відповідь:</u> $B_{(2)} = 0{,}1101$.

Для переведення змішаного дробу з однієї системи числення в іншу необхідно <u>окремо переводити цілу і дробову частини числа</u> відповідно до методу ділення і методу множення на основу нової системи числення.

1.2.3. Метод безпосереднього заміщення

Відповідно до виразу (2) числа в різних системах числення можна подавати таким чином:

$$A_{(P1)} = a_{n-1}P_1^{n-1} + a_{n-2}P_1^{n-2} + \dots + a_1P_1^1 +$$
$$a_0P_1^0 + a_{-1}P_1^{-1} + \dots + a_{-m}P_1^{-m} == b_{k-1}P_2^{k-1} + b_{k-2}P_2^{k-2} + \dots + b_1P_2^1 + b_0P_2^0$$
$$+ b_{-1}P_2^{-1} + \dots + b_{-l}P_2^{-l} = B_{(P2)}$$

Отже, у загальному вигляді задачу переведення числа з системи числення з основою P_1 в систему числення з основою P_2 можна подати як задачу визначення коефіцієнтів b_j нового ряду, що зображує числа в системі з основою P_2.

<u>Правило переводу</u> чисел цим методом полягають у наступному [10]:

1. Задане число в системі числення з основою P_1 у відповідності з виразом (2) подаються у вигляді зваженої суми.

2. Всі цифри a_i і основа P_1 в правій частині виразу (2) записуються (заміщуються) в системі числення з основою P_2. Якщо $P_2 > P_1$, то зображення цифр в P_2-річній системі числення співпадає з їх зображенням в P_1-річнійсистемі.

3. Виконуються всі арифметичні операції у відповідності з виразом (2) в системі числення з основою P_2.

<u>Приклад.</u> Перевести десяткове число $A_{(10)} = 35{,}\ 25$ у двійкову систему числення.

<u>Розв'язання</u>. 1. Подамо число $A_{(10)}$ у відповідності з виразом (2):

$$35{,}25_{(10)} = 3\cdot 10^1 + 5\cdot 10^0 + 2\cdot 10^{-1} + 5\cdot 10^{-2}.$$

2. Замінивши в правій частині усі десяткові цифри двійковими, отримаємо:

$$B_{(2)} = 111010 + 101 + \frac{10}{1010} + \frac{101}{1010 \cdot 1010}.$$

3. Виконавши усі арифметичні операції у двійковій системі числення, знайдемо двійковий запис числа

$$B_{(2)} = 100011{,}01.$$

Відповідь. $B_{(2)} = 100011{,}01$

Приклад. Перевести вісімкове число $A_{(8)} = 623{,}2$ у десяткову систему числення.

Розв'язання.

$$A_{(8)} = 6 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 + 2 \cdot 8^{-1} = 403{,}25_{(10)}.$$

Відповідь. $B_{(10)} = 403{,}25$.

Приклад. Перевести двійкове число $A_{(2)} = 11001{,}011$ у десяткову систему числення.

Розв'язання.

$$A_{(2)} = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} = 25{,}375_{(10)}.$$

Відповідь. $B_{(10)} = 25{,}375$.

Метод безпосереднього заміщення інколи називають методом додавання з урахуванням ваги розрядів. Метод безпосереднього заміщення зручний при переведенні чисел з будь-якої системи числення в ту систему, в якій найпростіше виконуються арифметичні операції.

Так при ручному розрахунку цим методом зручно переводити числа в десяткову систему числення, а в цифрових ЕОМ, що використовують для виконання арифметичних операцій двійкову систему, метод безпосереднього заміщення застосовується для переведення чисел у двійкову систему числення.

1.2.4. Переведення чисел з вісімкової і шістнадцяткової систем числення у двійкову та навпаки

Якщо основа одної системи числення є цілим степенем двійки, тобто $P = 2^K$, то при цьому значно спрощується перетворення інформації з системи числення з основою $P = 2^K$ в двійкову систему і навпаки. Перетворення фактично зводиться до того, що символи вхідної інформації, які задані в системі з основою $P = 2^K$, замінюються відповідними двійковими еквівалентами [10].

Зворотне перетворення із двійкової системи в систему з основою $P = 2^K$ зводиться до того, що двійковий код розбивається на групи по К - двійкових розрядів в кожній. Ці групи замінюються відповідними символами вхідної системи числення.

Розглянемо перехід між вісімковою і двійковою системами числення.

Нехай задано число А у вісімковій системі числення:

$$A_{(8)} = a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1 a_0 = a_{n-1}\cdot 8^{n-1} + a_{n-2}\cdot 8^{n-2} + \cdots + a_1\cdot 8^1 + a_0\cdot 8^0 \quad (7)$$

де $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ – цифри вісімкової системи числення.

Припустимо, що знайдено подання цього ж числа у двійковій системі числення.

$$B_{(2)} = b_{k-1}b_{k-2}\cdots b_1 b_0 = b_{k-1}\cdot 2^{k-1} + b_{k-2}\cdot 2^{k-2} + \cdots + b_1\cdot 2^1 + b_0\cdot 2^0 \quad (8)$$

де $b_{k-1}, b_{k-2}, \cdots, b_1, b_0$– цифри двійкової системи числення.

Тому що вирази (7) і (8) подають однакове число, то

$$a_{n-1}\cdot 8^{n-1} + a_{n-2}\cdot 8^{n-2} + \cdots + a_1\cdot 8^1 + a_0 = \\ = b_{k-1}\cdot 2^{k-1} + b_{k-2}\cdot 2^{k-2} + \cdots + b_1\cdot 2^1 + b_0 \quad (9)$$

Розділивши ліву і праву частини рівняння (9) на вісім, отримаємо однакові частки:

$$a_{n-1}8^{n-2} + a_{n-2}8^{n-3} + \cdots + a_1 = b_{k-1}2^{k-4} + b_{k-2}2^{k-5} + \cdots + b_5 2^2 + b_4 2 + b_3 \quad (10)$$

і однакові остачі :

$$a_0 = b_2\cdot 2^2 + b_1\cdot 2^1 + b_0 = b_2 b_1 b_0 \quad (11)$$

З виразу (11) виходить, що молодша вісімкова цифра a_0 виражається трирозрядним двійковим числом (тріадою) b_2, b_1, b_0. Якщо розділити на 8 ліву і праву частини рівняння (10), то отримаємо подання наступної вісімкової цифри у вигляді трирозрядного двійкового числа:

$$a_1 = b_5\cdot 2^2 + b_4\cdot 2^1 + b_3 = b_5 b_4 b_3$$

Аналогічно можна отримати зображення інших вісімкових цифр у вигляді трирозрядних двійкових чисел (двійкових тріад).

При переведенні шістнадцяткового числа у двійкову систему числення всі наведені вище міркування справедливі. Але потрібно мати на увазі, що кожній шістнадцятковій цифрі відповідає чотирирозрядне двійкове число (двійкова тетрада), тобто

$$a_0 = b_3 b_2 b_1 b_0$$
$$a_1 = b_7 b_6 b_5 b_4$$

і так далі.

<u>ПРАВИЛО</u>. Для переведення вісімкового (шістнадцяткового) числа у двійкову систему числення достатньо кожну вісімкову (шістнадцяткову) цифру замінити рівною їй двійковою тріадою (тетрадою) [10].

<u>Приклад.</u> Перевести вісімкове число $A_{(8)} = 765{,}163$ у двійкову систему числення.

<u>Розв'язання.</u>

$$B_{(2)} = \underbrace{111}_{7}\ \underbrace{110}_{6}\ \underbrace{101}_{5},\underbrace{001}_{1}\ \underbrace{110}_{6}\ \underbrace{011}_{3}$$

<u>Відповідь.</u> $B_{(2)} = 111110101{,}001110011$.

<u>Приклад.</u> Перевести шістнадцяткове число $A_{(16)}$ = 3B7E,5A6 у двійкову систему числення.

Розв'язання.

$$B_{(2)} = \underbrace{0011}_{3}\ \underbrace{1011}_{B}\ \underbrace{0111}_{7}\ \underbrace{1110}_{E},\ \underbrace{0101}_{5}\ \underbrace{1010}_{A}\ \underbrace{0110}_{6}$$

Відповідь. $B_{(2)}$ = 11101101111110, 01011010011

ПРАВИЛО. Для переведення двійкового числа у вісімкову (шістнадцяткову) систему числення достатньо розбити його направо та наліво від коми на тріади (тетради) і замінити кожну тріаду (тетраду) відповідною їй вісімковою (шістнадцятковою) цифрою. Якщо при розбиванні крайні тріади (тетради) виявляться неповними, то їх потрібно доповнити нулями [10].

Приклад. Перевести двійкове число $A_{(2)}$ = 11010011101,11001011 у вісімкову систему числення.

Розв'язання.

$$A_{(2)} = \underbrace{011}_{3}\ \underbrace{010}_{2}\ \underbrace{011}_{3}\ \underbrace{101}_{5},\ \underbrace{110}_{6}\ \underbrace{010}_{2}\ \underbrace{110}_{6}$$

Відповідь. $B_{(2)}$ = 3235,626.

Приклад. Перевести двійкове число $A_{(2)}$ = 11010011101,11001011 у шістнадцяткову систему числення.

Розв'язання.

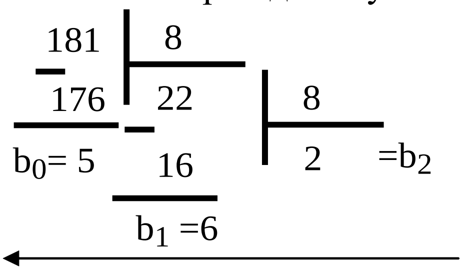
$$A_{(2)} = \underbrace{0110}_{6}\ \underbrace{1001}_{9}\ \underbrace{1101}_{D},\ \underbrace{1100}_{C}\ \underbrace{1011}_{B}$$

Відповідь. $B_{(2)}$ = 69D,CB

Простоту переходу від вісімкової (шістнадцяткової) системи числення до двійкової можна використовувати для скорочення кількості операцій при ручному переведенні чисел у двійкову систему числення. При цьому вісімкова (шістнадцяткова) система використовується як проміжкові.

Приклад. Перевести десяткове число $A_{(10)}$ = 181, 71875 у двійкову систему числення.

Розв'язання. Для цілої частини: переведення у вісімкову систему числення:



$181_{(10)} = 265_{(8)}$

переведення у двійкову систему числення:

$$B_{1(2)} = \underbrace{010}_{2}\ \underbrace{110}_{6}\ \underbrace{101}_{5} = 10110101$$

Для дробової частини: переведення у вісімкову систему числення:

$$0{,}71875$$

$$b_{-1} = \frac{\times 8}{5{,}75000}$$

$$b_{-2} = \frac{\times 8}{6{,}00000}$$

$$0{,}71875_{(10)} = 0{,}56_{(8)}$$

переведення у двійкову систему числення:

$$B_{2(2)} = 0,\underbrace{101}_{5}\,\underbrace{110}_{6} = 0{,}10111$$

Остаточно $B_{(2)} = B_{1(2)} + B_{2(2)} = 10110101,\ 10111$

<u>*Відповідь.*</u> $B_{(2)} = 10110101,\ 10111$.