Розділ 6. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Невизначеним інтегралом $\int f(x)\,dx$ функції $f(x)$ (на проміжку X) називають вираз $F(x)+C$, де $F(x)$ – одна з *первісних* функції $f(x)$, тобто $F'(x)=f(x)$ ($x\in X$); C – довільна стала.

1. Таблиця основних невизначених інтегралів

I. $\int x^n\,dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad (n\neq -1)$.

II. $\int x^{-1}\,dx=\int \dfrac{1}{x}dx=\int \dfrac{dx}{x}=\ln|x|+C$.

III. $\int a^x\,dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C \quad (a>0,\ a\neq 1)$.

Зокрема, при $a=e$

III°. $\int e^x\,dx=e^x+C$.

IV. $\int \cos x\,dx=\sin x+C$.

V. $\int \sin x\,dx=-\cos x+C$.

VI. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x+C$.

VII. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg} x+C$.

VIII. $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2}=\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}+C \quad (a>0)$.

Зокрема, при $a=1$

VIII°. $\int \dfrac{dx}{x^2+1}=\operatorname{arctg} x+C$.

IX. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2}=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|+C \quad (a>0)$.

Зокрема, при $a=1$

IX°. $\int \dfrac{dx}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C$.

X. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$$

Зокрема, при $a = 1$

X°. $$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C.$$

XI. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C \quad (a \neq 0).$$

Зокрема, при $a = 1$

XI°. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + 1}\right| + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) + C.$$

У справедливості формул **I – XI** легко переконатися, використовуючи диференціювання. Розглянемо, наприклад, інтеграл **II** – $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$. Потрібно показати, що $\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$. Дійсно, якщо $x > 0$, то $\left(\ln|x|\right)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$; якщо ж $x < 0$, то $\left(\ln|x|\right)' = \left(\ln(-x)\right)' = \frac{1}{-x}\cdot(-x)' = -\frac{1}{x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$.

Зауважимо, що кожна з формул **I – XI** вірна на будь-якому проміжку з області визначення відповідної підінтегральної функції.

Таблицю основних інтегралів слід вивчити **напам'ять**!

Скориставшись табличним інтегралом **I**, довести формули:

1. $\int dx = x + C$.

⌈ $$\int dx = \int 1\,dx = \int x^0\,dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} + C = x + C.$$ ⌋

2. $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$.

⌈ $$\int x\,dx = \int x^1\,dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{x^2}{2} + C.$$ ⌋

3. $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$.

$\ulcorner$ $\int x^2\,dx = \dfrac{x^{2+1}}{2+1} + C = \dfrac{x^3}{3} + C$. $\lrcorner$

4. $\int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + C$.

$\ulcorner$ $\int \dfrac{dx}{x^2} = \int \dfrac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \dfrac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \dfrac{x^{-1}}{-1} + C = -\dfrac{1}{x} + C$. $\lrcorner$

5. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$.

$\ulcorner$ $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = \int \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \dfrac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$. $\lrcorner$

Обчислити інтеграли, скориставшись табличним інтегралом **I** :

6. $\int \sqrt{x}\,dx$.

$\ulcorner$ $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$. $\lrcorner$

7. $\int \dfrac{dx}{x^3}$.

$\ulcorner$ $\int \dfrac{dx}{x^3} = \int x^{-3}\,dx = \dfrac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \dfrac{x^{-2}}{-2} + C = -\dfrac{1}{2x^2} + C$. $\lrcorner$

8. $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

$\ulcorner$ $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int \dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{3}}\,dx = \dfrac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C$. $\lrcorner$

Обчислити інтеграли, скориставшись табличним інтегралом **III** :

9. $\int 2^x\,dx$.

$\ulcorner$ $\int 2^x\,dx = \dfrac{2^x}{\ln 2} + C$ (в інтегралі **III** поклали $a = 2$). $\lrcorner$

10. $\int \frac{dx}{2^x}$.

$\ulcorner$ $$\int \frac{dx}{2^x} = \int \frac{1}{2^x}\,dx = \int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\frac{1}{2}} + C = \frac{\frac{1}{2^x}}{-\ln 2} + C = -\frac{1}{2^x \ln 2} + C$$

(в інтегралі **III** поклали $a = \frac{1}{2}$). $\lrcorner$

Обчислити невизначені інтеграли:

11. $\int \frac{dx}{x^2+9}$.

$\ulcorner$ Зведемо до інтеграла **VIII** при $a = 3$:

$$\int \frac{dx}{x^2+9} = \int \frac{dx}{x^2+3^2} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C. \quad \lrcorner$$

12. $\int \frac{dx}{x^2-5}$.

$\ulcorner$ Зведемо до інтеграла **IX** ($a = \sqrt{5}$):

$$\int \frac{dx}{x^2-5} = \int \frac{dx}{x^2-\left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right| + C. \quad \lrcorner$$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5}}$.

$\ulcorner$ Використаємо інтеграл **XI** ($a = -5$):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+(-5)}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+(-5)}\right| + C = \ln\left|x+\sqrt{x^2-5}\right| + C. \quad \lrcorner$$

Зауваження. Додатково до таблиці основних невизначених інтегралів доцільно **запам’ятати** також інтеграли **1 – 5**.

Вправи для самостійного розв’язання

Обчислити невизначені інтеграли:

14. $\int x^4\,dx$.

15. $\int \frac{dx}{x^5}$.

16. $\int \sqrt[3]{x}\, dx$. **17.** $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$.

18. $\int 5^x\, dx$. **19.** $\int \frac{dx}{4^x}$.

20. $\int \frac{dx}{x^2+4}$. **21.** $\int \frac{dx}{2+x^2}$.

22. $\int \frac{dx}{x^2-9}$. **23.** $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$.

24. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$. **25.** $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$.

26. Довести формулу $\int k\, dx = kx + C$ (k – стала).

2. Безпосереднє інтегрування

Безпосереднє обчислення невизначених інтегралів ґрунтується на тотожних перетвореннях підінтегральної функції та властивостях невизначеного інтеграла.

Властивості невизначеного інтеграла

1°. $\int k\, f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$ (k – стала, $k \neq 0$).

2°. $\int \left(f_1(x) \pm f_2(x) \right) dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx$.

Ця властивість узагальнюється на довільне скінченне число доданків:

$$\int \left(f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_m(x) \right) dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx \pm \ldots \pm \int f_m(x)\,dx .$$

3°. Якщо $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, то для будь-яких сталих k та b ($k \neq 0$)

$$\int f(kx+b)\,dx = \frac{1}{k} F(kx+b) + C.$$

Частинні випадки властивості **3°** (відповідно при $b = 0$ та $k = 1$):

3.1°. $\int f(kx)\, dx = \frac{1}{k} F(kx) + C$;

3.2°. $\int f(x+b)\, dx = F(x+b) + C.$

Обчислити невизначені інтеграли, застосувавши властивість **1°**:

27. $\int \frac{3\,dx}{\cos^2 x}$.

⌐ $\int \frac{3\,dx}{\cos^2 x} = 3\int \frac{dx}{\cos^2 x} = 3(\operatorname{tg} x + C) = 3\operatorname{tg} x + 3C$ (після застосування властивості $\mathbf{1^o}$ використали табличний інтеграл **VI**). Позначивши довільну сталу $3C$ знову через C, дістанемо

$$\int \frac{3\,dx}{\cos^2 x} = 3\operatorname{tg} x + C. \quad ⌋$$

Зауваження. Надалі після обчислення невизначених інтегралів записуватимемо відразу сталу C, опускаючи подібні до наведених пояснення.

28. $\int \frac{x}{2}\,dx$.

⌐ $\int \frac{x}{2}\,dx = \int \frac{1}{2}x\,dx = \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{4} + C$

(після застосування властивості $\mathbf{1^o}$ скористалися табличним інтегралом **I** (приклад **2**)). ⌋

29. $\int \frac{dx}{4-x^2}$.

⌐ $\int \frac{dx}{4-x^2} = \int \frac{dx}{-(x^2-4)} = -\int \frac{dx}{x^2-2^2} = -\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C =$

$$= -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$$

(скористалися табличним інтегралом **IX** при $a = 2$). ⌋

Обчислити інтеграли, застосувавши властивості $\mathbf{1^o}$ та $\mathbf{2^o}$:

30. $\int \left(6x^2 + \pi \sin x\right) dx \qquad (\pi \approx 3{,}14)$.

⌐ Застосуємо послідовно властивості $\mathbf{2^o}$ та $\mathbf{1^o}$:

$$\int \left(6x^2 + \pi \sin x\right) dx = \int 6x^2\,dx + \int \pi \sin x\,dx = 6\int x^2\,dx + \pi\int \sin x\,dx.$$

Для обчислення інтегралів у правій частині рівності використовуємо табличні інтеграли відповідно **I** ($n = 2$, приклад **3**) та **V** і остаточно дістаємо

$$\int\left(6x^2+\pi\sin x\right)dx=6\frac{x^3}{3}+\pi\left(-\cos x\right)+C=2x^3-\pi\cos x+C\,. \quad \lrcorner$$

31. $\int\left(4-\frac{3}{x}+\frac{e^x}{2}\right)dx\,.$

$\ulcorner$ Застосовуємо послідовно властивості $\mathbf{2^o}$, $\mathbf{1^o}$ і табличні інтеграли $\mathbf{I}$ (приклад **1**), $\mathbf{II}$, $\mathbf{III^o}$:

$$\int\left(4-\frac{3}{x}+\frac{e^x}{2}\right)dx=\int 4\,dx-\int\frac{3}{x}dx+\int\frac{1}{2}e^x\,dx=$$

$$=4\int dx-3\int\frac{1}{x}dx+\frac{1}{2}\int e^x\,dx=4x-3\ln|x|+0{,}5\,e^x+C\,. \quad \lrcorner$$

32. $\int x\left(8x^2+\frac{1}{x^3}\right)dx\,.$

$\ulcorner$ Спочатку розкриємо дужки:

$$\int x\left(8x^2+\frac{1}{x^3}\right)dx=\int\left(8x^2\cdot x+\frac{x}{x^3}\right)dx=\int\left(8x^3+\frac{1}{x^2}\right)dx\,.$$

Далі застосуємо властивості $\mathbf{2^o}$, $\mathbf{1^o}$ і табличний інтеграл $\mathbf{I}$ відповідно при $n=3$ та $n=-2$ (приклад **4**):

$$\int\left(8x^3+\frac{1}{x^2}\right)dx=8\int x^3\,dx+\int\frac{dx}{x^2}=8\frac{x^4}{4}+\left(-\frac{1}{x}\right)+C=2x^4-\frac{1}{x}+C\,.$$

Отже, $\int x\left(8x^2+\frac{1}{x^3}\right)dx=2x^4-\frac{1}{x}+C\,.$ $\lrcorner$

33. $\int\frac{3x^4-2}{x^3}dx\,.$

$\ulcorner$ Спочатку поділимо почленно чисельник на знаменник:

$$\int\frac{3x^4-2}{x^3}dx=\int\left(\frac{3x^4}{x^3}-\frac{2}{x^3}\right)dx=\int\left(3x-\frac{2}{x^3}\right)dx\,.$$

Далі застосуємо властивості $\mathbf{2^o}$, $\mathbf{1^o}$ і табличний інтеграл $\mathbf{I}$ (приклади **2** та **7**):

$$\int\left(3x-\frac{2}{x^3}\right)dx=3\int x\,dx-2\int\frac{dx}{x^3}=3\frac{x^2}{2}-2\left(-\frac{1}{2x^2}\right)+C=\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{x^2}+C\,.$$

Отже, $\int\frac{3x^4-2}{x^3}dx=\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{x^2}+C\,.$ $\lrcorner$

34. $\int \frac{x^2+5}{x^2-1}dx$.

⌈ Підінтегральна функція $\frac{x^2+5}{x^2-1}$ – неправильний раціональний дріб (степінь чисельника дорівнює степеню знаменника). Тому для інтегрування слід виділити цілу частину: $\frac{x^2+5}{x^2-1}=\frac{\left(x^2-1\right)+6}{x^2-1}=1+\frac{6}{x^2-1}$. Тоді, застосувавши властивості $\mathbf{2^o}$ та $\mathbf{1^o}$, матимемо

$$\int \frac{x^2+5}{x^2-1}dx=\int\left(1+\frac{6}{x^2-1}\right)dx=\int 1\,dx+6\int\frac{1}{x^2-1}dx=$$

$$=x+6\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C=x+3\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$$

(скористалися табличними інтегралами **I** (приклад **1**) та $\mathbf{IX^o}$). ⌋

35. $\int \cos^2\frac{x}{2}\,dx$.

⌈ Скориставшись відомою з тригонометрії формулою, дістанемо

$$\int \cos^2\frac{x}{2}\,dx=\int\frac{1+\cos x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\int\left(1+\cos x\right)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int dx+\int\cos x\,dx\right)=\frac{1}{2}\left(x+\sin x\right)+C\,. \quad ⌋$$

Застосувавши властивість $\mathbf{3.1^o}$, довести формули:

36. $\int e^{kx}dx=\frac{1}{k}e^{kx}+C$ (k – стала, $k\neq 0$).

⌈ Ця формула є наслідком формули $\int e^x\,dx=e^x+C$ (табличний інтеграл $\mathbf{III^o}$) та властивості $\mathbf{3.1^o}$, в якій $f\left(x\right)=e^x,\ F\left(x\right)=e^x$. ⌋

37. $\int \cos kx\,dx=\frac{1}{k}\sin kx+C$ (k – стала, $k\neq 0$).

⌈ Ця формула є наслідком формули $\int\cos x\,dx=\sin x+C$ (табличний інтеграл **IV**) та властивості $\mathbf{3.1^o}$, в якій $f\left(x\right)=\cos x,\ F\left(x\right)=\sin x$. ⌋

Застосувавши властивість **3.2°**, довести формули:

38. $\displaystyle\int \frac{dx}{x+b} = \ln|x+b| + C$ (b – стала).

$\ulcorner$ Ця формула є наслідком формули $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ (табличний інтеграл **II**) та властивості **3.2°**, в якій $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $F(x) = \ln|x|$. $\lrcorner$

39. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+b}} = 2\sqrt{x+b} + C$ (b – стала).

$\ulcorner$ Ця формула є наслідком формули $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$ (приклад **5**) та властивості **3.2°**, в якій $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $F(x) = 2\sqrt{x}$. $\lrcorner$

Обчислити невизначені інтеграли:

40. $\displaystyle\int 3^{\frac{x}{2}}\,dx$.

$\ulcorner$ Оскільки $\displaystyle\int 3^x\,dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C$ (табличний інтеграл **III** при $a = 3$), то за властивістю **3.1°** ($k = \dfrac{1}{2}$) дістанемо

$$\int 3^{\frac{x}{2}}\,dx = \int 3^{\frac{1}{2}x}\,dx = \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{3^{\frac{1}{2}x}}{\ln 3} + C = \frac{2}{\ln 3} 3^{\frac{x}{2}} + C\,. \quad \lrcorner$$

41. $\displaystyle\int \sin 4x\,dx$.

$\ulcorner$ Оскільки $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ (табличний інтеграл **V**), то за властивістю **3.1°** ($k = 4$) дістанемо

$$\int \sin 4x\,dx = \frac{1}{4}\left(-\cos 4x\right) + C = -\frac{1}{4}\cos 4x + C\,. \quad \lrcorner$$

42. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{5}}$.

⌐ Оскільки $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$ (табличний інтеграл **VII**), то за властивістю **3.1°** ($k = \frac{1}{5}$) дістанемо

$$\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{5}} = \int \frac{dx}{\sin^2 \frac{1}{5}x} = \frac{1}{\frac{1}{5}}\left(-\operatorname{ctg}\frac{1}{5}x\right) + C = -5\operatorname{ctg}\frac{x}{5} + C\,. \quad ⌟$$

43. $\int \frac{dx}{9x^2+1}$.

⌐ Оскільки $\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C$ (табличний інтеграл **VIII°**), то виконавши тотожне перетворення підінтегральної функції, маємо

$$\int \frac{dx}{9x^2+1} = \int \frac{dx}{(3x)^2+1} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} 3x + C$$

(скористалися властивістю **3.1°** ($k = 3$)). ⌟

44. $\int (x-1)^4\, dx$.

⌐ Оскільки $\int x^4\, dx = \frac{x^5}{5} + C$, то за властивістю **3.2°** ($b = -1$)

$$\int (x-1)^4\, dx = \int \big(x+(-1)\big)^4\, dx = \frac{\big(x+(-1)\big)^5}{5} + C = \frac{(x-1)^5}{5} + C\,. \quad ⌟$$

45. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}}$.

⌐ Розглянемо табличний інтеграл **X**, $a = 2$: $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{2} + C$. Тоді за властивістю **3.1°**, виконавши тотожне перетворення, дістанемо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-\left(\sqrt{3}x\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}x}{2} + C\,. \quad ⌟$$

46. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

⌐ Оскільки $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$ (приклад **5**), то виконавши тотожні перетворення, дістанемо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-1\cdot x+1}} = \frac{1}{-1}\cdot 2\sqrt{-1\cdot x+1} + C = -2\sqrt{1-x} + C$$

(скористалися властивістю $\mathbf{3^o}$ ($k=-1,\ b=1$)). ⌟

47. $\int \frac{dx}{(4x+5)^2}$.

⌐ Оскільки $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$ (приклад **4**), то за властивістю $\mathbf{3^o}$ ($k=4,\ b=5$) маємо

$$\int \frac{dx}{(4x+5)^2} = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4x+5}\right) + C = -\frac{1}{4(4x+5)} + C. \quad ⌟$$

48. $\int \frac{dx}{x^2+4x+13}$.

⌐ Спочатку виділимо в знаменнику повний квадрат відносно x:

$$x^2+4x+13 = \left(x^2+2\cdot x\cdot 2+2^2\right)+9 = (x+2)^2+9$$

(скористалися формулою $a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$).

Обчислюємо інтеграл:

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+13} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+9} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+3^2} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3} + C$$

(скористалися табличним інтегралом **VIII** при $a=3$ та властивістю $\mathbf{3.2^o}$ ($b=2$)). ⌟

49. $\int \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$.

⌐ Спочатку виділимо повний квадрат відносно x:

$$6x-x^2-8 = -\left(x^2-6x+8\right) = -\left[\left(x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2\right)-1\right] =$$

$$= -\left[(x-3)^2-1\right] = 1-(x-3)^2$$

(скористалися формулою $a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2$).

Обчислюємо інтеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{6x - x^2 - 8}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (x-3)^2}} = \arcsin(x-3) + C$$

(скористалися табличним інтегралом $\mathbf{X^o}$ та властивістю $\mathbf{3.2^o}$ ($b = -3$)). ⌋

50. $\int \frac{x-3}{5x-4}\,dx$.

⌈ Підінтегральна функція $\frac{x-3}{5x-4}$ – неправильний раціональний дріб (степінь чисельника дорівнює степеню знаменника). Тому для інтегрування слід виділити цілу частину: $\frac{x-3}{5x-4} = \frac{\frac{1}{5}(5x-4) - \frac{11}{5}}{5x-4} = \frac{1}{5}\left(1 - \frac{11}{5x-4}\right)$. Тоді, застосувавши властивості $\mathbf{1^o}$ та $\mathbf{2^o}$, матимемо

$$\int \frac{x-3}{5x-4}\,dx = \frac{1}{5}\int\left(1 - \frac{11}{5x-4}\right)dx = 0,2\left(\int dx - 11\int \frac{dx}{5x + (-4)}\right) =$$

$$= 0,2\left(x - 11\cdot\frac{1}{5}\ln\left|5x + (-4)\right|\right) + C = 0,2\,x - 0,44\,\ln\left|5x-4\right| + C$$

(для обчислення другого інтеграла скористалися табличним інтегралом **II** та властивістю $\mathbf{3^o}$ ($k = 5$, $b = -4$)). ⌋

51. $\int \frac{x^2 + 3x + 7}{x+1}\,dx$.

⌈ Підінтегральна функція – неправильний раціональний дріб (степінь чисельника більший за степінь знаменника). Виділимо цілу частину:

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{l} x^2+3x+7 \\ \underline{x^2+x} \end{array} & \dfrac{x+1}{x+2}
\end{array}
;\qquad \frac{x^2+3x+7}{x+1}=x+2+\frac{5}{x+1}.
$$

$$
\begin{array}{r}
-\begin{array}{l} 2x+7 \\ \underline{2x+2} \end{array} \\
5
\end{array}
$$

Отже, $\displaystyle\int\frac{x^2+3x+7}{x+1}dx=\int\left(x+2+\frac{5}{x+1}\right)dx=$

$$
=\frac{x^2}{2}+2x+5\ln|x+1|+C. \quad \lrcorner
$$

52. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^4+x^2}$.

$\ulcorner$ Розкладемо підінтегральну функцію на доданки:

$$
\frac{1}{x^4+x^2}=\frac{1}{\left(x^2+1\right)x^2}=\frac{\left(x^2+1\right)-x^2}{\left(x^2+1\right)x^2}=
$$

$$
=\frac{x^2+1}{\left(x^2+1\right)x^2}-\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)x^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}.
$$

Тоді матимемо

$$
\int\frac{dx}{x^4+x^2}=\int\frac{dx}{x^2}-\int\frac{dx}{x^2+1}=-\frac{1}{x}-\operatorname{arctg}x+C. \quad \lrcorner
$$

53. $\displaystyle\int(x+1)^{10}x\,dx$.

$\ulcorner$ $\displaystyle\int(x+1)^{10}x\,dx=\int(x+1)^{10}\left((x+1)-1\right)dx=$

$$
=\int\left((x+1)^{11}-(x+1)^{10}\right)dx=\int(x+1)^{11}dx-\int(x+1)^{10}dx=
$$

$$
=\frac{(x+1)^{12}}{12}-\frac{(x+1)^{11}}{11}+C
$$

(скористалися табличним інтегралом **I** та властивістю **3.2°** ($b=1$)). $\lrcorner$

54. $\displaystyle\int\frac{4-x}{\sqrt{x-1}}dx$.

$\ulcorner$ $\displaystyle\int\frac{4-x}{\sqrt{x-1}}dx=\int\frac{3-(x-1)}{\sqrt{x-1}}dx=\int\left(\frac{3}{\sqrt{x-1}}-\frac{x-1}{\sqrt{x-1}}\right)dx=$

$$= 3\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}} - \int \sqrt{x-1}\, dx = 3 \cdot 2\sqrt{x-1} - \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= 6\sqrt{x-1} - \frac{2}{3}\left(\sqrt{x-1}\right)^3 + C\ .$$

Тут скористалися прикладами **5**, **6** та властивістю **3.2º** ($b = -1$). Зауважимо також, що перший інтеграл можна просто обчислити за формулою з прикладу **39**. ⌟

55. $\int \sin 5x \cos 2x\ dx$.

⌜ Скориставшись формулою

$$\sin\alpha\ \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right]$$

та властивостями невизначеного інтеграла, дістанемо

$$\int \sin 5x\ \cos 2x\, dx = \int \frac{1}{2}\left[\sin(5x-2x) + \sin(5x+2x)\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int(\sin 3x + \sin 7x)\, dx = \frac{1}{3}\left(\int \sin 3x\, dx + \int \sin 7x\, dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\cos 3x - \frac{1}{7}\cos 7x\right) + C = -\frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{14}\cos 7x + C\ .$$ ⌟

56. $\int (4 - \sin 3x)^2\ dx$.

⌜ $$\int(4-\sin 3x)^2\ dx = \int\left(16 - 8\sin 3x + \sin^2 3x\right) dx =$$

$$= \int 16\, dx - \int 8\sin 3x\, dx + \int \frac{1}{2}(1-\cos 6x)\, dx =$$

$$= 16x - 8\int \sin 3x\, dx + \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 6x\, dx =$$

$$= 16x - 8 \cdot \frac{1}{3}(-\cos 3x) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\sin 6x + C =$$

$$= 16\frac{1}{2}\ x + \frac{8}{3}\cos 3x - \frac{1}{12}\sin 6x + C\ .$$ ⌟

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

Обчислити невизначені інтеграли:

57. $\int \sqrt{2}\ dx$.

58. $\int \frac{9dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

59. $\int \left(9x^5 - \sqrt[5]{x}\right) dx$.

60. $\int 3^x \left(4 + 3^{1-x}\right) dx$.

61. $\int \mathrm{ctg}^2\, x\ dx$.

62. $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$.

63. $\int \frac{x^4\, dx}{x^2+1}$.

64. $\int e^{3x}\, dx$.

65. $\int e^{-x}\, dx$.

66. $\int \cos\frac{x}{6}\, dx$.

67. $\int \frac{dx}{x+4}$.

68. $\int \frac{3dx}{x-9}$.

69 $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$.

70. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x-16}}$.

71. $\int \frac{dx}{(6+5x)^3}$.

72. $\int \sqrt{9-4x}\ dx$.

73. $\int \frac{dx}{\cos^2(3x-7)}$.

74. $\int \frac{dx}{\sin^2(6-x)}$.

75. $\int \frac{dx}{9-5x^2}$.

76. $\int \sin^2 x\ dx$.

77. $\int \frac{10\,dx}{x^2-8x-9}$.

78. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}$.

79. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+0,25}}$.

80. $\int \frac{x\ dx}{3x+2}$.

81. $\int \frac{3x^2-x+1}{x-2}\,dx$.

82. $\int \frac{8\,dx}{x^4-4x^2}$.

83. $\int \frac{x-5}{(x-4)^3}\,dx$.

84. $\int \sqrt[3]{x+1}\,x\,dx$.

85. $\int 2\cos(5x+2)\,\cos(4x-3)\,dx$.

86. $\int (\cos x-\sin x)^2\,dx$.