

Розділ 6. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Невизначеним інтегралом $\int f(x) dx$ функції $f(x)$ (на проміжку X) називають вираз $F(x) + C$, де $F(x)$ – одна з первісних функцій $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$ ($x \in X$); C – довільна стала.

1. Таблиця основних невизначених інтегралів

$$\text{I.} \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1).$$

$$\text{II.} \quad \int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

$$\text{III.} \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1).$$

Зокрема, при $a = e$

$$\text{III}^\circ. \quad \int e^x dx = e^x + C.$$

$$\text{IV.} \quad \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$\text{V.} \quad \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$\text{VI.} \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$\text{VII.} \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$\text{VIII.} \quad \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$$

Зокрема, при $a = 1$

$$\text{VIII}^\circ. \quad \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg} x + C.$$

$$\text{IX.} \quad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad (a > 0).$$

Зокрема, при $a = 1$

$$\text{IX}^\circ. \quad \int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C.$$

$$\text{X.} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$$

Зокрема, при $a = 1$

$$\text{X}^\circ. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C.$$

$$\text{XI.} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C \quad (a \neq 0).$$

Зокрема, при $a = 1$

$$\text{XI}^\circ. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + 1} \right| + C = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) + C.$$

У справедливості формул **I–XI** легко переконатися, використовуючи диференціювання. Розглянемо, наприклад, інтеграл

$$\text{II} \quad - \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C. \quad \text{Потрібно показати, що } (\ln|x|)' = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0).$$

Дійсно, якщо $x > 0$, то $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$; якщо ж $x < 0$, то

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = -\frac{1}{x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

Зауважимо, що кожна з формул **I–XI** вірна на будь-якому проміжку з області визначення відповідної підінтегральної функції.

Таблицю основних інтегралів слід вивчити **напам'ять!**

Скориставшись табличним інтегралом **I**, довести формули:

$$1. \quad \int dx = x + C.$$

$$\lceil \int dx = \int 1 dx = \int x^0 dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} + C = x + C. \quad \rfloor$$

$$2. \quad \int x dx = \frac{x^2}{2} + C.$$

$$\lceil \int x dx = \int x^1 dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{x^2}{2} + C. \quad \rfloor$$

$$3. \quad \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

$$\lceil \int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = \frac{x^3}{3} + C. \rfloor$$

$$4. \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C.$$

$$\lceil \int \frac{dx}{x^2} = \int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C. \rfloor$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$$

$$\lceil \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C. \rfloor$$

Обчислити інтеграли, скориставшись табличним інтегралом **I** :

$$6. \int \sqrt{x} dx.$$

$$\lceil \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C. \rfloor$$

$$7. \int \frac{dx}{x^3}.$$

$$\lceil \int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C. \rfloor$$

$$8. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}.$$

$$\lceil \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} dx = \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + C. \rfloor$$

Обчислити інтеграли, скориставшись табличним інтегралом **III** :

$$9. \int 2^x dx.$$

$$\lceil \int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C \quad (\text{в інтегралі III поклали } a = 2). \rfloor$$

$$10. \int \frac{dx}{2^x}.$$

$$\lceil \int \frac{dx}{2^x} = \int \frac{1}{2^x} dx = \int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln \frac{1}{2}} + C = \frac{1}{2^x} + C = -\frac{1}{2^x \ln 2} + C$$

(в інтегралі **III** поклали $a = \frac{1}{2}$). \lrcorner

Обчислити невизначені інтеграли:

$$11. \int \frac{dx}{x^2 + 9}.$$

\lceil Зведемо до інтеграла **VIII** при $a = 3$:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 9} = \int \frac{dx}{x^2 + 3^2} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C. \lrcorner$$

$$12. \int \frac{dx}{x^2 - 5}.$$

\lceil Зведемо до інтеграла **IX** ($a = \sqrt{5}$):

$$\int \frac{dx}{x^2 - 5} = \int \frac{dx}{x^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{5}}{x + \sqrt{5}} \right| + C. \lrcorner$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 5}}.$$

\lceil Використаємо інтеграл **XI** ($a = -5$):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + (-5)}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + (-5)} \right| + C = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - 5} \right| + C. \lrcorner$$

Зауваження. Додатково до таблиці основних невизначених інтегралів доцільно **запам'ятати** також інтеграли **1 – 5**.

Вправи для самостійного розв'язання

Обчислити невизначені інтеграли:

$$14. \int x^4 dx.$$

$$15. \int \frac{dx}{x^5}.$$

16. $\int \sqrt[3]{x} dx$.

17. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$.

18. $\int 5^x dx$.

19. $\int \frac{dx}{4^x}$.

20. $\int \frac{dx}{x^2 + 4}$.

21. $\int \frac{dx}{2 + x^2}$.

22. $\int \frac{dx}{x^2 - 9}$.

23. $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - x^2}}$.

24. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}}$.

26. Довести формулу $\int k dx = kx + C$ (k – стала).

2. Безпосереднє інтегрування

Безпосереднє обчислення невизначених інтегралів ґрунтується на тотожних перетвореннях підінтегральної функції та властивостях невизначеного інтеграла.

Властивості невизначеного інтеграла

$$1^\circ. \int k f(x) dx = k \int f(x) dx \quad (k \text{ – стала, } k \neq 0).$$

$$2^\circ. \int (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx.$$

Ця властивість узагальнюється на довільне скінченне число доданків:

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_m(x)) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx \pm \dots \pm \int f_m(x) dx.$$

3°. Якщо $\int f(x) dx = F(x) + C$, то для будь-яких сталих k та b ($k \neq 0$)

$$\int f(kx + b) dx = \frac{1}{k} F(kx + b) + C.$$

Частинні випадки властивості 3° (відповідно при $b = 0$ та $k = 1$):

$$3.1^\circ. \int f(kx) dx = \frac{1}{k} F(kx) + C;$$

$$3.2^\circ. \int f(x + b) dx = F(x + b) + C.$$

Обчислити невизначені інтеграли, застосувавши властивість 1°:

$$27. \int \frac{3 dx}{\cos^2 x}.$$

$$\Gamma \int \frac{3 dx}{\cos^2 x} = 3 \int \frac{dx}{\cos^2 x} = 3(\operatorname{tg} x + C) = 3 \operatorname{tg} x + 3C \quad (\text{після застосування}$$

властивості **1°** використали табличний інтеграл **VI**). Позначивши довільну сталу $3C$ знову через C , дістанемо

$$\int \frac{3 dx}{\cos^2 x} = 3 \operatorname{tg} x + C. \quad \rfloor$$

Зауваження. Надалі після обчислення невизначених інтегралів записуватимемо відразу сталу C , опускаючи подібні до наведених пояснення.

$$28. \int \frac{x}{2} dx.$$

$$\Gamma \int \frac{x}{2} dx = \int \frac{1}{2} x dx = \frac{1}{2} \int x dx = \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{4} + C$$

(після застосування властивості **1°** скористалися табличним інтегралом **I** (приклад 2)). \rfloor

$$29. \int \frac{dx}{4-x^2}.$$

$$\Gamma \int \frac{dx}{4-x^2} = \int \frac{dx}{-(x^2-4)} = -\int \frac{dx}{x^2-2^2} = -\frac{1}{2 \cdot 2} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C =$$

$$= -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C$$

(скористалися табличним інтегралом **IX** при $a = 2$). \rfloor

Обчислити інтеграли, застосувавши властивості **1°** та **2°**:

$$30. \int (6x^2 + \pi \sin x) dx \quad (\pi \approx 3,14).$$

Γ Застосуємо послідовно властивості **2°** та **1°**:

$$\int (6x^2 + \pi \sin x) dx = \int 6x^2 dx + \int \pi \sin x dx = 6 \int x^2 dx + \pi \int \sin x dx.$$

Для обчислення інтегралів у правій частині рівності використовуємо табличні інтеграли відповідно **I** ($n = 2$, приклад 3) та **V** і остаточно дістаємо

$$\int (6x^2 + \pi \sin x) dx = 6 \frac{x^3}{3} + \pi(-\cos x) + C = 2x^3 - \pi \cos x + C. \quad \lrcorner$$

$$31. \int \left(4 - \frac{3}{x} + \frac{e^x}{2} \right) dx.$$

┌ Застосуємо послідовно властивості **2°**, **1°** і табличні інтеграли **I** (приклад **1**), **II**, **III°**:

$$\begin{aligned} \int \left(4 - \frac{3}{x} + \frac{e^x}{2} \right) dx &= \int 4 dx - \int \frac{3}{x} dx + \int \frac{1}{2} e^x dx = \\ &= 4 \int dx - 3 \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2} \int e^x dx = 4x - 3 \ln|x| + 0,5 e^x + C. \quad \lrcorner \end{aligned}$$

$$32. \int x \left(8x^2 + \frac{1}{x^3} \right) dx.$$

┌ Спочатку розкриємо дужки:

$$\int x \left(8x^2 + \frac{1}{x^3} \right) dx = \int \left(8x^2 \cdot x + \frac{x}{x^3} \right) dx = \int \left(8x^3 + \frac{1}{x^2} \right) dx.$$

Далі застосуємо властивості **2°**, **1°** і табличний інтеграл **I** відповідно при $n=3$ та $n=-2$ (приклад **4**):

$$\int \left(8x^3 + \frac{1}{x^2} \right) dx = 8 \int x^3 dx + \int \frac{dx}{x^2} = 8 \frac{x^4}{4} + \left(-\frac{1}{x} \right) + C = 2x^4 - \frac{1}{x} + C.$$

$$\text{Отже, } \int x \left(8x^2 + \frac{1}{x^3} \right) dx = 2x^4 - \frac{1}{x} + C. \quad \lrcorner$$

$$33. \int \frac{3x^4 - 2}{x^3} dx.$$

┌ Спочатку поділимо почленно чисельник на знаменник:

$$\int \frac{3x^4 - 2}{x^3} dx = \int \left(\frac{3x^4}{x^3} - \frac{2}{x^3} \right) dx = \int \left(3x - \frac{2}{x^3} \right) dx.$$

Далі застосуємо властивості **2°**, **1°** і табличний інтеграл **I** (приклади **2** та **7**):

$$\int \left(3x - \frac{2}{x^3} \right) dx = 3 \int x dx - 2 \int \frac{dx}{x^3} = 3 \frac{x^2}{2} - 2 \left(-\frac{1}{2x^2} \right) + C = \frac{3}{2} x^2 + \frac{1}{x^2} + C.$$

$$\text{Отже, } \int \frac{3x^4 - 2}{x^3} dx = \frac{3}{2} x^2 + \frac{1}{x^2} + C. \quad \lrcorner$$

$$34. \int \frac{x^2 + 5}{x^2 - 1} dx.$$

┌ Підінтегральна функція $\frac{x^2 + 5}{x^2 - 1}$ – неправильний раціональний дріб (ступінь чисельника дорівнює степеню знаменника). Тому для інтегрування слід виділити цілу частину: $\frac{x^2 + 5}{x^2 - 1} = \frac{(x^2 - 1) + 6}{x^2 - 1} = 1 + \frac{6}{x^2 - 1}$

. Тоді, застосувавши властивості **2°** та **1°**, матимемо

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 5}{x^2 - 1} dx &= \int \left(1 + \frac{6}{x^2 - 1} \right) dx = \int 1 dx + 6 \int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \\ &= x + 6 \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C = x + 3 \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C \end{aligned}$$

(скористалися табличними інтегралами **I** (приклад **1**) та **IX°**). ┘

$$35. \int \cos^2 \frac{x}{2} dx.$$

┌ Скориставшись відомою з тригонометрії формулою, дістанемо

$$\begin{aligned} \int \cos^2 \frac{x}{2} dx &= \int \frac{1 + \cos x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\int dx + \int \cos x dx \right) = \frac{1}{2} (x + \sin x) + C. \quad _ \end{aligned}$$

Застосувавши властивість **3.1°**, довести формули:

$$36. \int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C \quad (k - \text{стала}, k \neq 0).$$

┌ Ця формула є наслідком формули $\int e^x dx = e^x + C$ (табличний інтеграл **III°**) та властивості **3.1°**, в якій $f(x) = e^x$, $F(x) = e^x$. ┘

$$37. \int \cos kx dx = \frac{1}{k} \sin kx + C \quad (k - \text{стала}, k \neq 0).$$

┌ Ця формула є наслідком формули $\int \cos x dx = \sin x + C$ (табличний інтеграл **IV**) та властивості **3.1°**, в якій $f(x) = \cos x$, $F(x) = \sin x$. ┘

Застосувавши властивість **3.2°**, довести формули:

$$38. \int \frac{dx}{x+b} = \ln|x+b| + C \quad (b - \text{ стала}).$$

┌ Ця формула є наслідком формули $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ (табличний інтеграл **II**) та властивості **3.2°**, в якій $f(x) = \frac{1}{x}$, $F(x) = \ln|x|$. ┘

$$39. \int \frac{dx}{\sqrt{x+b}} = 2\sqrt{x+b} + C \quad (b - \text{ стала}).$$

┌ Ця формула є наслідком формули $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$ (приклад **5**) та властивості **3.2°**, в якій $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $F(x) = 2\sqrt{x}$. ┘

Обчислити невизначені інтеграли:

$$40. \int 3^{\frac{x}{2}} dx.$$

┌ Оскільки $\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C$ (табличний інтеграл **III** при $a=3$),

то за властивістю **3.1°** ($k = \frac{1}{2}$) дістанемо

$$\int 3^{\frac{x}{2}} dx = \int 3^{\frac{1}{2}x} dx = \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{3^{\frac{1}{2}x}}{\ln 3} + C = \frac{2}{\ln 3} 3^{\frac{x}{2}} + C. \quad _$$

$$41. \int \sin 4x dx.$$

┌ Оскільки $\int \sin x dx = -\cos x + C$ (табличний інтеграл **V**), то за властивістю **3.1°** ($k=4$) дістанемо

$$\int \sin 4x dx = \frac{1}{4}(-\cos 4x) + C = -\frac{1}{4} \cos 4x + C. \quad _$$

$$42. \int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{5}}.$$

Г Оскільки $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$ (табличний інтеграл **VII**), то за

властивістю **3.1**^o ($k = \frac{1}{5}$) дістанемо

$$\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{5}} = \int \frac{dx}{\sin^2 \frac{1}{5} x} = \frac{1}{\frac{1}{5}} \left(-\operatorname{ctg} \frac{1}{5} x \right) + C = -5 \operatorname{ctg} \frac{x}{5} + C. \quad \lrcorner$$

43. $\int \frac{dx}{9x^2 + 1}.$

Г Оскільки $\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg} x + C$ (табличний інтеграл **VIII**^o), то

виконавши тотожне перетворення підінтегральної функції, маємо

$$\int \frac{dx}{9x^2 + 1} = \int \frac{dx}{(3x)^2 + 1} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} 3x + C$$

(скористалися властивістю **3.1**^o ($k = 3$)). \lrcorner

44. $\int (x-1)^4 dx.$

Г Оскільки $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$, то за властивістю **3.2**^o ($b = -1$)

$$\int (x-1)^4 dx = \int (x+(-1))^4 dx = \frac{(x+(-1))^5}{5} + C = \frac{(x-1)^5}{5} + C. \quad \lrcorner$$

45. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}}.$

Г Розглянемо табличний інтеграл **X**, $a = 2$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2^2-x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{2} + C. \quad \text{Тоді за властивістю } \mathbf{3.1}^o,$$

виконавши тотожне перетворення, дістанемо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(\sqrt{3}x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arcsin} \frac{\sqrt{3}x}{2} + C. \quad \lrcorner$$

46. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}}.$

Г Оскільки $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$ (приклад 5), то виконавши тотожні перетворення, дістанемо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-1 \cdot x + 1}} = \frac{1}{-1} \cdot 2\sqrt{-1 \cdot x + 1} + C = -2\sqrt{1-x} + C$$

(скористалися властивістю 3° ($k = -1, b = 1$)).]

$$47. \int \frac{dx}{(4x+5)^2}.$$

Г Оскільки $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$ (приклад 4), то за властивістю 3° ($k = 4, b = 5$) маємо

$$\int \frac{dx}{(4x+5)^2} = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{4x+5} \right) + C = -\frac{1}{4(4x+5)} + C.]$$

$$48. \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 13}.$$

Г Спочатку виділимо в знаменнику повний квадрат відносно x :

$$x^2 + 4x + 13 = (x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2) + 9 = (x+2)^2 + 9$$

(скористалися формулою $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$).

Обчислюємо інтеграл:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 13} = \int \frac{dx}{(x+2)^2 + 9} = \int \frac{dx}{(x+2)^2 + 3^2} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{3} + C$$

(скористалися табличним інтегралом VIII при $a=3$ та властивістю 3.2° ($b=2$)).]

$$49. \int \frac{dx}{\sqrt{6x - x^2 - 8}}.$$

Г Спочатку виділимо повний квадрат відносно x :

$$\begin{aligned} 6x - x^2 - 8 &= -(x^2 - 6x + 8) = -[(x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2) - 1] = \\ &= -[(x-3)^2 - 1] = 1 - (x-3)^2 \end{aligned}$$

(скористалися формулою $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$).

Обчислюємо інтеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-3)^2}} = \arcsin(x-3) + C$$

(скористалися табличним інтегралом **X**^o та властивістю **3.2**^o ($b = -3$)).

┘

50. $\int \frac{x-3}{5x-4} dx.$

┘ Підінтегральна функція $\frac{x-3}{5x-4}$ – неправильний раціональний

дріб (ступінь чисельника дорівнює степеню знаменника). Тому для інтегрування слід виділити цілу частину:

$$\frac{x-3}{5x-4} = \frac{\frac{1}{5}(5x-4) - \frac{11}{5}}{5x-4} = \frac{1}{5} \left(1 - \frac{11}{5x-4} \right).$$

Тоді, застосувавши властивості

1^o та **2**^o, матимемо

$$\begin{aligned} \int \frac{x-3}{5x-4} dx &= \frac{1}{5} \int \left(1 - \frac{11}{5x-4} \right) dx = 0,2 \left(\int dx - 11 \int \frac{dx}{5x+(-4)} \right) = \\ &= 0,2 \left(x - 11 \cdot \frac{1}{5} \ln |5x+(-4)| \right) + C = 0,2x - 0,44 \ln |5x-4| + C \end{aligned}$$

(для обчислення другого інтеграла скористалися табличним інтегралом **II** та властивістю **3**^o ($k = 5, b = -4$)).

┘

51. $\int \frac{x^2+3x+7}{x+1} dx.$

┘ Підінтегральна функція – неправильний раціональний дріб (ступінь чисельника більший за ступінь знаменника). Виділимо цілу частину:

$$\begin{aligned} - \frac{x^2+3x+7}{x^2+x} \Big| \frac{x+1}{x+2}; \quad \frac{x^2+3x+7}{x+1} &= x+2 + \frac{5}{x+1}. \\ - \frac{2x+7}{2x+2} \\ 5 \end{aligned}$$

Отже,
$$\int \frac{x^2 + 3x + 7}{x + 1} dx = \int \left(x + 2 + \frac{5}{x + 1} \right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2x + 5 \ln|x + 1| + C. \quad \square$$

52.
$$\int \frac{dx}{x^4 + x^2}.$$

□ Розкладемо підінтегральну функцію на доданки:

$$\frac{1}{x^4 + x^2} = \frac{1}{(x^2 + 1)x^2} = \frac{(x^2 + 1) - x^2}{(x^2 + 1)x^2} =$$

$$= \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 1)x^2} - \frac{x^2}{(x^2 + 1)x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Тоді матимемо

$$\int \frac{dx}{x^4 + x^2} = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x^2 + 1} = -\frac{1}{x} - \arctg x + C. \quad \square$$

53.
$$\int (x + 1)^{10} x dx.$$

$$\square \int (x + 1)^{10} x dx = \int (x + 1)^{10} ((x + 1) - 1) dx =$$

$$= \int ((x + 1)^{11} - (x + 1)^{10}) dx = \int (x + 1)^{11} dx - \int (x + 1)^{10} dx =$$

$$= \frac{(x + 1)^{12}}{12} - \frac{(x + 1)^{11}}{11} + C$$

(скористалися табличним інтегралом **I** та властивістю **3.2°** ($b = 1$)). □

54.
$$\int \frac{4 - x}{\sqrt{x - 1}} dx.$$

$$\square \int \frac{4 - x}{\sqrt{x - 1}} dx = \int \frac{3 - (x - 1)}{\sqrt{x - 1}} dx = \int \left(\frac{3}{\sqrt{x - 1}} - \frac{x - 1}{\sqrt{x - 1}} \right) dx =$$

$$= 3 \int \frac{dx}{\sqrt{x - 1}} - \int \sqrt{x - 1} dx = 3 \cdot 2\sqrt{x - 1} - \frac{2}{3}(x - 1)^{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= 6\sqrt{x - 1} - \frac{2}{3}(\sqrt{x - 1})^3 + C.$$

Тут скористалися прикладами **5**, **6** та властивістю **3.2°** ($b = -1$).
 Зауважимо також, що перший інтеграл можна просто обчислити за формулою з прикладу **39**. ┘

55. $\int \sin 5x \cos 2x \, dx$.

┌ Скориставшись формулою

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

та властивостями невизначеного інтеграла, дістанемо

$$\begin{aligned} \int \sin 5x \cos 2x \, dx &= \int \frac{1}{2} [\sin(5x - 2x) + \sin(5x + 2x)] \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \int (\sin 3x + \sin 7x) \, dx = \frac{1}{3} \left(\int \sin 3x \, dx + \int \sin 7x \, dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} \cos 3x - \frac{1}{7} \cos 7x \right) + C = -\frac{1}{6} \cos 3x - \frac{1}{14} \cos 7x + C. \quad \text{┘} \end{aligned}$$

56. $\int (4 - \sin 3x)^2 \, dx$.

┌ $\int (4 - \sin 3x)^2 \, dx = \int (16 - 8 \sin 3x + \sin^2 3x) \, dx =$

$$= \int 16 \, dx - \int 8 \sin 3x \, dx + \int \frac{1}{2} (1 - \cos 6x) \, dx =$$

$$= 16x - 8 \int \sin 3x \, dx + \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 6x \, dx =$$

$$= 16x - 8 \cdot \frac{1}{3} (-\cos 3x) + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \sin 6x + C =$$

$$= 16 \frac{1}{2} x + \frac{8}{3} \cos 3x - \frac{1}{12} \sin 6x + C. \quad \text{┘}$$

Вправи для самостійного розв'язання

Обчислити невизначені інтеграли:

57. $\int \sqrt{2} \, dx$.

58. $\int \frac{9 \, dx}{\sqrt{9 - x^2}}$.

59. $\int (9x^5 - \sqrt[5]{x}) \, dx$.

60. $\int 3^x (4 + 3^{1-x}) \, dx$.

61. $\int \operatorname{ctg}^2 x \, dx$.
62. $\int \left(\frac{1-x}{x} \right)^2 dx$.
63. $\int \frac{x^4 \, dx}{x^2+1}$.
64. $\int e^{3x} \, dx$.
65. $\int e^{-x} \, dx$.
66. $\int \cos \frac{x}{6} \, dx$.
67. $\int \frac{dx}{x+4}$.
68. $\int \frac{3dx}{x-9}$.
69. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$.
70. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x-16}}$.
71. $\int \frac{dx}{(6+5x)^3}$.
72. $\int \sqrt{9-4x} \, dx$.
73. $\int \frac{dx}{\cos^2(3x-7)}$.
74. $\int \frac{dx}{\sin^2(6-x)}$.
75. $\int \frac{dx}{9-5x^2}$.
76. $\int \sin^2 x \, dx$.
77. $\int \frac{10dx}{x^2-8x-9}$.
78. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}$.
79. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+0,25}}$.
80. $\int \frac{x \, dx}{3x+2}$.
81. $\int \frac{3x^2-x+1}{x-2} \, dx$.
82. $\int \frac{8dx}{x^4-4x^2}$.
83. $\int \frac{x-5}{(x-4)^3} \, dx$.
84. $\int \sqrt[3]{x+1} \, x \, dx$.
85. $\int 2 \cos(5x+2) \cos(4x-3) \, dx$.
86. $\int (\cos x - \sin x)^2 \, dx$.