

**Лекція 26.03.2020 р.**  
**Взаємна індуктивність в електричних колах**

Між електричним струмом і магнітним потоком існує тісний взаємозв'язок. Змінний струм, протікаючи по контуру, створює змінний магнітний потік. Якщо в цей потік внести провідник, то згідно закону електромагнітної індукції на кінцях провідника виникає електрорушійна сила.

При достатній близькості двох контурів, магнітне поле одного з них впливає на другий контур, і навпаки. Це особливо яскраво видно, в системі двох (намотаних одна на одну) котушок індуктивності. Коли змінюється струм тільки у першій котушці, в другій – наводиться ЕРС

$$e_2 = -\frac{d\psi_{21}}{dt} = -M_{21} \frac{di_1}{dt}.$$

При зміні струму тільки в другій котушці в першій наводиться ЕРС

$$e_1 = -\frac{d\psi_{12}}{dt} = -M_{12} \frac{di_2}{dt}.$$

Це явище називають *взаємною індукцією*, а коефіцієнти пропорційності

$M_{12} = M_{21} = M$  називають коефіцієнтами взаємної індукції, або *взаємними індуктивностями*, які, як і власні індуктивності вимірюються у Генрі (Г).

Такі котушки індуктивності зі спільним (взаємним) магнітним полем називаються зв'язаними (індуктивно-зв'язаними).

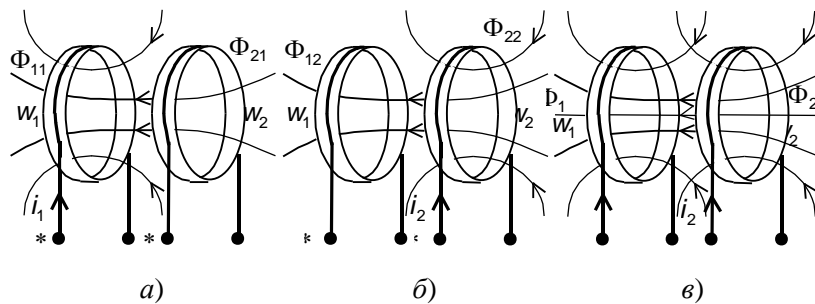


Рис.1

На рис. 1 а, б схематично показані магнітні потоки двох котушок, створені струмом  $i_1$  при  $i_2 = 0$  та струмом  $i_2$  при  $i_1 = 0$ .

*Коли ж струми проходять в обох котушках повне потокозчеплення першої та другої котушок дорівнює алгебраїчній сумі потокозчеплень, обумовлених власною та взаємною індуктивностями.*

При складанні рівнянь для магнітозв'язаних кіл необхідно знати узгоджено чи, навпаки, зустрічно спрямовані потоки само- та взаємоіндукції. Це залежить від напрямку намотки котушок і напрямку струму в них. Нагадаємо, що напрямок магнітного потоку в котушці визначається за правилом правої руки: якщо правою рукою охопити котушку так щоб

чотири пальці показували напрям струму у витках тоді великий палець покаже напрям магнітного потоку.

Узгоджений режим увімкнення котушок буде в тому випадку, коли при протіканні струмів по котушках їх потокозчеплення само- та взаємоіндукції додаються рис. 2,а. У протилежному випадку потоки віднімаються – неузгоджений або зустрічний режим включення (рис. 2,а).

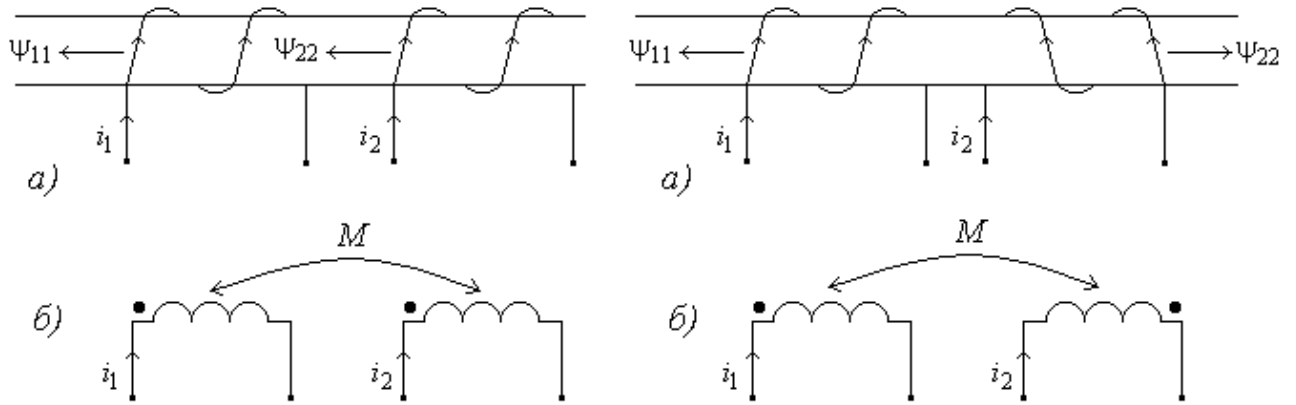


Рис. 2

Два кінці індуктивно-зв'язаних елементів називаються *однойменними*, якщо при однакових напрямках струмів відносно цих кінців потокозчеплення само- та взаємоіндукції у кожному з елементів спрямовані однаково, тобто додаються.

На схемах однойменні кінці взаємозв'язаних котушок позначаються спеціальними значками: точками (•), зірочками (\*) тощо.

По мірі віддалення двох контурів їх магнітний зв'язок зменшується і при достатній відстані взаємоіндуктивність  $M$  можна не враховувати. Ступінь магнітного зв'язку між контурами (магнітно-зв'язаними котушками  $L_1, L_2$ ) характеризується *коефіцієнтом зв'язку*  $k$ .

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \leq 1, \text{ або } k = \frac{\omega M}{\sqrt{\omega L_1 \omega L_2}} = \frac{x_M}{\sqrt{x_1 x_2}} \leq 1.$$

Цей коефіцієнт може приймати значення в межах від 0 до 1.

$$M = M_{12} = \frac{w_1 \Phi_{12}}{i_2};$$

$$M = M_{21} = \frac{w_2 \Phi_{21}}{i_1};$$

$$L_1 = \frac{w_1 \Phi_{11}}{i_1}; \quad L_2 = \frac{w_2 \Phi_{22}}{i_2}.$$

Отже:

$$k^2 = \frac{M^2}{L_1 L_2} = \frac{\Phi_{12} \Phi_{21}}{\Phi_{11} \Phi_{22}}.$$

Якщо потік однієї котушки не досягає витків іншої ( $\Phi_{12} = 0, \Phi_{21} = 0$ ), то  $k = 0$ , якщо весь потік однієї з котушок перетинає витки і другої котушки, то  $k = 1$ .

ЕРС, які виникають через взаємоіндуктивність обумовлюють додаткові напруги на котушках. Враховуючи, що  $M_{12} = M_{21} = M$ , переходимо до комплексів:

Для того, щоб записати рівняння для напруг перш за все треба задати напрями струмів та напруг (Рис. 3).

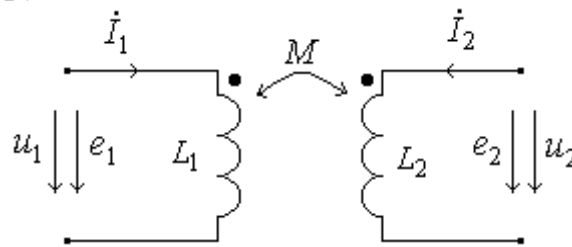


Рис. 3

$$u_1 = u_{1L} + u_{1M}, u_2 = u_{2L} + u_{2M}, e_1 = e_{1L} + e_{1M}, e_2 = e_{2L} + e_{2M}.$$

$$u_{1M} = -e_{1M} = \frac{d\psi_{12}}{dt} = M_{12} \frac{di_2}{dt}; \quad u_{2M} = -e_{2M} = \frac{d\psi_{21}}{dt} = M_{21} \frac{di_1}{dt}.$$

$$u_1 = -e_1 = \frac{d\psi_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt};$$

$$u_2 = -e_2 = \frac{d\psi_2}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt}.$$

Знак "плюс" у рівняннях відповідає узгодженому підключенню котушок, знак "мінус" – зустрічному.

Отже, за рахунок магнітного зв'язку струм, який протікає через одну індуктивність, викликає появу напруги на полюсах інших індуктивних елементів, розміщених поряд.

### Послідовне з'єднання двох індуктивно-зв'язаних котушок

На рис. 4 наведена схема *узгодженого* увімкнення котушок, струм однаково орієнтований (входить в однойменні вузли) відносно відмічених вузлів.

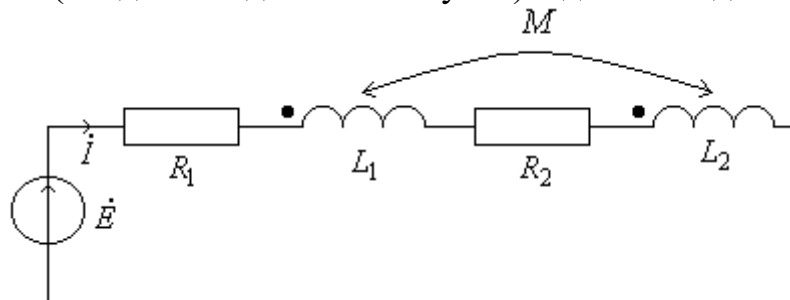


Рис. 4

Рівняння за другим законом Кірхгофа для узгодженого увімкнення напруга на вході:

$$\begin{aligned}
 u &= u_1 + u_2 = iR_1 + L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + iR_2 + L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} = \\
 &= i(R_1 + R_2) + (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt}.
 \end{aligned}$$

Із одержаного виразу видно, що дві індуктивно-зв'язані котушки, з'єднані послідовно, при узгодженому підключенні еквівалентні котушці, що має активний опір  $R_1 + R_2$  та індуктивність  $L_1 + L_2 + 2M$ . Таким чином, **при узгодженому послідовному підключенні індуктивність зростає**.

Рівняння можна записати в комплексному вигляді:

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = R_1 \dot{I} + j\omega L_1 \dot{I} + j\omega M \dot{I} + R_2 \dot{I} + j\omega L_2 \dot{I} + j\omega M \dot{I} = \dot{I}((R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)) = \dot{I}Z_{\text{узг}} = \dot{E}.$$

$Z_{\text{узг}} = (R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)$  – комплексний опір кола при послідовному узгодженому підключенні двох котушок.

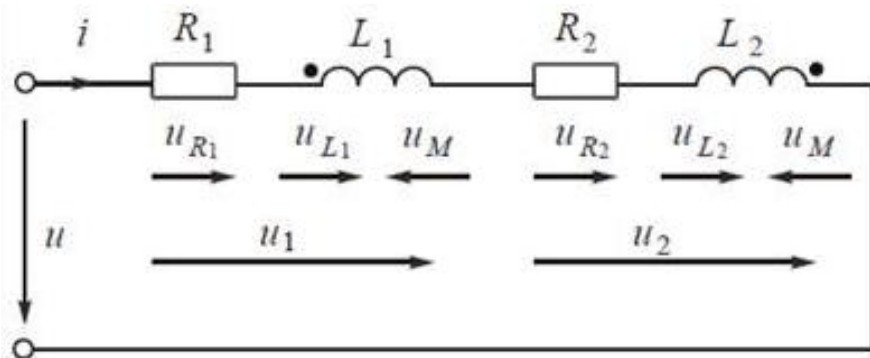


Рис. 5

При зустрічному увімкненні (рис.5) напруги взаємоіндукції  $j\omega M \dot{I}$  беруться зі знаком мінус

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = R_1 \dot{I} + j\omega L_1 \dot{I} - j\omega M \dot{I} + R_2 \dot{I} + j\omega L_2 \dot{I} - j\omega M \dot{I} = \dot{I}((R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)) = \dot{I}Z_{\text{зус}} = \dot{E}.$$

$Z_{\text{зус}} = (R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)$  – комплексний опір кола при послідовному узгодженому підключенні двох котушок.

Отже, наявність **взаємної індукції при послідовному зустрічному підключенні котушок зменшує індуктивність кола**.

Очевидно, при зустрічному увімкненні еквівалентні індуктивність і реактивний опір будуть менші, ніж при узгодженому. Різниця між еквівалентними індуктивностями узгодженого і зустрічного увімкнення дозволяє визначити взаємоіндуктивність:

$$\begin{aligned}
 Z_{\text{узг}} - Z_{\text{зус}} &= (L_1 + L_2 + 2M) - (L_1 + L_2 - 2M), \\
 4M &= Z_{\text{узг}} - Z_{\text{зус}}
 \end{aligned}$$

Векторні діаграми для послідовного з'єднання індуктивно-зв'язаних котушок побудовані для узгодженого режиму на рис. 6 а), для зустрічного режиму на рис. 6 б).

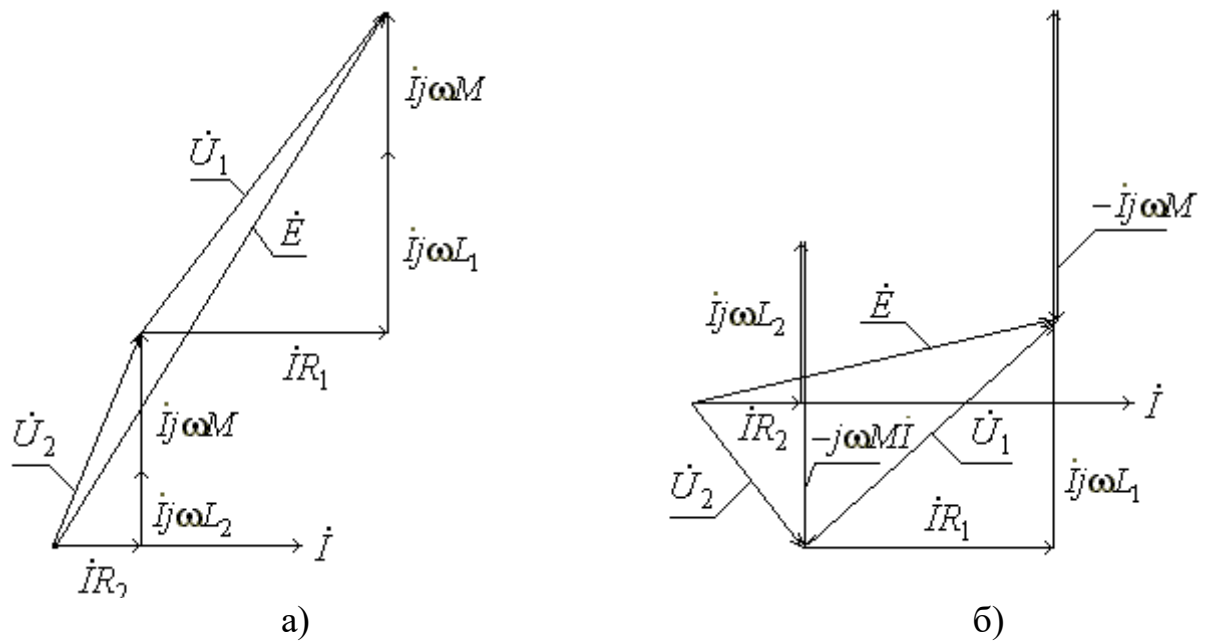


Рис. 6

### Паралельне з'єднання двох індуктивно-зв'язаних котушок

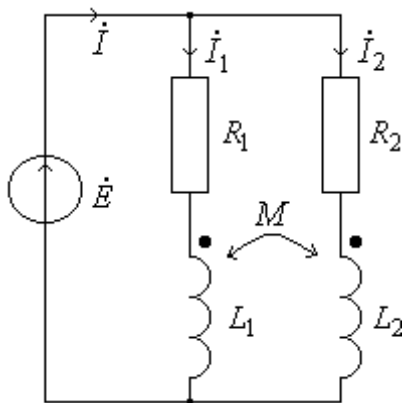


Рис. 7

При паралельному з'єднанні індуктивно зв'язаних котушок також розрізняють узгоджений режим увімкнення – струми входять в однойменні кінці котушок рис. 7, і неузгоджений (зустрічний) режим увімкнення - струми входять в різні кінці котушок.

Опори віток

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1 = R_1 + jX_{L1};$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2 = R_2 + jX_{L2}.$$

Опір взаємоіндукції  $\underline{Z}_M = j\omega M = jx_M$ .

Далі аналіз буде проводитися паралельно для узгодженого та зустрічного режимів.

Для визначення струмів складаються рівняння за законами Кірхгофа.

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2 \\ \dot{U} &= Z_1 i_1 + Z_M i_2 \\ \dot{U} &= Z_2 i_2 + Z_M i_1 \end{aligned}$$

Розв'язавши рівняння відносно струмів, маємо

$$Z_{узг} = \frac{Z_2 Z_1 + Z_M^2}{Z_2 + Z_1 - 2Z_M}$$

Для зустрічного паралельного з'єднання індуктивно-зв'язаних котушок:

$$Z_{зус} = \frac{Z_2 Z_1 - Z_M^2}{Z_2 + Z_1 + 2Z_M}$$

На рис. 8 а), б) показані векторні діаграми струмів і топографічні діаграми напруг, відповідно, для узгодженого та зустрічного режимів увімкнення.

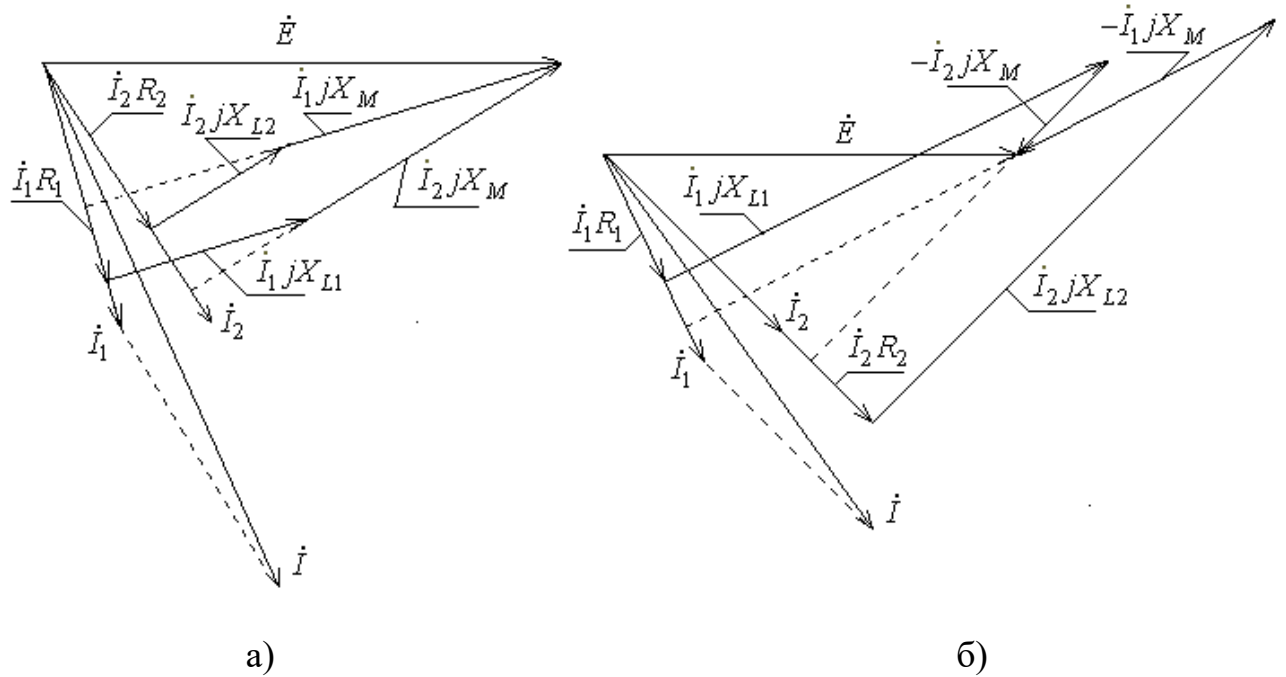


Рис. 8

Напруги на кожній котушці мають, як і в раніше розглянутому випадку, три складових – напруга на активному опорі, напруга самоіндукції і напруга взаємоіндукції, яка перпендикулярна до струму, що протікає у іншій котушці. В узгодженому режимі напруга взаємоіндукції котушки випереджає струм, що протікає в іншій котушці, в неузгодженому режимі – відстає від нього.

### Розрахунок розгалужених кіл при наявності взаємної індуктивності

Для розрахунку розгалужених кіл, що мають у своєму складі взаємоіндуктивно-зв'язані елементи, можна застосовувати закони Кірхгофа чи метод контурних струмів. Метод вузлових напруг неприйнятний, оскільки безпосередньо у рівняннях методу неможливо враховувати вплив ЕРС взаємоіндукції на струми віток. Метод еквівалентного генератора може використовуватися лише в тих випадках, коли навантаження не має індуктивного зв'язку з тією частиною схеми, яку замінюють еквівалентним генератором.

Складемо рівняння законів Кірхгофа для схеми, зображеної на рис. 9.

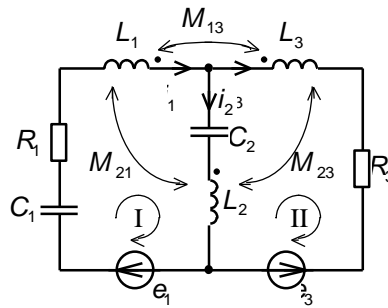


Рис. 9

При складанні рівнянь другого закону Кірхгофа для визначення знаку напруги на індуктивно-зв'язаних елементах будемо користуватися наступними міркуваннями. Якщо напрям струму у вітці співпадає з напрямом обходу контуру, то усі напруги на елементах цієї вітки мають додатний знак. Напруга, обумовлена наявністю взаємоіндуктивності, має крім того, ще і власний знак: "плюс" при узгодженому підключенні котушок, "мінус" – при зустрічному. Отже, записуючи напругу на взаємоіндуктивно зв'язаних котушках, треба враховувати обидва правила.

Отже, маємо за першим законом Кірхгофа:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

Рівняння другого закону Кірхгофа для першого контуру:

$$R_1 I_1 + j\omega L_1 I_1 + \frac{1}{j\omega C_1} I_1 - j\omega M_{12} I_2 - j\omega M_{13} I_3 + j\omega L_2 I_2 + \frac{1}{j\omega C_2} I_2 - j\omega M_{21} I_1 + j\omega M_{23} I_3 = E_1.$$

Знаки перед дужками в останньому рівнянні – "плюс", тому що напрями струмів  $I_1$  та  $I_2$  співпадають з напрямом обходу лівого контуру. Знаки в дужках обумовлені способом підключення котушок: зустрічним для першої та другої, першої та третьої, узгодженим для другої та третьої. Для другого контуру, опускаючи дужки, можна записати:

$$R_3 I_3 + j\omega L_3 I_3 - j\omega M_{31} I_1 + j\omega M_{32} I_2 - j\omega L_2 I_2 - \frac{1}{j\omega C_2} I_2 + j\omega M_{21} I_1 - j\omega M_{23} I_3 = -E_3.$$

### Складання рівнянь за методом контурних струмів

Загальний вигляд рівнянь, складених за методом контурних струмів, для двоконтурного кола

$$\begin{aligned} I_{11} Z_{11} + I_{22} Z_{12} &= E_{11}; \\ I_{11} Z_{21} + I_{22} Z_{22} &= E_{22}. \end{aligned}$$

Для кола, зображеного на рис.10 при заданих напрямках контурних струмів, власні та взаємні опори визначаються як звичайно, і додатково треба враховувати опори, які з'являються за рахунок взаємоіндукції. Для другого контурного струму котушки з'єднані послідовно зустрічно, тому у власний опір другого контура додається опір взаємоіндукції  $-j^2 X_M$ .

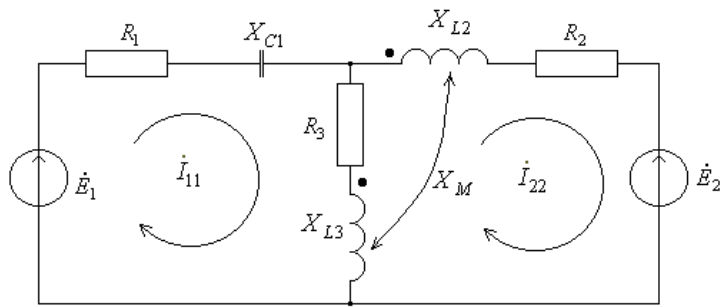


Рис. 10

Крім того до спільного опору між контурами додається опір взаємоіндукції, знак якого залежить від того, як орієнтовані контурні струми відносно однойменних кінців кожної з котушок. Так  $I_{11}$  входить в котушку  $X_{L3}$ , а струм  $I_{22}$  в котушку  $X_{L2}$  в однойменні кінці (в точку), тому у взаємний опір додається  $jX_M$ .

$$\begin{aligned} Z_{11} &= R_1 + R_2 + j(-X_{C1} + X_{L3}); & Z_{22} &= R_2 + R_3 + j(X_{L2} + X_{L3} - 2X_M); \\ Z_{12} = Z_{21} &= -(R_3 + jX_{L3}) + jX_M = -(R_3 + jX_{L3} - jX_M); & \dot{E}_{11} &= \dot{E}_1; & \dot{E}_{22} &= -\dot{E}_2. \end{aligned}$$

### Потужність у колах із взаємоіндукцією.

Комплексна потужність, обумовлена магнітним зв'язком  $x_M$  між елементами (котушками)  $X_{L1}$ ,  $X_{L2}$

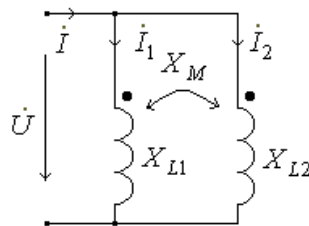


Рис. 11

$$\tilde{S}_M = \tilde{S}_{M1} + \tilde{S}_{M2} \quad \tilde{S}_{M1} = \mathcal{U}_{M1} \dot{I}_1^* = jX_M \dot{I}_2^* = P_{M1} + jQ_{M1};$$

$$\tilde{S}_{M2} = \mathcal{U}_{M2} \dot{I}_2^* = jX_M \dot{I}_1^* = P_{M2} + jQ_{M2}.$$

Сумарна активна потужність за рахунок магнітного зв'язку

$$P_M = P_{M1} + (-P_{M2}) = 0.$$

Реактивна потужність взаємоіндукції однакова в обох котушках. Сумарна реактивна потужність за рахунок магнітного зв'язку для узгодженого напрямку струмів (Рис. 11):

$$Q_M = Q_{M1} + Q_{M2} = 2Q_{M1} = 2Q_{M2} = 2x_M I_1 I_2 \cos(\psi_1 - \psi_2) = 2 \operatorname{Im}(\mathcal{U}_{M1} \dot{I}_1^*)$$

Для неузгодженого режиму знаки у формулах для  $Q_{M1}$ ,  $Q_{M2}$  змінюються на протилежні.

### Завдання для самостійного вивчення.

П. 3.5. Еквівалентне розв'язування взаємоіндуктивно-зв'язаних кіл/ Каргополова Н.М./ Теорія електричних та магнітних кіл