ЗАТВЕРДЖЕНО

Науково-методичною радою
Державного університету
«Житомирська політехніка»

протокол від 29 червня 2023 р.
№ 9

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
для проведення практичних (лабораторних) занять
з навчальної дисципліни
«Вища математика»
Частина 3. Диференціальне числення функції кількох змінних.

для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «бакалавр»
спеціальності 151 «Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології»
освітньо-професійна програма «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»
факультет комп’ютерно-інтегрованих технологій, мехатроніки і робототехніки
кафедра робототехніки, електроенергетики та автоматизації ім. проф. Б.Б. Самотокіна

Рекомендовано на засіданні кафедри робототехніки, електроенергетики та автоматизації ім. проф. Б.Б. Самотокіна 16 травня 2023 р., протокол № 5

Розробники: старший викладач БОНДАРЧУК Василь,
старший викладач ГОЛОВНЯ Руслан,
доцент СВЕРЧЕВСЬКА Ірина.

Житомир
2023

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Даний посібник орієнтований у першу чергу на дистанційну форму навчання і створений на основі вже набутого досвіду роботи авторів у змішаному режимі навчання з переходами з аудиторної форми на дистанційну і навпаки.

Методичні вказівки охоплюють розділ вищої математики «Диференціальне числення функції кількох змінних». Основним завданням здобувачів освіти є розвиток умінь застосовувати теоретичні знання та формули у розв'язуванні задач, передбачених програмою з дисципліни Вища математика.

Вважається, що зародження поняття функції бере свій початок зі Стародавнього Вавилону, де математики використовували таблиці значень деяких найпростіших функцій: квадратів, кубів, сум та добутків чисел. У Стародавній Греції розв'язували деяку задачі на найбільші та найменші значення, заснували тригонометричні функції. Функція кількох змінних виступає як узагальнення функції однієї змінної. Першими згадками про такі функції можна вважати ті ж таблиці стародавніх вчених зі значеннями сум і добутків чисел та їх степенів.

Досліджуючи функціональні залежності, математики в ці та більш пізні часи саме поняття функції використовували на інтуїтивному рівні. Лише після введення французьким вченим Р. Декартом поняття змінної величини почався період пошуку означення функції. Такі означення дали Й. Бернуллі (1718 р.), Л. Ейлер (1755 р.), М. Лобачевський (1834 р.), П. Діріхле (1837 р.) і вже з середини XIX ст. встановилося загальне означення функції на основі відповідності між змінними.

Диференціальне числення – розділ математики, в якому вивчається поняття похідної функції та його застосування до дослідження функції. Ще в Стародавній Греції розглядали окремі випадки відшукання мінімумів та максимумів функцій. Архімед побудував дотичну до спіралі. Проте загальні методи дослідження функції розвинулися лише у XVII ст.

Після введення французьким вченим Р. Декартом поняття змінної величини та розробки методу координат з’явилося підґрунтя для розв’язування задач про рухи та інші процеси, про визначення швидкості зміни величин, про напрямок руху тіла в деякій точці траєкторії. Вагомі результати були отримані французьким математиком П. Ферма, який фактично вмів визначати похідні довільного многочлена.

Об’єднати існуючі прийоми розв’язування різних задач дослідження функцій в єдиний метод, що базувався на понятті нескінченно малої величини стало під силу двом вченим: англійському математику Ісааку Ньютону та німецькому вченому Готфріду Лейбніцу. Так було створено аналіз нескінченно малих і диференціальне числення.

І. Ньютон, розв’язуючи задачу про миттєву швидкість, називаючи функцію флюентою, а похідну флюксією, розробив метод диференціального числення з точки зору вивчення руху тіл. І. Ньютон у своїх дослідженнях однією із задач вважав диференціювання функції декількох змінних, які залежать від часу. Це і привело його до обґрунтування ідей диференціального числення. І. Ньютон ввів алгоритм диференціювання функцій, досліджував диференціювання ірраціональних функцій та складених функцій.

Г. Лейбніц підійшов до питання створення диференціального числення, розв’язуючи задачі про дотичні до кривих. Розроблений ним чіткий апарат та зручна символіка дали поштовх до численних застосувань нових методів.

Обґрунтуванню методів диференціального числення присвячені роботи відомих швейцарських математиків братів Я. Бернуллі, Й. Бернуллі та іншого швейцарця Л. Ейлера. Створення диференціального числення дало поштовх для розвитку математичного аналізу, математики та інших наук, стало потужним інструментом для проведення досліджень у природничих науках та техніці.

Методичні рекомендації містять вказівки та план вивчення конкретних тем з вищої математики для здобувачів вищої освіти освітнього рівня «бакалавр», що вивчають відповідні розділи дисципліни «Вища математика».

Послідовно має бути актуалізовано теоретичний матеріал відповідних лекцій, розглянуто необхідні правила та формули у вказаних посібниках, розглянуто вже розв’язані вправи та задачі. Після цього робота здобувачів освіти продовжується самостійно, розв’язуються перераховані завдання з вказаних посібників. Далі виконуються індивідуальні завдання. Індивідуальні завдання для самостійного виконання залежно від діючої форми навчання виконуються в аудиторії або у вигляді домашнього завдання.

Посібник може бути корисним при вивченні відповідних тем дисципліни «Вища математика» студентами всіх спеціальностей, що навчаються на технічних факультетах університету.

Важливим елементом роботи над курсом вищої математики є розв’язання значної кількості задач і вправ. Це необхідно як для успішного і глибокого засвоєння теоретичного матеріалу, так і для вироблення певних технічних навичок, оволодіння відповідними прийомами і методами.

Основним допоміжним літературним джерелом виступає навчальний посібник «Практикум з вищої математики» за редакцією В.О. Коваля (Практикум з вищої математики: Навч. посібн. / За ред. В.О. Коваля. – Житомир: ЖДТУ, 2008. – 448с.), розроблений викладачами кафедри.

Також можна рекомендувати використовувати навчальну літературу з вищої математики:

1. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика: Навч. посібн. – Київ: А.С.К.; 2006. – 648 с.

2. Вища математика: У 2-х кн. / За ред. Г.Л. Кулініча. – К.: Либідь, 2003.

3. Михайленко В.В., Добряков Л.Д., Головня Р.М. Вища математика. Книга 2. Диференціальне числення функцій однієї та кількох змінних: Навч. посібн. – Житомир: ЖДТУ, 2012. – 576 с.

4. Беспальчук В.І., Головня Р.М., Івахненкова В.В. та інші. Збірник задач з математики: у 3-х ч.– Ч. 1.– Житомир: ЖДТУ, 2001. – 162 с.

5. Беспальчук В.І., Головня Р.М., Івахненкова В.В. та інші. Збірник задач з математики: у 3-х ч. – Ч. 2. – Житомир: ЖДТУ, 2001. – 176 с.

При вивченні дисципліни здобувачі вищої освіти мають набути загальні та професійні компетентності.

1. Загальні компетентності:

– здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;

– здатність до розуміння предметної області та професійної діяльності;

– здатність вчитися і оволодівати сучасними знаннями.

2. Фахові компетентності:

– здатність до аналізу, синтезу і оптимізації інформаційних систем та технологій з використанням математичних моделей і методів;

– здатність проводити обчислювальні експерименти, порівнювати результати експериментальних даних і отриманих рішень.

3. Програмні результати навчання:

– знання лінійної та векторної алгебри, диференційного та інтегрального числення, теорії функцій багатьох змінних, теорії рядів, диференційних рівнянь для функцій однієї та багатьох змінних, операційного числення, теорії ймовірностей та математичної статистики в обсязі, необхідному для розробки та використання інформаційних систем, технологій та інфокомунікацій, сервісів та інфраструктури організації.

Заключним етапом вивчення курсу є складання заліків та іспитів.

Тема 1
Функції кількох змінних. Основні поняття.

План роботи

1. Опрацювати матеріал лекції за темою заняття
2. Опрацювати теоретичний матеріал з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Коваля В.О.: Розділ 8. п.1 с. 309, 311; п.2 с. 313
3. Розглянути приклади з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Коваля В.О.: №№ 5, 6, 7 (с. 310); №№ 12, 13 (с. 311-312); №№ 17, 19, 21 (с. 313-315).
4. Виконати самостійно вправи з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Коваля В.О.: №№ 1, 10, 11 (с. 311); № 15 (с. 312); №№ 25, 26, 30 (с. 315)
5. Виконати Індивідуальне Завдання (**ІЗ 1**. Номер варіанта – номер у списку групи)

Завдання 1. Знайти область визначення вказаних функції.

1.1. $z=\dfrac{5x^2y}{2x-3y}$.

1.2. $z=\dfrac{4}{9-x^2-y^2}$.

1.3. $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

1.4. $z=\ln\left(x^2+y^2-16\right)$.

1.5. $z=\arccos\left(x+y\right)$.

1.6. $z=\sqrt{x^2+y^2-4}$.

1.7. $z=\dfrac{3xy^2}{2x+3y-4}$.

1.8. $z=4\sqrt{x}-\dfrac{4}{2+3x-4y}$.

1.9. $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

1.10. $z=\sqrt{4x^2-9y^2}$.

1.11. $z=\ln\left(9-x^2-y^2\right).$

1.12. $z=\arcsin\left(2-x+y\right).$

1.13. $z=\dfrac{\sqrt{2y}}{x^2-4y^2}.$

1.14. $z=\arcsin\left(\dfrac{2x}{y}\right).$

1.15. $z=\sqrt{y^2+x^2-4}.$

1.16. $z=\ln\left(\dfrac{3}{16-x^2-y^2}\right).$

1.17. $z=\ln\left(4y-3x+3\right).$

1.18. $z=\arcsin\left(3x+2y\right).$

1.19. $z=\dfrac{3}{\sqrt{x^2+y^2-8}}.$

1.20. $z=\dfrac{5}{9-4x^2-4y^2}.$

1.21. $z=\dfrac{\sqrt{3-x+y}}{2x-3y}.$

1.22. $z=2y-\dfrac{4}{9-x+3y}.$

1.23. $z=\dfrac{\ln\left(3-2x+y\right)}{x^2+y^2}.$

1.24. $z=\dfrac{9}{1-x^2-y^2}.$

1.25. $z=\arccos\left(\dfrac{x+1}{y}\right).$

1.26. $z=\dfrac{5x+2y}{\sqrt{16-x^2-y^2}}.$

1.27. $z=\dfrac{4xy}{5x-3y+2}.$

1.28. $z=\dfrac{3}{\sqrt{4-x^2-y^2}}.$

1.29. $z=\dfrac{5}{\ln\left(x^2+y^2-4\right)}.$

1.30. $z=\dfrac{7}{\sqrt{x^2+y^2-16}}.$

Тема 2
Частинні похідні функції кількох змінних.

План роботи

1. Опрацювати матеріал лекції за темою заняття
2. Опрацювати теоретичний матеріал з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Коваля В.О.: Розділ 8. п.3 с. 316.
3. Розглянути приклади з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Коваля В.О.: №№ 31, 33, 35, 36, 37, 39, 42, 43 (с. 316-321).
4. Виконати самостійно вправи з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Коваля В.О.: №№ 44, 46, 49, 50, 51, 53 (с. 321).
5. Виконати Індивідуальне Завдання (**ІЗ 2**. Частина 1. Номер варіанта – номер у списку групи)

***Завдання 1*.** Знайти частинні похідні 1-го порядку функції $z = f(x, y)$.

1.1. $z = e^x y - x^4 y + y^2 + 3y - x - 4$.

1.2. $z = 4x^3 \cos y - 3xy + 2y^2 + y - 7x + 1$.

1.3. $z = x^5 y - x^2 y + 2\cos y + 3x + y + 4$.

1.4. $z = 5x^3 - 3xy + y^2 + 2\operatorname{tg} y - 4x - 1$.

1.5. $z = 3e^x + 2x^3 y^2 - y^2 + x - 2y + x - 7$.

1.6. $z = 2y\sin x - x^3y^2 + 4y^3 + y - 3x - 5$.

1.7. $z = 3xe^y + x^2y + 2\cos y + x - y + 3$.

1.8. $z = 2x^3\cos y + 3x^5y^4 - y^3 + x - 4$.

1.9. $z = x^3y + y^2\cos x + 2y^3 - 5y + 7$.

1.10. $z = 5e^xy^3 - 2xy^3 + 5y - 4x + 1$.

1.11. $z = 4x^3 - 2xy^2 + \ln y + 3x + 5$.

1.12. $z = 3\ln x - x^2y^4 + 2y + 5x - 4$.

1.13. $z = 2x^4y - y^2 + 5y - 7x + 2$.

1.14. $z = x^3y^2 - 3x^2 + 2y^2 + x - 4y + 5$.

1.15. $z = 2x^5 - 3x^2y^4 + y^3 + 5y - x - 3$.

1.16. $z = x^4 - 3x^3y^2 + 4x + 2y - 3$.

1.17. $z = x^3 - 2xy^3 + \ln y + 3y - x + 1$.

1.18. $z = 3e^xy^2 + x^2 - y^3 + 2e^y - 4$.

1.19. $z = 4x^5 - x^4y + \ln y - e^x + 3$.

1.20. $z = 5x^2 - 2x^3y^4 + 4x - 3\ln y$.

1.21. $z = x^2y + 2\ln x + 7\ln y + 3x + y$.

1.22. $z = 4x^3 - 6xy^2 + 2y^2 + 7y - 2$.

1.23. $z = 2x^2y - 3x + 4y^2 + \dfrac{4x}{y}$.

1.24. $z = 3x^4 + y^2 - xy + x + y$.

1.25. $z = 4x^3 - 3x^2y + 2y^3 + 5\ln x - 6$.

1.26. $z = e^x - x^3y^2 + 4y^2 + 3y - x - 1$.

1.27. $z = 5x^3y^2 - 3x + y^2 + \dfrac{2x}{y^3} - 3$.

1.28. $z = xy^4 - x^3y + 2\sin y - x + 3$.

1.29. $z = 4x^2 - xy^3 + 3\ln y - e^x + 2$.

1.30. $z = 2x^2y - \ln x + 3y^2 + \dfrac{4}{x}$.

Тема 3
Частинні похідні вищих порядків функції кількох змінних.

План роботи

1. Опрацювати матеріал лекції за темою заняття
2. Опрацювати теоретичний матеріал з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Коваля В.О.: Розділ 8. п.6 с. 333-334.
3. Розглянути приклади з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Коваля В.О.: №№ 87, 88, 89, 90,91 (с. 334-336).
4. Виконати самостійно вправи з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Коваля В.О.: №№ 93, 95, 97 (с. 338).
5. Виконати Індивідуальне Завдання (**ІЗ 2**. Частина 2. Номер варіанта – номер у списку групи)

Завдання 2. Знайти частинні похідні 2-го порядку функції $z = f\left(x,\ y\right)$.

2.1. $z = e^x y - x^4 y + y^2 + 3y - x - 4$.

2.2. $z = 4x^3 \cos y - 3xy + 2y^2 + y - 7x + 1$.

2.3. $z = x^5 y - x^2 y + 2\cos y + 3x + y + 4$.

2.4. $z = 5x^3 - 3xy + y^2 + 2\mathrm{tg}y - 4x - 1$.

2.5. $z = 3e^x + 2x^3 y^2 - y^2 + x - 2y + x - 7$.

2.6. $z = 2y\sin x - x^3y^2 + 4y^3 + y - 3x - 5$.

2.7. $z = 3xe^y + x^2y + 2\cos y + x - y + 3$.

2.8. $z = 2x^3\cos y + 3x^5y^4 - y^3 + x - 4$.

2.9. $z = x^3y + y^2\cos x + 2y^3 - 5y + 7$.

2.10. $z = 5e^x y^3 - 2xy^3 + 5y - 4x + 1$**.**

2.11. $z = 4x^3 - 2xy^2 + \ln y + 3x + 5$**.**

2.12. $z = 3\ln x - x^2y^4 + 2y + 5x - 4$**.**

2.13. $z = 2x^4y - y^2 + 5y - 7x + 2$**.**

2.14. $z = x^3y^2 - 3x^2 + 2y^2 + x - 4y + 5$**.**

2.15. $z = 2x^5 - 3x^2y^4 + y^3 + 5y - x - 3$**.**

2.16. $z = x^4 - 3x^3y^2 + 4x + 2y - 3$**.**

2.17. $z = x^3 - 2xy^3 + \ln y + 3y - x + 1$**.**

2.18. $z = 3e^x y^2 + x^2 - y^3 + 2e^y - 4$**.**

2.19. $z = 4x^5 - x^4y + \ln y - e^x + 3$**.**

2.20. $z = 5x^2 - 2x^3y^4 + 4x - 3\ln y$**.**

2.21. $z = x^2y + 2\ln x + 7\ln y + 3x + y$**.**

2.22. $z = 4x^3 - 6xy^2 + 2y^2 + 7y - 2$**.**

2.23. $z = 2x^2y - 3x + 4y^2 + \dfrac{4x}{y}$**.**

2.24. $z = 3x^4 + y^2 - xy + x + y$**.**

2.25. $z = 4x^3 - 3x^2y + 2y^3 + 5\ln x - 6$**.**

2.26. $z = e^x - x^3y^2 + 4y^2 + 3y - x - 1$.

2.27. $z = 5x^3y^2 - 3x + y^2 + \dfrac{2x}{y^3} - 3$.

2.28. $z = xy^4 - x^3y + 2\sin y - x + 3$.

2.29. $z = 4x^2 - xy^3 + 3\ln y - e^x + 2$.

2.30. $z = 2x^2y - \ln x + 3y^2 + \dfrac{4}{x}$.

Тема 4
Повний диференціал функції кількох змінних.

План роботи

1. Опрацювати матеріал лекції за темою заняття
2. Опрацювати теоретичний матеріал з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Коваля В.О.: Розділ 8. п.4.1 с. 322-323; п.4.2 с. 327.
3. Розглянути приклади з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Коваля В.О.: №№ 55, 59, 61, 62 (с. 323-326); № 72 (с. 328).
4. Виконати самостійно вправи з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Коваля В.О.: №№ 63, 65, 66, 67, 69 (с. 326); № 74 (с. 329).
5. Виконати Індивідуальне Завдання (**ІЗ 3**. Номер варіанта – номер у списку групи)

Завдання 1. Знайти повний диференціал функції $z = f\left(x, y\right)$.

1.1. $z = \cos\left(x^3 - 3y\right)$.

1.2. $z = \dfrac{3x+2y}{3x-2y}$.

1.3. $z = \sqrt{x^4 + 2y^3}$.

1.4. $z = x\ln\dfrac{x^2}{y}$.

1.5. $z = \dfrac{xy+1}{x+y}$.

1.6. $z = e^{\sqrt{x^2+xy+y^2}}$.

1.7. $z=\ln\left(x^2+xy+y^2\right)$.

1.8. $z=e^{3x-y^2}$.

1.9. $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

1.10. $z=x\ln\left(x^3y\right)$.

1.11. $z=4e^{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.

1.12. $z=\sin\left(5x^2+y\right)$.

1.13. $z=\ln\left(x^3+y^3\right)$.

1.14. $z=\dfrac{x^2+3y^2}{x+y}$.

1.15. $z=\dfrac{xy}{x+y+1}$.

1.16. $z=\cos\sqrt{x+y}$.

1.17. $z=tg\left(x^3y^4\right)$.

1.18. $z=\dfrac{3x+y}{x-3y}$.

1.19. $z=e^{x^2+y^2+xy}$.

1.20. $z=y\ln\dfrac{2y}{x^3}$.

1.21. $z=\arcsin\left(x+3y\right)$.

1.22. $z=\sqrt{x^2+xy+y^2}$.

1.23. $z=\arccos\dfrac{y}{x}$.

1.24. $z=\dfrac{y}{y^2-9x^2}$.

1.25. $z=\sqrt{3x^2+2y^2}$.

1.26. $z=y\ln\dfrac{x}{y^2}$.

1.27. $z=e^{\frac{y}{x}}$.

1.28. $z=\dfrac{x^2+y^2}{x-y}$.

1.29. $z=\sqrt{2xy+y^2}$.

1.30. $z=\ln\left(x^3-2y^2\right)$.

Тема 5
Диференціювання складених функцій.

План роботи

1. Опрацювати матеріал лекції за темою заняття
2. Опрацювати теоретичний матеріал з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Коваля В.О.: Розділ 8. п.5.1 с. 329; п.5.2 с. 331-332.
3. Розглянути приклади з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Коваля В.О.: №№ 75, 76, 78 (с. 329-330); №№ 83, 84 (с. 332-333).
4. Виконати самостійно вправи з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Коваля В.О.: №№ 80, 82 (с. 331); №№ 85, 86 (с. 333).
5. Виконати Індивідуальне Завдання (**ІЗ 4**. Номер варіанта – номер у списку групи)

Завдання 1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$.

1.1. $z = x^3 \cdot \ln y$, *де* $x = \frac{u}{v}$, $y = 3u - 2v$.

1.2. $z = \mathrm{tg} x - 2x\cos y$, *де* $x = v\sin u$, $y = 3v - 2uv$.

1.3. $z = xy^2 + \frac{x}{y}$, *де* $x = v^2 u - 4v$, $y = \frac{2v}{u}$.

1.4. $z = e^x y + \ln x$, *де* $x = uv$, $y = u^2 - 3v$.

1.5. $z = x^2 y - 2\cos y$, *де* $x = u\ln v$, $y = 4u^2 v$.

1.6. $z = \cos x - 2y^3$, *де* $x = \dfrac{u^2}{v}$, $y = 3u\sin v$.

1.7. $z = y\ln x - 4x$, *де* $x = 2v^2 - 4u$, $y = u - 3v^2$.

1.8. $z = \mathrm{tg}x - 2\ln y$, *де* $x = 2uv$, $y = 4u - 5v^3$.

1.9. $z = 2x^3 \ln y$, *де* $x = v\cos u$, $y = 3u - \sin v$.

1.10. $z = x^2 y + 2y$, *де* $x = 5u^2 v$, $y = uv^3$.

1.11. $z = x^2 \sin y$, *де* $x = 3uv$, $y = u^3 - 2v$.

1.12. $z = \cos y - 3x^2$, *де* $x = 2u - v$, $y = \dfrac{3u}{v^2}$.

1.13. $z = xy^3 + \ln x$, *де* $x = v + 3u^2$, $y = 5uv$.

1.14. $z = x^4 - 3\sin y$, *де* $x = u - 4v^2$, $y = v - u^3$.

1.15. $z = \arcsin x + 3\ln y$, *де* $x = 5uv$, $y = u + v$.

1.16. $z = y\ln x - x$, *де* $x = 4v - u$, $y = \dfrac{v}{2u}$.

1.17. $z = \mathrm{arctg}y - 3x^2$, *де* $x = 2uv$, $y = u^2 - 3v$.

1.18. $z = x^4 y - \cos x$, *де* $x = u - 5v$, $y = 3uv^2$.

1.19. $z = xy + x^2 y^3$, *де* $x = 5u + 2v$, $y = v\sin u$.

1.20. $z = \ln x - 2x\sin y$, *де* $x = uv$, $y = v^2 - 2u$.

1.21. $z = xy^3 - \mathrm{tg}y$, *де* $x = v - u$, $y = -2uv$.

1.22. $z = \mathrm{ctg}x + 2e^y$, *де* $x = 2u + v$, $y = u^v$.

1.23. $z = x^3 - 2x\ln y$, *де* $x = u\cos v$, $y = v - 3u$.

1.24. $z = e^x - 2xy^3$, *де* $x = ve^u$, $y = 2u + v$.

1.25. $z = 3e^y + xy$, *де* $x = v - \sin u$, $y = 3ve^u$.

1.26. $z = 2x^3 \cos y$, *де* $x = 5u - v$, $y = uv^2$.

1.27. $z = \ln(xy)$, *де* $x = ue^v$, $y = 3v - u$.

1.28. $z = x^4 - 2\cos y$, *де* $x = \sin u - 2v$, $y = ve^u$.

1.29. $z = xy^3 - \ln y$, *де* $x = v \ln u$, $y = v - 2u$.

1.30. $z = x^4 y^3 + \dfrac{3x^2}{y}$, *де* $x = v^2 + u$, $y = \dfrac{\sin v}{u}$.

Тема 6
Диференціювання неявних функцій.

План роботи

1. Опрацювати матеріал лекції за темою заняття
2. Опрацювати теоретичний матеріал з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Коваля В.О.: Розділ 8. п.7.1 с. 339; п.7.2 с. 342-343.
3. Розглянути приклади з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Коваля В.О.: №№ 98, 99 (с. 339-340); №№ 106, 108 (с. 343-344).
4. Виконати самостійно вправи з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Коваля В.О.: №№ 102, 103, 105 (с. 342); №№ 110, 114 (с. 344).
5. Виконати Індивідуальне Завдання (**ІЗ 5**. Номер варіанта – номер у списку групи)

***Завдання 1*.** Знайти частинні похідні 1-го порядку функції $z = f\left(x, y\right)$, заданої неявно.

1.1. $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$.

1.2. $e^x y - xyz + y^3 - 4xz^2 = 0$.

1.3. $2x^2 y - \ln x + 3y^2 z + 2xe^z - 4 = 0$.

1.4. $3ye^x + 2z^3 y^2 - y^2 + xz - 2x - 7 = 0$.

1.5. $5x^3 - 3xy + z^2 + 2tgy - 4xyz - 1 = 0$.

1.6. $x^3y - z^2y + 2x\cos y + 3x + z - 3 = 0$.

1.7. $3e^x y^3 - 2xy^3z + 5y - 4z^3 + 1 = 0$.

1.8. $xy\sin z - x^3y + 4xz^3 + y - 3z = 0$.

1.9. $x^4 - 3x^3yz + 4\ln x + 2yz^2 - 3 = 0$.

1.10. $e^z y - x^4y + z^2 + 4y - x - 3 = 0$.

1.11. $5x^2y - 2x^3z^4 + 4xy^2z - 3\ln z = 0$.

1.12. $2x^3\cos y + 3x^5z^4 - y^3 + \mathrm{tg}z - 4 = 0$.

1.13. $3e^z y^2 + x^2 - xy^3 + 2\ln z - 1 = 0$.

1.14. $x^3 - 2xy^3 + x\ln z + 3y - 2z + 1 = 0$.

1.15. $3e^z + 2x^3y^2 - z^2 + 3x - 2z + 4 = 0$.

1.16. $4x^3 - 3x^2yz + 2z^3 + 5\ln x - 6 = 0$.

1.17. $4x^5y - y^4z + \ln x - e^z + 3 = 0$.

1.18. $5x^2y - 3xz^2 + 2y^2 + \dfrac{z}{y} = 0$.

1.19. $x^3 - 3x^2y + 2y^2 + \ln z - 4xz + 5 = 0$.

1.20. $xe^z - x^3y^2 + 4z^2 + 3xy - x - 1 = 0$.

1.21. $x^2y + 2x\ln y + 7\ln z + 3x + e^z = 0$.

1.22. $5x^3y^2 - 3xz^2 + y^2 + \dfrac{2z}{y^3} - 3 = 0$.

1.23. $x^3\cos z - 3xy + 2y^2 + z - 4x + 1 = 0$.

1.24. $5x^3 - 2x^2yz + \ln z + 3x - 4 = 0$.

1.25. $3x^4 + y^2 z - xy^2 + \sin z + y = 0$.

1.26. $5\ln x - x^2 z^4 + 2\cos y + 3z - 1 = 0$.

1.27. $2xe^y + z^2 y + 2\cos z + x + 3y = 0$.

1.28. $4x^3 y - 6yz^2 + 3y^2 + 7\cos z - 2 = 0$.

1.29. $4x^2 z - xy^3 + 3\ln z - e^y + 2 = 0$.

1.30. $xy^4 z - x^3 y + 2\sin z - y + 3 = 0$.

Тема 7
Похідна за напрямом. Градієнт функції.

План роботи

1. Опрацювати матеріал лекції за темою заняття
2. Опрацювати теоретичний матеріал з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Коваля В.О.: Розділ 8. п.8.1 с. 344-345; п.8.2 с. 347-348.
3. Розглянути приклади з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Коваля В.О.: №№ 112, 114, 115 (с. 345-347); №№ 119, 120 (с. 348).
4. Виконати самостійно вправи з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Коваля В.О.: №№ 117, 118 (с. 347); №№ 122, 123 (с. 348-349).
5. Виконати Індивідуальне Завдання (**ІЗ 6**. Номер варіанта – номер у списку групи)

Завдання 1. Знайти похідну функції $z = f(x, y)$ у точці $P_1(x_1; y_1)$ в напрямі від цієї точки до точки $P_2(x_2; y_2)$.

1.1. $z = x^4 - 3x^2y^2 + 2xy + 1$, $P_1(1; -1)$, $P_2(5; 2)$.

1.2. $z = 3x^2 - 2xy^2 + y - 3$, $P_1(2; -2)$, $P_2(6; 1)$.

1.3. $z = 2x^3 - 3x^2y + 2x - y + 1$, $P_1(2; 3)$, $P_2(-2; 6)$.

1.4. $z = 3x^2 - 4xy^2 + 3y - 5$, $P_1(1; 3)$, $P_2(-3; 0)$.

1.5. $z = 4x^2y - y^3 + 2x + 4$, $P_1(0; 1)$, $P_2(3; -3)$.

1.6. $z = x^4 + 2x^2y^2 - 3x + 1$, $P_1(1;\,1)$, $P_2(5;\,-2)$.

1.7. $z = 2x^3 - 3xy^2 + 2x - y$, $P_1(2;\,1)$, $P_2(-2;\,-2)$.

1.8. $z = xy^4 - 3y^2 - 2x + y + 4$, $P_1(1;\,2)$, $P_2(5;\,-1)$.

1.9. $z = x^3 + 2x^2y + x - 3y + 1$, $P_1(-1;\,1)$, $P_2(2;\,-3)$.

1.10. $z = 4x^2 - 3xy^2 + 2x + 5y + 1$, $P_1(1;\,1)$, $P_2(4;\,-3)$.

1.11. $z = e^x - 3x^2y^2 + 2xy - 3$, $P_1(0;\,2)$, $P_2(4;\,-1)$.

1.12. $z = \cos x - 2x^2y + y^3 - 3$, $P_1(0;\,-1)$, $P_2(4;\,2)$.

1.13. $z = x^4 + 2xy^2 - y^3 + 1$, $P_1(1;\,1)$, $P_2(5;\,-2)$.

1.14. $z = 3x^2 + 4xy^2 + 2y - 1$, $P_1(2;\,0)$, $P_2(5;\,-4)$.

1.15. $z = x^5 - x^2y + 2xy^2 - 3$, $P_1(1;\,-1)$, $P_2(5;\,2)$.

1.16. $z = x^3 + x\cos y - y^2 - 2$, $P_1(1;\,0)$, $P_2(-3;\,3)$.

1.17. $z = 2x^3 - 4x^2y + 3x - y + 1$, $P_1(1;\,1)$, $P_2(4;\,-3)$.

1.18. $z = x^4 - 4xy + 2y^2 - 3$, $P_1(1;\,3)$, $P_2(-3;\,0)$.

1.19. $z = 3x^2y - y^2 + 2x + 3$, $P_1(1;\,-1)$, $P_2(5;\,2)$.

1.20. $z = x^3 - 2xy^2 + e^y - 3$, $P_1(2;\,0)$, $P_2(-1;4)$.

1.21. $z = xy^2 - 2x^3y + 4x - 3$, $P_1(2;\,-3)$, $P_2(5;1)$.

1.22. $z = 2x^3 - 3y^2 + 4x - 5$, $P_1(1;\,2)$, $P_2(5;\,-1)$.

1.23. $z = x^3 - 2x^2y^2 + 4y - x$, $P_1(1;\,3)$, $P_2(-3;\,0)$.

1.24. $z = 3x^4 - 2x^2y + 3y - 4$, $P_1(2;\,-2)$, $P_2(6;1)$.

1.25. $z = 4e^x + 2xy^2 - x\ln y + 5$, $P_1(0;\, 1)$, $P_2(-3;\, 5)$.

1.26. $z = x^4 + 3x^2y - 2y^3 - 1$, $P_1(1;\, 1)$, $P_2(-2;\, 5)$.

1.27. $z = 7x^2 - 2xy^3 + y - 3x$, $P_1(1;\, -2)$, $P_2(-3;\, 1)$.

1.28. $z = x^3 - 2x\sin y + 5y - 4$, $P_1(2;\, 0)$, $P_2(6;\, -3)$.

1.29. $z = 3\cos x - 4xy^3 + 2y - 1$, $P_1(0;\, -2)$, $P_2(4;\, 1)$.

1.30. $z = 3x^2y - xy^2 + 5y - 3x$, $P_1(-1;\, -2)$, $P_2(2;\, 2)$.

<u>Завдання 2.</u> Знайти градієнт функції $z = f(x,\, y)$ у точці $P(x;\, y)$.

2.1. $z = \dfrac{xy+1}{x+y}$, $P(1;\, 3)$.

2.2. $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x+y+1}$, $P(1;\, 1)$.

2.3. $z = \dfrac{xy+x+y}{x-y}$, $P(1;\, -2)$.

2.4. $z = \dfrac{x^2 + y}{x+y^2}$, $P(2;\, -1)$.

2.5. $z = \dfrac{2xy}{x-y}$, $P(3;\, 2)$.

2.6. $z = \dfrac{x^2 - xy + y^2}{x-y}$, $P(1;\, 2)$.

2.7. $z = \dfrac{x^2 + xy}{x-y}$, $P(2;\, 3)$.

2.8. $z = \dfrac{x^2 + y^2}{x+y}$, $P(1;\, -3)$.

2.9. $z = \dfrac{x^2 + 2xy}{3x-2y}$, $P(1;\, 2)$.

2.10. $z = \dfrac{xy}{x+2y}$, $P(1;\, -1)$.

2.11. $z = \dfrac{xy+y}{x^2-y}$, $P(2;\, -2)$.

2.12. $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + 2y^2}$, $P(1;\, -1)$.

2.13. $z=\dfrac{x^2-2y}{2x+3y}$, $P(2;\,-2)$.

2.14. $z=\dfrac{x+2y}{2x+y}$, $P(-1;\,3)$.

2.15. $z=\dfrac{x-y}{1+xy}$, $P(2;\,-1)$.

2.16. $z=\dfrac{x^2+y^2}{x-y}$, $P(1;\,-1)$.

2.17. $z=\dfrac{2-xy}{x+2y}$, $P(1;\,3)$.

2.18. $z=\dfrac{x^2y-xy^2}{x+y}$, $P(-1;\,-1)$.

2.19. $z=\dfrac{x+y^2}{x^2-y}$, $P(1;\,-2)$.

2.20. $z=\dfrac{x^3+y^2}{x+y^2}$, $P(2;\,-1)$.

2.21. $z=\dfrac{xy^2}{x^2-y}$, $P(3;\,4)$.

2.22. $z=\dfrac{xy-y^2}{x^2-y}$, $P(1;\,2)$.

2.23. $z=\dfrac{2x^2+3xy}{3x-2y}$, $P(2;\,3)$.

2.24. $z=\dfrac{3x+y^2}{x^2+4y}$, $P(1;\,-2)$.

2.25. $z=\dfrac{3x-y^3}{x^3+y}$, $P(1;\,3)$.

2.26. $z=\dfrac{2x+y^2}{x^2+3y}$, $P(2;\,-1)$.

2.27. $z=\dfrac{xy+y^2}{x^2-xy}$, $P(2;\,-1)$.

2.28. $z=\dfrac{4x-y^2}{x^2+3y}$, $P(-1;\,1)$.

2.29. $z=\dfrac{x-5y}{4x+3y}$, $P(2;\,-2)$.

2.30. $z=\dfrac{x+y^2}{x^2-y}$, $P(1;\,-3)$.

Тема 8
Диференціали вищих порядків. Дотична площина та нормаль до поверхні.

План роботи

1. Опрацювати матеріал лекції за темою заняття
2. Опрацювати теоретичний матеріал з навчального посібника «Вища математика» Дубовик В. П., Юрик І. І.: Гл. 6, пункт 2.3, с. 303; пункт 3.1 с. 310-312.
3. Розглянути приклади з навчального посібника «Вища математика» Дубовик В. П., Юрик І. І.: на с. 304, приклади 1, 2 на с. 312; приклади з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Коваля В.О.: №№ 124, 126 (с. 349-351)
4. Виконати самостійно вправи зі «Збірник задач з математики» Ч.2: №№ 7.116, 7.121; вправи з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Коваля В.О.: №№ 125, 127 (с. 350-351)
5. Виконати Індивідуальне Завдання (**ІЗ 7**. Номер варіанта – номер у списку групи)

Завдання 1. Знайти диференціал другого порядку функції $z = f\left(x,\ y\right)$.

1.1. $z = x^4 - 3x^2y^2 + 2xy + 1$.

1.2. $z = 3x^2 - 2xy^2 + y - 3$.

1.3. $z = 2x^3 - 3x^2 y + 2x - y + 1$.

1.4. $z = 3x^2 - 4xy^2 + 3y - 5$.

1.5. $z = 4x^2 y - y^3 + 2x + 4$.

1.6. $z = x^4 + 2x^2 y^2 - 3x + 1$.

1.7. $z = 2x^3 - 3xy^2 + 2x - y$.

1.8. $z = xy^4 - 3y^2 - 2x + y + 4$.

1.9. $z = x^3 + 2x^2 y + x - 3y + 1$.

1.10. $z = 4x^2 - 3xy^2 + 2x + 5y + 1$.

1.11. $z = e^x - 3x^2 y^2 + 2xy - 3$.

1.12. $z = \cos x - 2x^2 y + y^3 - 3$.

1.13. $z = x^4 + 2xy^2 - y^3 + 1$.

1.14. $z = 3x^2 + 4xy^2 + 2y - 1$.

1.15. $z = x^5 - x^2 y + 2xy^2 - 3$.

1.16. $z = x^3 + x\cos y - y^2 - 2$.

1.17. $z = 2x^3 - 4x^2 y + 3x - y + 1$.

1.18. $z = x^4 - 4xy + 2y^2 - 3$.

1.19. $z = 3x^2 y - y^2 + 2x + 3$.

1.20. $z = x^3 - 2xy^2 + e^y - 3$.

1.21. $z = xy^2 - 2x^3 y + 4x - 3$.

1.22. $z = 2x^3 - 3y^2 + 4x - 5$.

1.23. $z = x^3 - 2x^2 y^2 + 4y - x$.

1.24. $z = 3x^4 - 2x^2 y + 3y - 4$.

1.25. $z = 4e^x + 2xy^2 - x\ln y + 5$.

1.26. $z = x^4 + 3x^2 y - 2y^3 - 1$.

1.27. $z = 7x^2 - 2xy^3 + y - 3x$.

1.28. $z = x^3 - 2x\sin y + 5y - 4$.

1.29. $z = 3\cos x - 4xy^3 + 2y - 1$.

1.30. $z = 3x^2 y - xy^2 + 5y - 3x$.

Тема 9
Екстремуми функції двох змінних. Локальний екстремум.

План роботи

1. Опрацювати матеріал лекції за темою заняття
2. Опрацювати теоретичний матеріал з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Коваля В.О.: Розділ 8. п.10.1 с. 351-352; п.8.2 с. 347-348.
3. Розглянути приклади з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Коваля В.О.: № 128 (с. 352-353); з навчального посібника «Вища математика» Дубовик В. П., Юрик І. І.: приклад на с. 324.
4. Виконати самостійно вправи з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Коваля В.О.: №№ 129, 130 (с. 353).
5. Виконати Індивідуальне Завдання (**ІЗ 8**. Номер варіанта – номер у списку групи)

Завдання 1. Дослідити функцію $z = f(x, y)$ на екстремуми.

1.1. $z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y$.

1.2. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.

1.3. $z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$.

1.4. $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$.

1.5. $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$.

1.6. $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$.

1.7. $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$.

1.8. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$.

1.9. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$.

1.10. $z = 6(x - y) - 3x^2 - 3y^2$.

1.11. $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$.

1.12. $z = (x - 2)^2 + 2y^2 - 10$.

1.13. $z = (x - 5)^2 + y^2 + 1$.

1.14. $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

1.15. $z = 2xy - 2x^2 - 4y^2$.

1.16. $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$.

1.17. $z = 2xy - 5x^2 - 3y^2 + 2$.

1.18. $z = xy(12 - x - y)$.

1.19. $z = xy - x^2 - y^2 + 9$.

1.20. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$.

1.21. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$.

1.22. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.

1.23. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$.

1.24. $z = xy(6 - x - y)$.

1.25. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$.

1.26. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

1.27. $z = (x-1)^2 + 2y^2$.

1.28. $z = xy - 3x^2 - 2y^2$.

1.29. $z = x^2 + 3(y+2)^2$.

1.30. $z = 2(x+y) - x^2 - y^2$.

Тема 10
Найбільше та найменше значення функції в області.

План роботи

1. Опрацювати матеріал лекції за темою заняття
2. Опрацювати теоретичний матеріал з навчального посібника «Вища математика» Дубовик В. П., Юрик І. І.: Гл. 6, пункт 3.5 с. 324-325.
3. Розглянути приклад з навчального посібника «Вища математика» Дубовик В. П., Юрик І. І.: на с. 325, приклад з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Коваля В.О.: № 134 (с. 355-357)
4. Виконати самостійно вправу з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Коваля В.О.: № 135 (с. 357).
5. Виконати Індивідуальне Завдання (**ІЗ 9**. Номер варіанта – номер у списку групи)

Завдання 1. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = f(x, y)$ в області D, що обмежена заданими лініями.

1.1. $z = 3x + y - xy, \quad D: y = x, \quad y = 4, \quad x = 0$.

1.2. $z = xy - x - 2y, \quad D: x = 3, \quad y = x, \quad y = 0$.

1.3. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y, \quad D: x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = 2$.

1.4. $z = 5x^2 - 3xy + y^2, \quad D: x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = 1$.

1.5. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x, \quad D: x - y + 1 = 0, \quad x = 3, \quad y = 0$.

1.6. $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8, \quad D: x = 0, \quad y = 0, \quad x + y - 1 = 0$.

1.7. $z = 2x^3 - xy^2 + y^2, \quad D: x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = 6$.

1.8. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2, \quad D: x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = 1$.

1.9. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1, \quad D: x = 0, \quad y = 0, \quad x + y - 3 = 0$.

1.10. $z = x^2 + 2xy - 10, \quad D: y = 0, \quad y = x^2 - 4$.

1.11. $z = xy - 2x - y, \quad D: x = 0, \quad x = 3, \quad y = 0, \quad y = 4$.

1.12. $z = \frac{1}{2}x^2 - xy, \quad D: y = 8, \quad y = 2x^2$.

1.13. $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2, \quad D: x = 0, \quad y = 0, \quad x + y - 1 = 0$.

1.14. $z = 2x^2 + 3y^2 + 1, \quad D: y = \frac{3}{2}\sqrt{4 - x^2}, \quad y = 0$.

1.15. $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1, \quad D: x = -3, \quad y = 0, \quad x + y + 1 = 0$.

1.16. $z = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1, \quad D: x = 5, \quad y = 0, \quad x - y - 1 = 0$.

1.17. $z = 2x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 4x, \quad D: y = 2x, \quad y = 2, \quad x = 0$.

1.18. $z = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x, \quad D: x = 0, \quad x = 2, \quad y = 0, \quad y = 2$.

1.19. $z = xy - 3x - 2y, \quad D: x = 0, \quad x = 4, \quad y = 0, \quad y = 4$.

1.20. $z = x^2 + xy - 2, \quad D: y = 4x^2 - 4, \quad y = 0$.

1.21. $z = x^2 y(4 - x - y), \quad D: x = 0, \quad y = 0, \quad y = 6 - x$.

1.22. $z = x^3 + y^3 - 3xy, \quad D: x = 0, \quad x = 2, \quad y = -1, \quad y = 2$.

1.23. $z = 4(x-y) - x^2 - y^2,\quad D: x+2y=4,\quad x-2y=4$.

1.24. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x,\quad D: x=3,\quad y=0,\quad y=x+1$.

1.25. $z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y,\quad D: x=0,\quad x=1,\quad y=0,\quad y=2$.

1.26. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y,\quad D: y=x+2,\quad y=0,\quad x=2$.

1.27. $z = 4 - 2x^2 - y^2,\quad D: y=0,\quad y=\sqrt{1-x^2}$.

1.28. $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4,\quad D: x=-1,\quad x=1,\quad y=-1,\quad y=1$.

1.29. $z = x^2 + 2xy + 4x - y^2,\quad D: x+y+2=0,\quad x=0,\quad y=0$.

1.30. $z = 2x^2y - x^3y - x^2y^2,\quad D: x=0,\quad y=0,\quad x+y=6$.

Тема 11
Екстремуми функції двох змінних. Умовний екстремум.

План роботи

1. Опрацювати матеріал лекції за темою заняття
2. Опрацювати теоретичний матеріал з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Коваля В.О.: Розділ 8. п.10.2 с. 353-354.
3. Розглянути приклад з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Коваля В.О.: № 131 (с. 354-355).
4. Виконати самостійно вправи з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Коваля В.О.: №№ 132, 133 (с. 355).
5. Виконати Індивідуальне Завдання (**ІЗ 10**. Номер варіанта – номер у списку групи)

Завдання 1. Знайти екстремуми функції $z = f(x, y)$ за умови, що змінні x і y задовольняють рівняння $\varphi(x, y) = 0$.

1.1. $z = x^3 + 4xy^2 + 5y^2 - 48x + 1$ *за умови* $x - 3y + 2 = 0$.

1.2. $z = 4y^3 + 3x^2 y - 2x^2 - 108x - 3$ *за умови* $3y - x - 4 = 0$.

1.3. $z = 5x^3 + 7xy^2 - 3y^2 - 15x - 4$ *за умови* $2x + 4y + 1 = 0$.

1.4. $z = 6y^3 + 10x^2 y + 2x^2 - 2y + 9$ *за умови* $3x - y + 5 = 0$.

1.5. $z = 7x^3 + 6xy^2 + y^2 - \dfrac{21}{4}x + 1$ *за умови* $4x - 3y + 1 = 0$.

1.6. $z = 5y^3 + 7x^2 y - 3x^2 - 15y + 2$ *за умови* $2y - 2x - 3 = 0$.

1.7. $z = 6x^3 + 10xy^2 + 2y^2 - 2x + 7$ *за умови* $x + 2y - 2 = 0$.

1.8. $z = 3y^3 + \frac{3}{2}x^2 y - 2x^2 - 25y + 3$ *за умови* $y - 3x - 1 = 0$.

1.9. $z = 2x^3 + 5xy^2 + 8y^2 - 24x - 10$ *за умови* $2y - 3x + 2 = 0$.

1.10. $z = 2y^3 + 5x^2 y + 8x^2 - 24y + 8$ *за умови* $4x + 2y - 3 = 0$.

1.11. $z = 4x^3 + 3xy^2 - 2y^2 - 108x - 6$ *за умови* $2y - 4x + 3 = 0$.

1.12. $z = y^3 + 4x^2 y + 5x^2 - 48y + 7$ *за умови* $x + 2y - 1 = 0$.

1.13. $z = 3x^3 - 4y^2 + 2xy^2 - 49x + 4$ *за умови* $2y - 6x - 3 = 0$.

1.14. $z = 7y^3 + 6x^2 y + x^2 - \frac{21}{4}y + 4$ *за умови* $3x + 2y + 3 = 0$.

1.15. $z = 3x^3 + \frac{3}{2}xy^2 - 2y^2 - 25x - 5$ *за умови* $2x - 4y - 3 = 0$.

1.16. $z = 8y^3 + 2y^3 + 5x^2 y - 24y - 3$ *за умови* $x + 4y - 4 = 0$.

1.17. $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$ *за умови* $x - 3y + 2 = 0$.

1.18. $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$ *за умови* $3x + 2y - 4 = 0$.

1.19. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$ *за умови* $2x - 3y - 3 = 0$.

1.20. $z = y^3 + x^2 - 6xy - 39y + 18x + 5$ *за умови* $x - 2y + 4 = 0$.

1.21. $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$ *за умови* $x + 2y - 3 = 0$.

1.22. $z = x^3 + 4xy^2 + 5y^2 - 48x + 1$ *за умови* $x - 3y + 2 = 0$.

1.23. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 3$ *за умови* $2y - 2x + 3 = 0$.

1.24. $z = x^3 + 4xy^2 + 5y^2 - 48x + 1$ *за умови* $x - 3y + 2 = 0$.

1.25. $z = 3x^3 + 2xy^2 - 49x + 4$ *за умови* $2y - 6x - 3 = 0$.

1.26. $z = x^3 + 4xy^2 + 5y^2 - 48x + 1$ *за умови* $x - 3y + 2 = 0$.

1.27. $z = x^3 + 6y^2 - 4x + 5$ *за умови* $4x - 3y + 5 = 0$.

1.28. $z = x^2 + y^3 + 5y^2 + 48x + 2$ *за умови* $2x - 4y + 3 = 0$.

1.29. $z = x^3 + 3xy^2 + 4y^2 - 5x + 2$ *за умови* $3x - 4y + 1 = 0$.

1.30. $z = x^3 + 2xy^2 + y^2 - 6x + 7$ *за умови* $5x + y - 3 = 0$.

Приклади розв'язань завдань

Частинні похідні функції двох змінних.

За означенням частинні похідні функції двох змінних $z = f(x, y)$ у точці $P(x; y)$ обчислюються за формулами:
по змінній x –

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

по змінній y –

$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Поряд з позначеннями z'_x та z'_y використовують також інші позначення – відповідно $\frac{\partial z}{\partial x}$, $f'_x(x, y)$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, $f'_y(x, y)$.

З означення частинних похідних випливає, що для їх знаходження можна використовувати відомі формули обчислення похідних функцій однієї змінної, вважаючи іншу змінну сталою.

Приклад 1. Знайти частинні похідні функції $z = 5x^4y^2 + 3x^2 - 4y^3 + 7$.

$\ulcorner$ Вважаючи y сталою, знаходимо

$$z'_x = 5y^2 \cdot \left(x^4\right)'_x + 3\left(x^2\right)'_x - 4\left(y^3\right)'_x + (7)'_x =$$
$$= 5y^2 \cdot 4x^3 + 3 \cdot 2x - 0 + 0 = 20x^3y^2 + 6x.$$

Вважаючи x сталою, знаходимо

$$z'_y = 5x^4 \cdot \left(y^2\right)'_y + \left(3x^2\right)'_y - 4\left(y^3\right)'_y + \left(7\right)'_y =$$

$$= 5x^4 \cdot 2y + 0 - 4 \cdot 3y^2 + 0 = 10x^4 y - 12y^2. \;\lrcorner$$

Приклад 2. Знайти частинні похідні функції $z = \arccos\dfrac{x^2}{y}$.

$\ulcorner$ Враховуючи правило диференціювання складної функції, дістанемо

$$z'_x = \left(\arccos\frac{x^2}{y}\right)'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x^2}{y}\right)^2}} \cdot \left(\frac{x^2}{y}\right)'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^4}{y^2}}} \cdot \frac{1}{y} \cdot \left(x^2\right)'_x =$$

$$= -\frac{y}{\sqrt{y^2 - x^4}} \cdot \frac{1}{y} \cdot 2x = -\frac{2xy}{\sqrt{y^2 - x^4} \cdot y} = -\frac{2x}{\sqrt{y^2 - x^4}},$$

$$z'_y = \left(\arccos\frac{x^2}{y}\right)'_y = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x^2}{y}\right)^2}} \cdot \left(\frac{x^2}{y}\right)'_y = -\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^4}{y^2}}} \cdot x^2 \cdot \left(\frac{1}{y}\right)'_y =$$

$$= -\frac{y}{\sqrt{y^2 - x^4}} \cdot x^2 \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) = \frac{x^2 y}{\sqrt{y^2 - x^4} \cdot y^2} = \frac{x^2}{y\sqrt{y^2 - x^4}}. \;\lrcorner$$

Частинними похідними другого порядку функції $z = f\left(x,\, y\right)$ називаються частинні похідні від її частинних похідних першого порядку.

Приклад 3. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = 3xy^4 + 5x^3 - 2y^2 + 1$.

$$z_x' = \left(3xy^4 + 5x^3 - 2y^2 + 1\right)_x' = 3y^4 + 15x^2,$$

$$z_y' = \left(3xy^4 + 5x^3 - 2y^2 + 1\right)_y' = 12xy^3 - 4y,$$

$$z''_{xx} = \left(3y^4 + 15x^2\right)_x' = 30x,$$

$$z''_{xx} = \left(12xy^3 - 4y\right)_y' = 36xy^2 - 4,$$

$$z''_{xy} = \left(3y^4 + 15x^2\right)_y' = 12y^3,$$

$$z''_{yx} = \left(12xy^3 - 4y\right)_x' = 12y^3.$$

Диференціал функції двох змінних.

Диференціал функції $z = f\left(x,\ y\right)$ обчислюється за формулою

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\ .$$

Приклад 4. Знайти повний диференціал функції $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$

$\ulcorner$Знайдемо частинні похідні функції $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ та підставимо їх у вираз $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\ln\left(x^2 + y^2\right)\right)'_x = \frac{1}{x^2 + y^2}\cdot\left(x^2 + y^2\right)'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2}\ ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\ln\left(x^2 + y^2\right)\right)'_y = \frac{1}{x^2 + y^2}\cdot\left(x^2 + y^2\right)'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2}\ ,$$

$$dz = \frac{2x}{x^2 + y^2}dx + \frac{2y}{x^2 + y^2}dy\ \lrcorner$$

Диференціювання функцій заданих неявно

Якщо рівняння $F(x,\ y,\ z)=0$, де $F(x,\ y,\ z)$ – диференційовна функція змінних $x,\ y$ і z, визначає z як функцію незалежних змінних x і y і $F_z'(x,\ y,\ z)\neq 0$, то частинні похідні цієї неявно заданої функції знаходяться за формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'(x,\ y,\ z)}{F_z'(x,\ y,\ z)},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'(x,\ y,\ z)}{F_z'(x,\ y,\ z)},$$

де $z=z(x,y)$.

Приклад 5. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $x^3y-2y^2+3z^2-y\cos z+7=0$.

⌈ Позначимо $F(x,\ y,\ z)=x^3y-2y^2+3z^2-y\cos z+7$.

Знайдемо частинні похідні:

$F_x'(x,\ y,\ z)=3x^2y$,

$F_y'(x,\ y,\ z)=x^3-4y-\cos z$,

$F_z'(x,\ y,\ z)=6z+y\sin z$.

За формулами $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'(x,\ y,\ z)}{F_z'(x,\ y,\ z)}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'(x,\ y,\ z)}{F_z'(x,\ y,\ z)}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{3x^2y}{6z+y\sin z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x^3-4y-\cos z}{6z+y\sin z}.\ ⌋$$

Диференціювання складених функцій

Якщо z є складною функцією кількох незалежних змінних, наприклад, $z = f(x, y)$, де $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ (u, v – незалежні змінні; f, φ, ψ – диференційовні функції), то частинні похідні z по u і v знаходяться за формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Приклад 6. Знайти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо $z = x^2 y - y^2 x$, де $x = u \cdot \cos v$, $y = u \cdot \sin v$.

⌈Знайдемо похідні з правих частин формул:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(xy^2 - y^2 x\right)'_x = 2xy - y^2, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^2 y - y^2 x\right)'_y = x^2 - 2xy,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \left(u \cdot \cos v\right)'_u = \cos v, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = \left(u \cdot \cos v\right)'_v = -u \sin v,$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \left(u \cdot \sin v\right)'_u = \sin v, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \left(u \cdot \sin v\right)'_v = u \cos v.$$

Підставимо отримані вирази у формули для диференціювання складних функцій. Тоді, маємо:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \left(2xy - y^2\right) \cdot \cos v + \left(x^2 - 2xy\right) \cdot \sin v =$$

$$= \left(2u \cos v \cdot u \sin v - u^2 \sin^2 v\right) \cdot \cos v +$$

$$+\left(u^2\cos^2 v-2u\cos v\cdot u\sin v\right)\cdot\sin v=$$

$$=u^2\sin v\cos v\left(2\cos v-\sin v\right)+u^2\sin v\cos v\left(\cos v-2\sin v\right)=$$

$$=u^2\sin v\cos v\left(2\cos v-\sin v+\cos v-2\sin v\right)=$$

$$=u^2\sin v\cos v\left(3\cos v-3\sin v\right)=3u^2\sin v\cos v\left(\cos v-\sin v\right).$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\left(2xy-y^2\right)\cdot\left(-u\sin v\right)+\left(x^2-2xy\right)\cdot u\cos v=$$

$$=\left(2u\cos v\cdot u\sin v-u^2\sin^2 v\right)\cdot\left(-u\sin v\right)+\left(u^2\cos^2 v-2u^2\cos v\sin v\right)\times$$

$$\times u\cos v=-u^3\sin^2 v\left(2\cos v-\sin v\right)+u^3\cos^2 v\left(\cos v-2\sin v\right)=$$

$$=u^3\left(\underline{-2\sin^2 v\cos v}+\underline{\underline{\sin^3 v}}+\underline{\underline{\cos^3 v}}-\underline{2\cos^2 v\sin v}\right)=$$

$$=u^3\left[-2\sin v\cos v\left(\sin v+\cos v\right)+\left(\sin v+\cos v\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\sin^2 v-\sin v\cos v+\cos^2 v\right)\right]=u^3\left(\sin v+\cos v\right)\left(1-3\sin v\cos v\right).\quad\lrcorner$$

Похідна функції за напрямом

Похідною функції $z = f(x,\ y)$ у точці $P(x;\ y)$ за напрямом $\vec{e} = \overrightarrow{PP_1}$ називається

$$\frac{\partial z}{\partial e} = \lim_{PP_1 \to 0} \frac{f(P_1) - f(P)}{PP_1},$$

де $f(P)$ і $f(P_1)$ – значення функції у точках P і P_1, PP_1 – відстань між цими точками.

Якщо функція z диференційовна, то має місце формула

$$\frac{\partial z}{\partial e} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha,$$

де α – кут, що утворює вектор $\vec{e}$ з віссю Ox.

Приклад 7. Знайти похідну функції $z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ у точці $P(2;\ -1)$ в напрямі від цієї точки до точки $N(5;\ 2)$.

⌈Знайдемо частинні похідні даної функції та їх значення у точці P:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6xy + 3y^2;\quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P = 3\cdot 2^2 - 6\cdot 2\cdot(-1) + 3\cdot(-1)^2 = 27;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -3x^2 + 6xy;\quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P = -3\cdot 2^2 + 6\cdot 2\cdot(-1) = -24.$$

Знайдемо координати вектора $\vec{a} = \overrightarrow{PN}$:

$\vec{a} = \{5-2;\ 2-(-1)\} = \{3;\ 3\}$.

Знайдемо координати орта $\vec{a}_0$ вектора $\vec{a}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}, \quad \vec{a}_0 = \left\{ \frac{3}{3\sqrt{2}}; \frac{3}{\sqrt{2}} \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}.$$

Звідси $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

За формулою $\dfrac{\partial z}{\partial a} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha$:

$$\frac{\partial z}{\partial a} = 27 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + (-24) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}. \quad \lrcorner$$

Градієнт функції

Градієнтом функції $z = f(x, y)$ у точці $P(x; y)$ називається вектор, проекціями якого на координатні осі є відповідні частинні похідні даної функції:

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}.$$

Приклад 8. Знайти градієнт функції $z = x^2 y$ у точці $P(1; 1)$.

$\ulcorner$ Знаходимо частинні похідні та їх значення в точці P:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P = 1^2 = 1.$$

Отже, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, z = 2\vec{i} + \vec{j}$. $\lrcorner$

Рівняння дотичної площини і нормалі

Дотичною площиною до поверхні у точці M (точка дотику) називається площина, в якій знаходяться всі дотичні у точці M до різних кривих, що проведені на поверхні через цю точку.

Нормаллю до поверхні називається перпендикуляр до дотичної площини у точці дотику.

Якщо рівняння поверхні у декартовій системі координат задано у явній формі $z = f(x, y)$, де $f(x, y)$ – диференційовна функція, то рівняння дотичної площини у точці $M(x_0; y_0; z_0)$ поверхні має вигляд

$$z - z_0 = f_x'(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y'(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Рівняння нормалі має вигляд

$$\frac{x - x_0}{f_x'(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y'(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Приклад 9. Написати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = \frac{x^2}{2} - y^2$ у точці $M(2; -1; 1)$.

⌈ Рівняння дотичної площини у точці $M(x_0; y_0; z_0)$ поверхні має вигляд $z - z_0 = f_x'(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y'(x_0, y_0)(y - y_0)$.

Рівняння нормалі має вигляд $\frac{x - x_0}{f_x'(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y'(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$.

Знайдемо частинні похідні даної функції та їх значення у точці M:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M = 2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2y, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M = 2.$$

Звідси маємо:

$z-1 = 2(x-2)+2(y+1)$ або $2x+2y-z-1=0$ – рівняння дотичної площини;

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$$ – рівняння нормалі. ⌋

Локальний екстремум функції двох змінних

Функція $f(x, y)$ має локальний максимум (мінімум) $f(a, b)$ у точці $P(a; b)$, якщо для всіх відмінних від P точок $P'(x; y)$ з деякого околу точки P виконується нерівність $f(a, b) > f(x, y)$ (відповідно $f(a, b) < f(x, y)$). Максимум або мінімум функції називають її екстремумом.

Необхідна умова екстремуму. Точки, в яких диференційовна функція $f(x, y)$ може набувати екстремуму, знаходять шляхом розв'язання системи рівнянь

$$\begin{cases} f_x'(x, y) = 0 \\ f_y'(x, y) = 0. \end{cases}$$

Розв'язки даної системи називають стаціонарними точками.

Достатня умова екстремуму. У стаціонарній точці $P(a; b)$ знаходимо

$$A = f_x''(a, b), \quad B = f_{xy}''(a, b), \quad C = f_{yy}''(a, b), \quad \Delta = AC - B^2 .$$

Тоді: 1) якщо $\Delta > 0$, то функція має екстремум у точці $P(a; b)$, а саме – максимум, якщо $A < 0$, і мінімум, якщо $A > 0$;

2) якщо $\Delta < 0$, то екстремуму в точці $P(a; b)$ немає;

3) якщо $\Delta = 0$, то потрібні подальші дослідження.

Приклад 10. Дослідити на екстремуми функцію $z = 4y^3 + 3x^2 y - 2x^2 - 108y - 3$.

Знайдемо частинні похідні і складемо систему

$$\begin{cases} f_x'(x,\ y)=0 \\ f_y'(x,\ y)=0. \end{cases}:$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=6xy-4x,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=12y+3x^2-108,$$

$$\begin{cases} 6xy-4x=0 \\ 12y+3x^2-108=0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x(6y-4)=0 \\ 12y+3x^2-108=0. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему і знаходимо три стаціонарні точки:

$$P_1\left(0;\ \frac{5}{6}\right),\ P_2\left(\frac{10\sqrt{3}}{3};\ \frac{2}{3}\right),\ P_3\left(-\frac{10\sqrt{3}}{3};\ \frac{2}{3}\right).$$

Знайдемо похідні 2-го порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6x$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12$ і обчислимо $\Delta=AC-B^2$ для кожної стаціонарної точки.

1) Точка $P_1\left(0;\ \frac{5}{6}\right)$: $A=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{P_1}=6\cdot\frac{5}{6}=5$, $B=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)_{P_1}=6\cdot 0=0$,

$$C=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{P_1}=12.$$

$$\Delta=AC-B^2=5\cdot 12-0=60.$$

Оскільки $\Delta>0$ і $A>0$, то у точці P_1 функція має мінімум.

2) Точка $P_2\left(\frac{10\sqrt{3}}{3};\ \frac{2}{3}\right)$: $A=6\cdot\frac{2}{3}=4$, $B=6\cdot\frac{10\sqrt{3}}{3}=20\sqrt{3}$, $C=12$;

$$\Delta=4\cdot 12-\left(20\sqrt{3}\right)^2=48-1200=-1152.$$

Оскільки $\Delta<0$, то у точці P_2 функція не має екстремуму.

3) Точки $P_3\left(-\frac{10\sqrt{3}}{3};\, \frac{2}{3}\right)$: $A = 6\cdot\frac{2}{3} = 4$, $B = 6\cdot\left(-\frac{10\sqrt{3}}{3}\right) = -20\sqrt{3}$,

$C = 12$; $\Delta = 4\cdot 12 - \left(-20\sqrt{3}\right)^2 = 48 - 1200 = -1152$.

Оскільки $\Delta < 0$, то у точці P_3 екстремуму немає. ⌋

Умовний екстремум

Умовним екстремумом функції $f(x, y)$ називають екстремум цієї функції за умови, що її аргументи пов’язані рівнянням зв’язку $\varphi(x, y) = 0$. Для знаходження умовного екстремуму функції $f(x, y)$ за умови $\varphi(x, y) = 0$ складають функцію Лагранжа

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y),$$

де λ – невизначений сталий множник. Необхідні умови екстремуму зводяться до системи трьох рівнянь з трьома невідомими x, y, λ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

Достатні умови умовного екстремуму. Нехай x_0, y_0, λ_0 – розв’язок системи. Складемо визначник

$$\Delta = -\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 F(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 F(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial^2 F(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 F(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial y^2} & \dfrac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial y} & 0 \end{vmatrix}.$$

Якщо $\Delta < 0$, то функція $f(x, y)$ має у точці (x_0, y_0, λ_0) умовний максимум; якщо $\Delta > 0$ – умовний мінімум.

Приклад 11. Знайти екстремуми функції $z = 6 - 4x - 3y$ за умови, що змінні x і y задовольняють рівняння $x^2 + y^2 = 1$.

⌈Геометрично задача зводиться до знаходження найбільшого і найменшого значень аплікати z площини $z = 6 - 4x - 3y$ для точок її перетину із циліндром $x^2 + y^2 = 1$.

Складаємо функцію Лагранжа

$$F(x,\ y,\ \lambda) = 6 - 4x - 3y + \lambda\left(x^2 + y^2 - 1\right).$$

Маємо $\dfrac{\partial F}{\partial x} = -4 + 2\lambda x$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = -3 + 2\lambda y$, $\dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1$.

З необхідної умови дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} -4 + 2\lambda x = 0 \\ -3 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

розв’язуючи яку знаходимо

$\lambda_1 = \dfrac{5}{2}$, $x_1 = \dfrac{4}{5}$, $y_1 = \dfrac{3}{5}$ і $\lambda_2 = -\dfrac{5}{2}$, $x_2 = -\dfrac{4}{5}$, $y_2 = -\dfrac{3}{5}$.

Знайдемо частинні похідні

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda,\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0,\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda.$$

При $\lambda = \dfrac{5}{2}$, $x = \dfrac{4}{5}$, $y = \dfrac{3}{5}$ маємо визначник

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1,4 \\ 0 & 5 & 1,2 \\ 1,4 & 1,2 & 0 \end{vmatrix} = 20 > 0.$$

Отже, у точці $\left(\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)$ функція має умовний мінімум.

При $\lambda=-\frac{5}{2}$, $x=-\frac{4}{5}$, $y=-\frac{3}{5}$ маємо визначник

$$\Delta=-\begin{vmatrix} -5 & 0 & -1,4 \\ 0 & -5 & -1,2 \\ -1,4 & -1,2 & 0 \end{vmatrix}=-20<0\,.$$

Отже, у точці $\left(\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)$ функція має умовний максимум.

Таким чином,

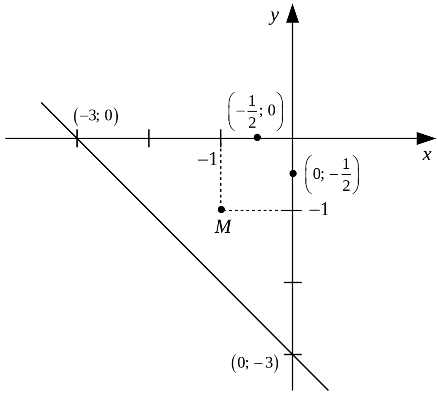
$$z_{\max}=6+\frac{16}{5}+\frac{9}{5}=11, \qquad z_{\min}=6-\frac{16}{5}-\frac{9}{5}=1. \quad \lrcorner$$

Найбільше і найменше значення функції

Диференційовна функція в обмеженій замкненій області набуває свого найбільшого (найменшого) значення або у стаціонарній точці або у точці межі області.

Приклад 12. Визначити найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ в області $x \le 0$, $y \le 0$, $x + y \ge -3$.

⌈ Зазначена область є трикутником.



1) Знайдемо стаціонарні точки: $z'_x = 2x - y + 1$, $z'_y = 2y - x + 1$,

$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$. Розв’язуючи систему, знаходимо $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1. \end{cases}$ Точка $M(-1;\,-1)$ належить області.

У точці M значення функції $z(M) = -1$. Дослідження на екстремум не є обов’язковим.

2) Досліджуємо функцію на межі області.

Якщо $x=0$, то $z=y^2+y$ і задача зводиться до знаходження найбільшого і найменшого значень цієї функції одного аргументу на відрізку $-3\le y\le 0$. Похідна функції:

$z'=\left(y^2+y\right)'=2y+1$. Знаходимо критичні точки з умови $z'=0$: $2y+1=0$, $y=-\dfrac{1}{2}$. Ця точка належить відрізку $[-3,\,0]$.

Знаходимо значення функції:

$$z\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4},$$

$$z(-3)=(-3)^2-3=9-3=6,$$

$$z(0)=0+0=0.$$

При $y=0$ маємо $z=x^2+x$. Аналогічно проводимо дослідження на найбільше і найменше значення цієї функції одного аргументу на відрізку $-3\le x\le 0$.

$$z'=\left(x^2+x\right)'=2x+1.$$

$$z'=0:\quad 2x+1=0,\ x=-\frac{1}{2}\in[-3,\,0].$$

$$z\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4},$$

$$z(-3)=(-3)^2-3=6,$$

$$z(0)=0+0=0.$$

При $x+y=-3$, або $y=-3-x$ маємо функцію $z=x^2+(-3-x)^2-x\cdot(-3-x)+x+(-3-x)=3x^2+9x+6$ на відрізку $-3\le x\le 0$. Дослідження проводимо аналогічно попередньому.

$z'=\left(3x^2+9x+6\right)'=6x+9$.

$z'=0$: $6x+9=0$, $x=-\dfrac{3}{2}\in[-3,\ 0]$.

$z\left(-\dfrac{3}{2}\right)=3\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2+9\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)+6=-\dfrac{3}{4}$,

$z(-3)=3\cdot(-3)^2+9\cdot(-3)+6=6$,

$z(0)=0+0+6=6$.

3) Порівнюємо всі знайдені значення функції z. Робимо висновок, що $z_{\text{найб.}}=6$ у точках $(0;\,-3)$ і $(-3;\,0)$;

$z_{\text{найм.}}=-1$ у стаціонарній точці $M(-1;\,-1)$. $\lrcorner$

Корисні посилання

1. Бібліотека Державного університету «Житомирська політехніка». https://lib.ztu.edu.ua/

2. Державний університет "Житомирська політехніка" - Освітній портал https://learn.ztu.edu.ua/

3. Практикум з вищої математики: Навч. посібн. / За ред. В.О. Коваля. – Житомир: ЖДТУ, 2008. – 448с. https://learn.ztu.edu.ua/pluginfile.php/27959/mod_resource/content/0/%D0%9F%D1%80%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%B8%D0%BA%D1%83%D0%BC%20%D0%B7%20%D0%B2%D0%B8%D1%89%D0%BE%D1%97%20%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B8.pdf

4. Житомирська обласна універсальна наукова бібліотека ім. Олега Ольжича (http://www.lib.zt.ua/, 10014, м. Житомир, Новий бульвар, (0412) 37-84-33).

5. Національна бібліотека України імені В.І. Вернадського (http://www.nbuv.gov.ua/, Київ, просп. Голосіївський, 3.