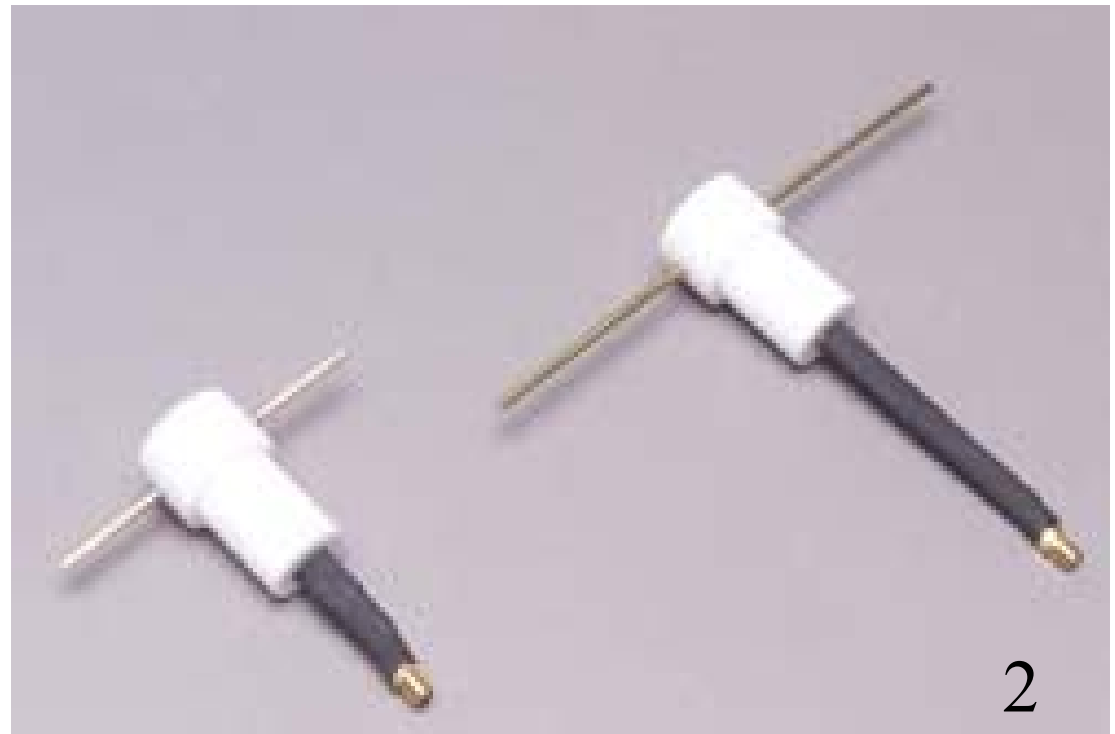


**Електродинаміка, пристрої НВЧ та антенна техніка**

**Теорія симетричного вібратора**

## Загальні положення

Симетричний електричний вібратор (два набори таких антен показано на фото) належить до класу дротових антен.



## **Задача випромінювання ЕМХ дротовими антенами**

Дротові антени складаються з відрізків провідників, найчастіше прямолінійних, які певним чином розташовано у просторі.

**Поле, створене такою антеною, можна знайти шляхом додавання всіх полів, створюваних струмами, які протікають по усіх провідниках, які утворюють таку антену.**

**Задачу про випромінювання такої антени розв'язують у два етапи.**

## Задача випромінювання ЕМХ дрововими антенами

Етапи розв'язання цієї задачі:

- 1) визначення розподілу струму  $\dot{j}_m^{cm} \equiv \dot{j}_m^{cm}(\vec{r})$  на провідниках, з яких складається антена;
- 2) розрахунок електричних характеристик за знайденим розподілом струму. Наприклад, за допомогою векторного потенціалу  $\vec{A}_m$ :

$$\vec{H}_m = \frac{1}{\dot{\mu}_a} \text{rot } \vec{A}_m, \quad \vec{E}_m = \frac{-ic^2}{\dot{\epsilon}_a \dot{\mu}_a} \left[ \text{grad div } \vec{A}_m + \left( \frac{\omega}{c} \right) \dot{\epsilon}_a \dot{\mu}_a \vec{A}_m \right],$$

$$\vec{A}_m(\vec{r}) = \frac{\dot{\mu}_a}{4\pi} \int_V \dot{j}_m^{cm}(\vec{r}') \frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dv',$$

$\vec{r}$  - відстань “початок СК – точка спостереження”;

$\vec{r}'$  - відстань “початок СК – точка інтегрування”;

$V$  - об'єм, у якому розташовано струми.

Якщо (для спрощення)  $|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} = r$ , то

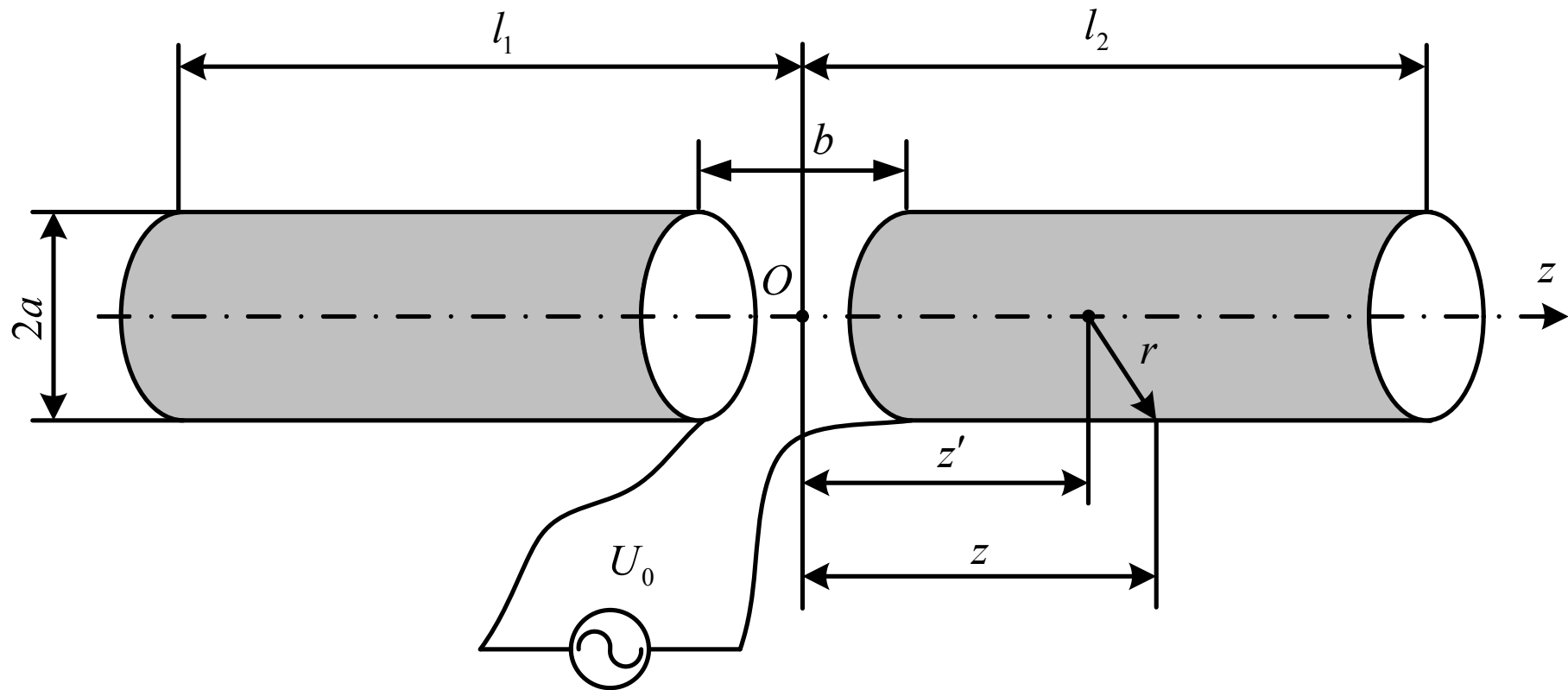
$$\vec{A}_m(\vec{r}) = \frac{\dot{\mu}_a}{4\pi} \int_V \dot{j}_m^{cm}(\vec{r}') \frac{e^{-ikr}}{r} dv'.$$

## **Задача випромінювання ЕМХ дротовими антенами**

**При розв'язуванні задачі про розподіл струмів потрібно враховувати граничні умови на поверхні антени.**

**У такій постановці  
ця задача зводиться  
до розв'язання  
деякого інтегрального рівняння.**

## Симетричний вібратор: постановка задачі



$l_1, l_2$  - довжина плечей вібратора (ппр  $l_1 = l_2 = l$  вібратор симетричний);

$2a$  - діаметр плеча;

$b$  - ширина зазору між плечима.

## Симетричний вібратор: постановка задачі

Розв'язок такої задачі суттєво залежить від діаметра плечей. Прийнято таку градацію:

$ka \approx 0,5$  - тонкий вібратор (розв'язок задачі відносно простий);

$ka \in 0,1 \dots 0,5$  - вібратор середньої товщини;

$ka > 0,5$  - товстий вібратор (найскладніший розв'язок задачі).

Крім цього, при розв'язуванні цієї задачі мають місце такі спрощення:

- плечі виготовлено з ідеального провідника;
- зазор  $b$  вважають зникаюче малим;
- не враховують струми на торцях плечей.

Не зважаючи на це, отриманий результат (для тонкого вібратора!) добре узгоджується з практикою.

**Термінологія:** при  $l/\lambda = 0,25$  ( $2l = 0,5\lambda$ ) вібратор називають **півхвилевим**,  
при  $l/\lambda = 0,5$  ( $2l = \lambda$ ) вібратор називають **хвилевим**.

## Симетричний вібратор: розподіл струму та заряду

Для тонкого симетричного вібратора, з урахуванням введених у розгляд спрощень (слайд 7), розподіл струму:

$$I(z) = \begin{cases} I \sin k(l - z), & z \geq 0 \\ I \sin k(l + z), & z \leq 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad I(z) = I \sin k(l - |z|), \quad (1)$$

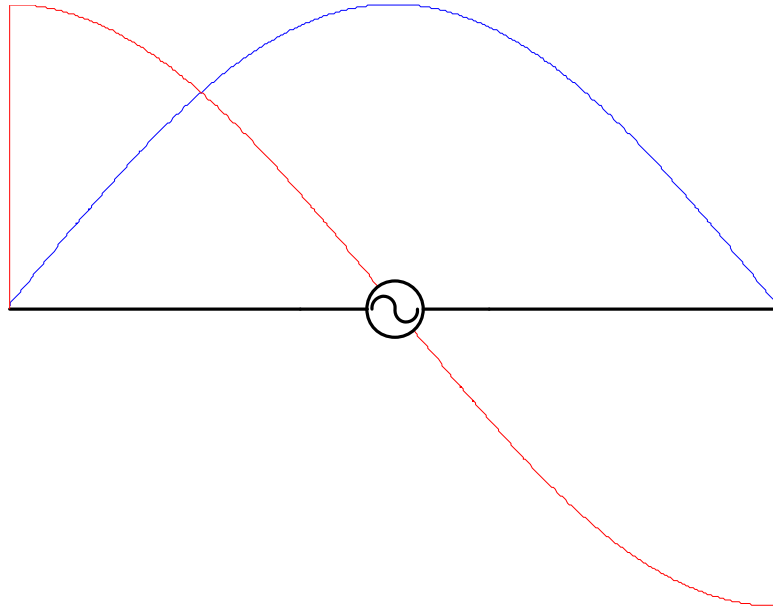
$I \equiv I_p$  - струм у пучності.

Розподіл заряду при цьому:

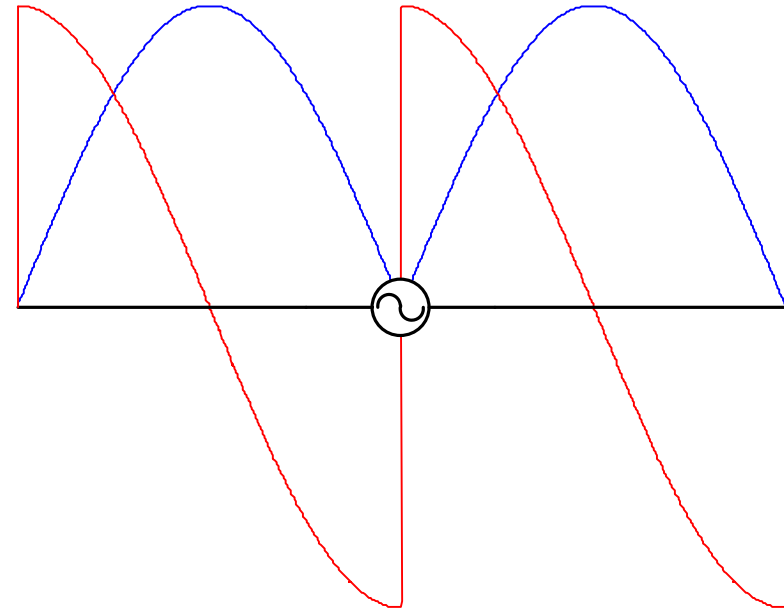
$$Q(z) = \begin{cases} -iQ_p \cos k(l - z), & z \geq 0 \\ iQ_p \cos k(l + z), & z \leq 0, \end{cases} \quad (2)$$

Приклади цих розподілів для вібраторів різних довжин – на наступному слайді.

## Симетричний вібратор: розподіл струму та заряду



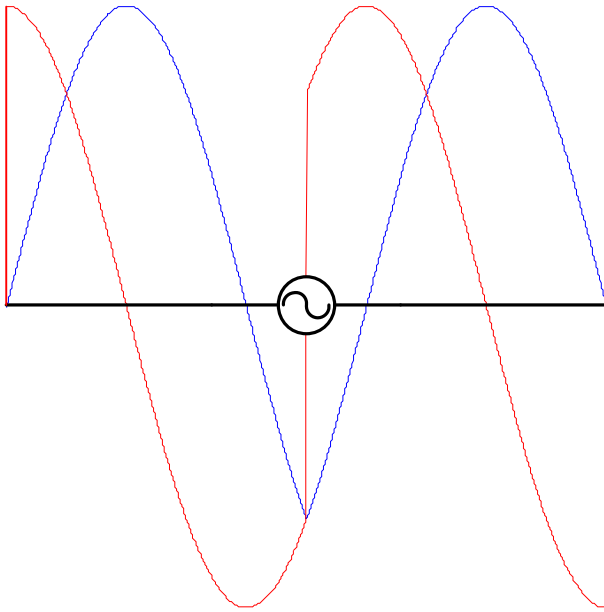
$$\frac{l}{\lambda} = 0,25$$



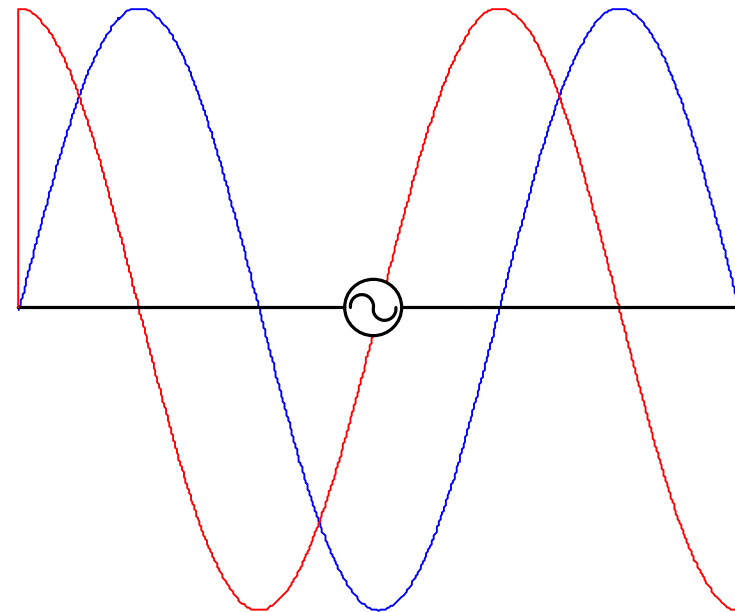
$$\frac{l}{\lambda} = 0,5$$

Лінія синього кольору – струм, червоного – заряд.

## Симетричний вібратор: розподіл струму та заряду

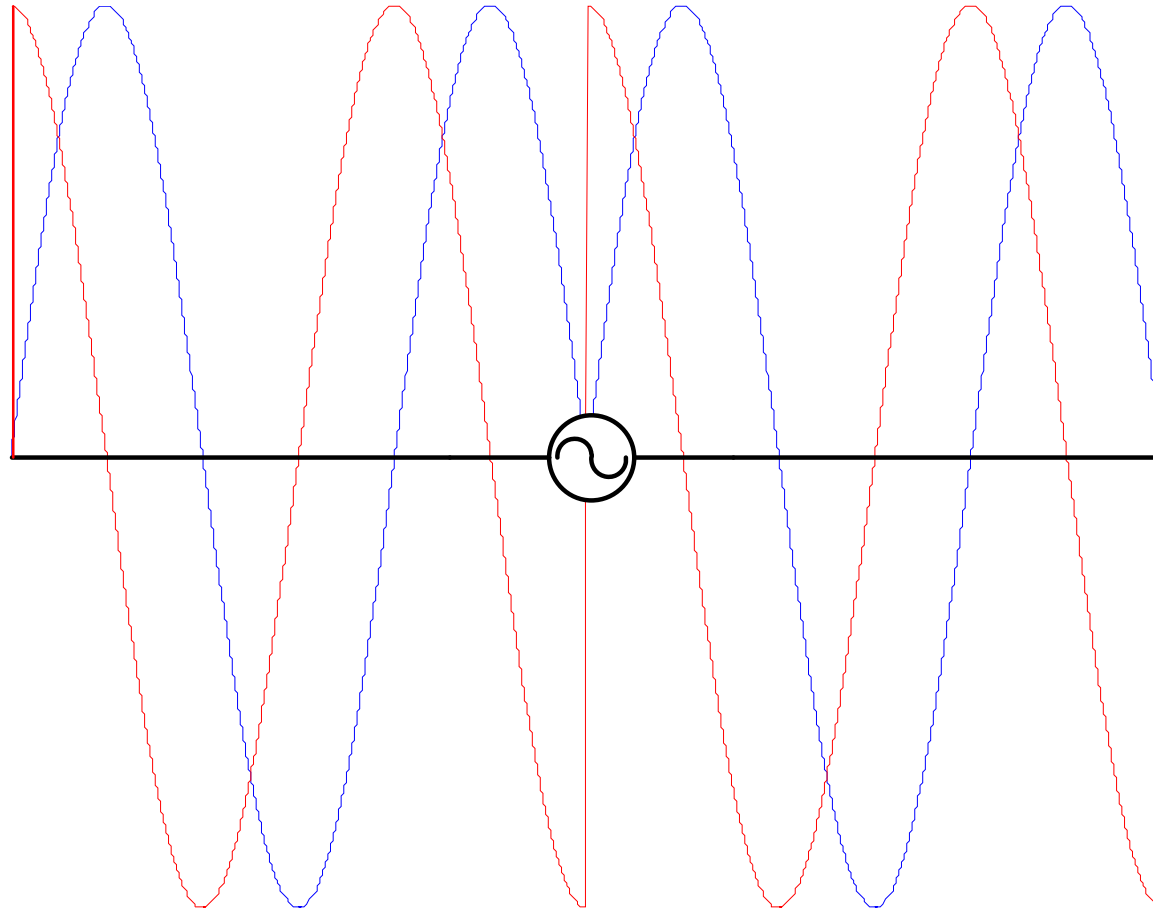


$$\frac{l}{\lambda} = 0,625$$



$$\frac{l}{\lambda} = 0,75$$

## Симетричний вібратор: розподіл струму та заряду



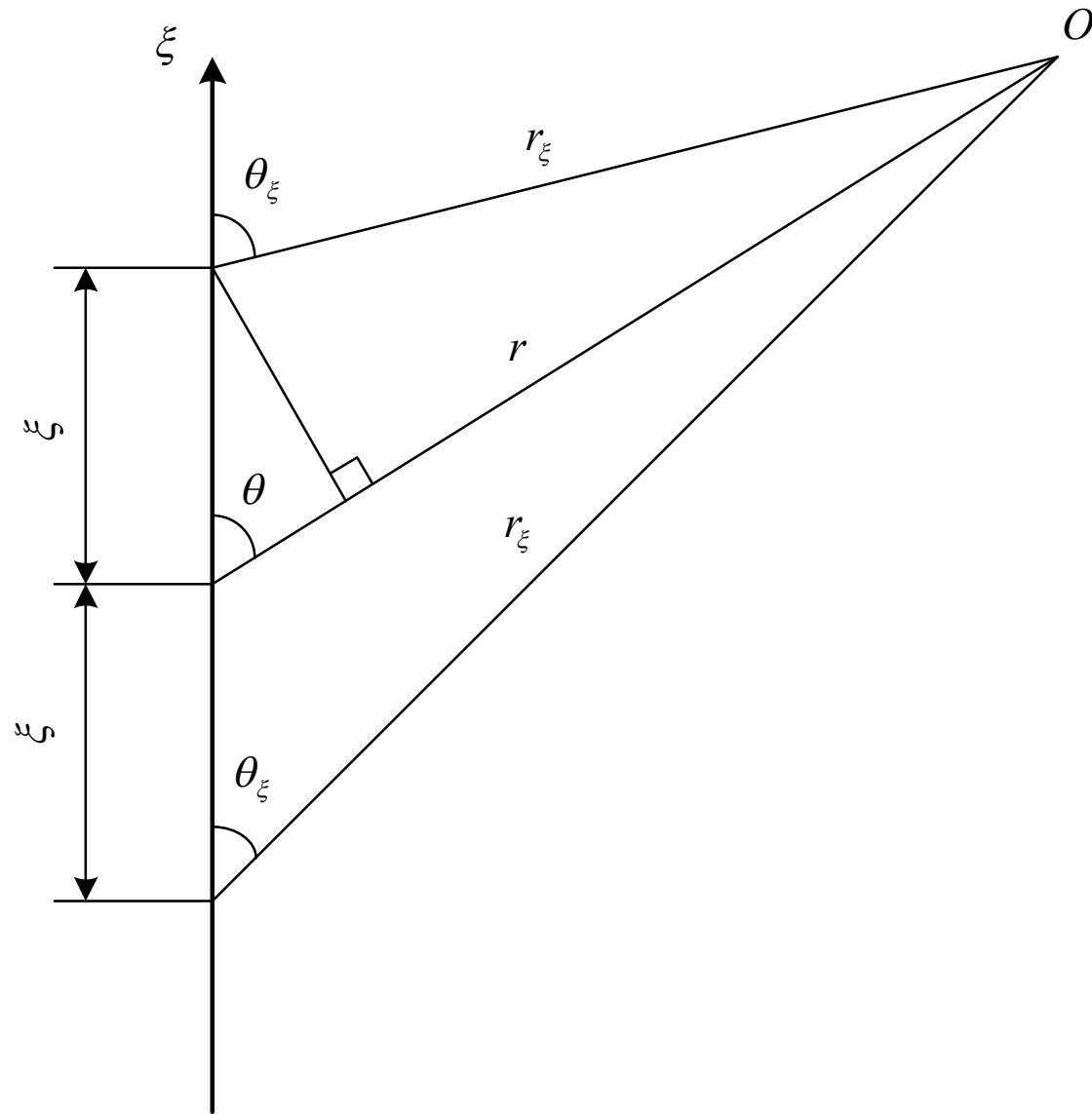
$$\frac{l}{\lambda} = 1,5$$

## Симетричний вібратор: розподіл струму та заряду

Отримані результати вказують на те, що **у симетричних перерізах вібратора будь-якої довжини заряди однакові за значенням та протилежні за знаком, а струми однакові як за значенням, так і за знаком.**

Іншими словами, симетричним вібратором є такий прямолінійний провідник зі струмом, у симетричних точках якого струми однакові та співпадають за напрямком і фазою.

## Симетричний вібратор: поле випромінювання



До розрахунку поля випромінювання вібратора  
(тут координату  $z$  тимчасово позначено через  $\xi$ )

## Симетричний вібратор: поле випромінювання

$$\dot{E}_\theta = \frac{30Id\xi}{k} \sin \theta \cdot \left( -i \frac{1}{r^3} + \frac{k}{r^2} \right) e^{-ikr} \Rightarrow \dot{E}_\theta = 60\pi i \frac{Id\xi}{\lambda} \sin \theta \cdot \frac{e^{-ikr}}{r}$$

$$E_r = E_\varphi = 0$$

Для визначення напруженості поля, створюваного у точці спостереження  $O$  всім вібратором, потрібно проінтегрувати даний вираз по довжині вібратора. Звідси:

$$\dot{E} = \dot{E}_\theta = \frac{60\pi i}{\lambda} \int_{-l}^l I(\xi) \sin \theta_\xi \cdot \frac{e^{-ikr_\xi}}{r_\xi} d\xi, \quad (3)$$

$\xi$  - координата точок на дроті, яку відраховують від середини вібратора;

$I(\xi)$  - струм на елементі дроту з координатою  $\xi$ ;

$r_\xi = r - \xi \cos \theta$  - відстань від елемента струму до точок спостереження.

## Симетричний вібратор: поле випромінювання

Обчислення (3) з підстановкою у нього (1) та деякими спрощеннями:

$$\begin{aligned}
 \dot{E} = \dot{E}_\theta &= \left[ \text{при } r \gg l \Rightarrow \sin \theta_\xi = \sin \theta \right] = \frac{60\pi i \sin \theta}{\lambda r} \int_{-l}^l I(\xi) e^{-ik(r-\xi \cos \theta)} d\xi = \\
 &= \frac{60\pi i \sin \theta}{\lambda r} e^{-ikr} \int_{-l}^l I \sin k(l - |\xi|) e^{ik\xi \cos \theta} d\xi = \\
 &= \frac{60\pi i \sin \theta}{\lambda r} e^{-ikr} I \left[ \int_{-l}^0 \sin k(l + \xi) e^{ik\xi \cos \theta} d\xi + \int_0^l \sin k(l - \xi) e^{ik\xi \cos \theta} d\xi + \right] = \\
 &= 60i \frac{I}{r} \frac{\cos(kl \cos \theta) - \cos kl}{\sin \theta} e^{-ikr} \tag{4}
 \end{aligned}$$

## Симетричний вібратор: поле випромінювання

В отриманому виразі є три множники (як і для елементарного вібратора):

$$\dot{E} = 60 \frac{I}{r} \frac{\cos(kl \cos \theta) - \cos kl}{\sin \theta} i e^{-ikr} \quad (5)$$

Амплитудний множник,  
який визначає  
напруженість поля і не  
залежить від напрямку

Характеристика  
напрявленості  
антени

Фазовий  
множник

## Симетричний вібратор: поле випромінювання

В екваторіальній площині ( $\theta = 90^\circ$ ):

$$E = i60 \frac{I}{r} (1 - \cos kl) e^{-ikr}$$

При  $l \ll \lambda \Rightarrow \cos kl \approx 1 - \frac{(kl)^2}{2}$ ,  $\cos(kl \cos \theta) \approx 1 - \frac{(kl \cos \theta)^2}{2}$ , звідки

$$E = i \frac{60I}{r \sin \theta} \left( 1 - \frac{(\cos kl)^2}{2} - 1 + \frac{(kl)^2}{2} \right) e^{-ikr} = i \frac{30I}{r} kl \sin \theta \cdot e^{-ikr}$$

Для півхвильового вібратора  $\frac{l}{\lambda} = 0,25$ :

$$E = iA \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} e^{-ikr} \Rightarrow f(\theta) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta}.$$

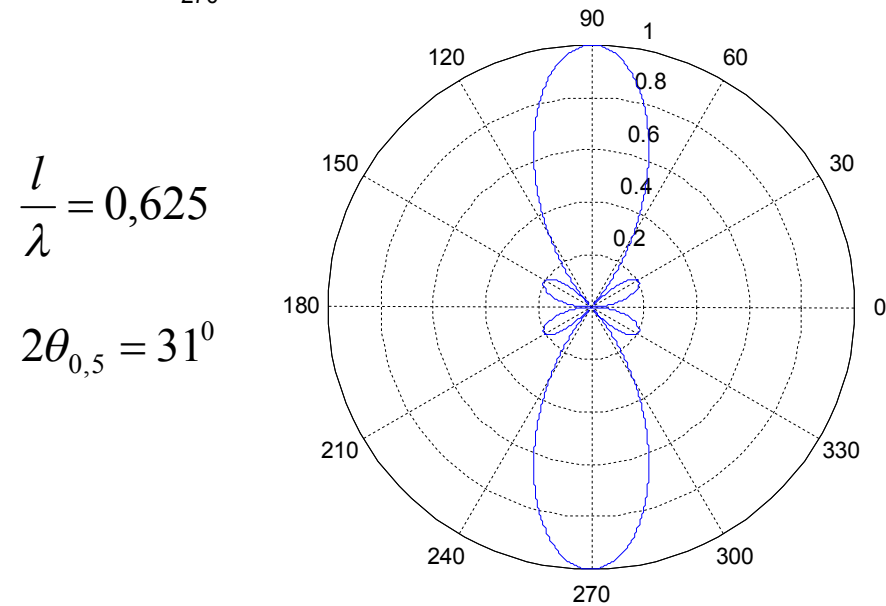
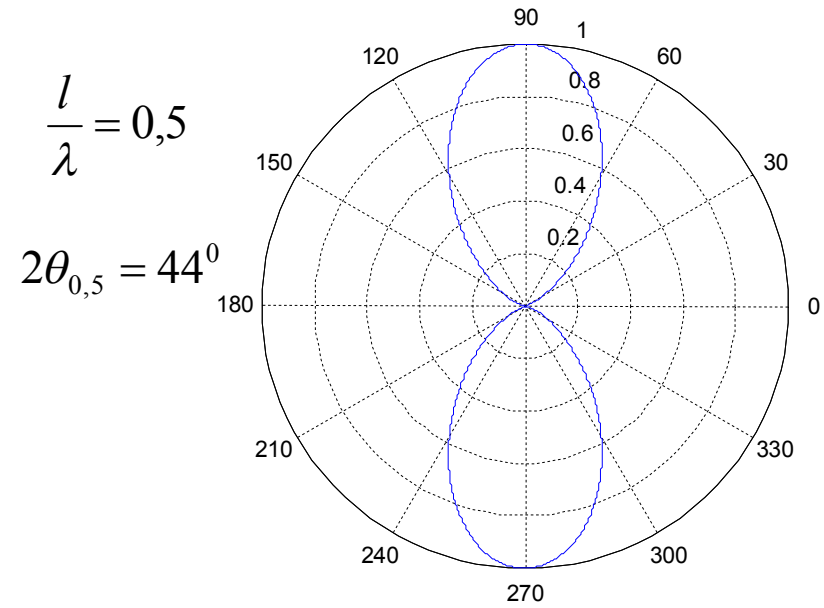
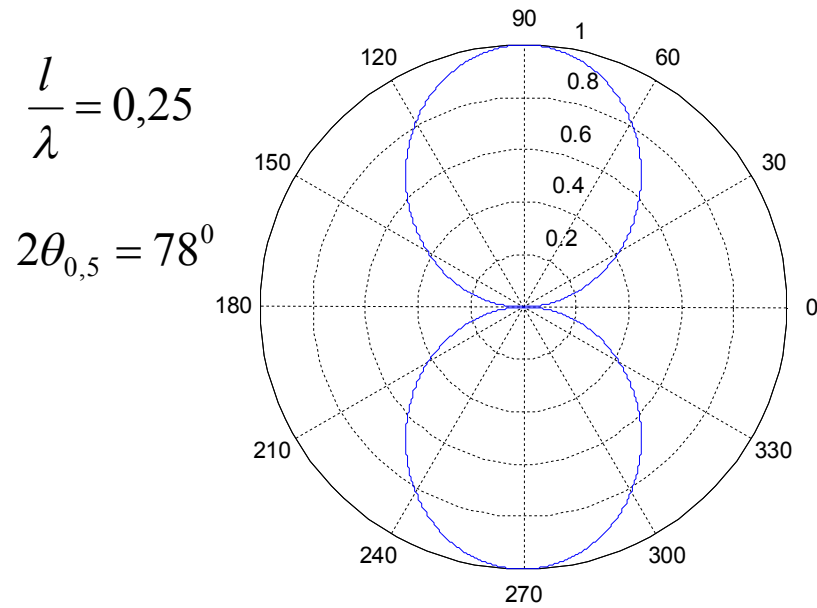
## Симетричний вібратор: поле випромінювання

Тоді нормована характеристика напрямленості:

$$F(\theta) = \frac{\cos(kl \cos \theta) - \cos kl}{\sin \theta} \quad (6)$$

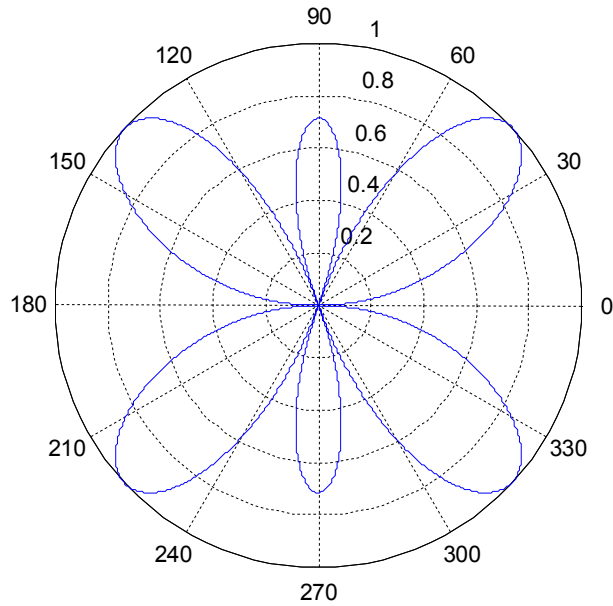
Приклади ДН для вібраторів різних довжин, отримані за допомогою цього виразу – на наступних слайдах. Там же прописано ширину цієї ДН.

# Симетричний вібратор: поле випромінювання

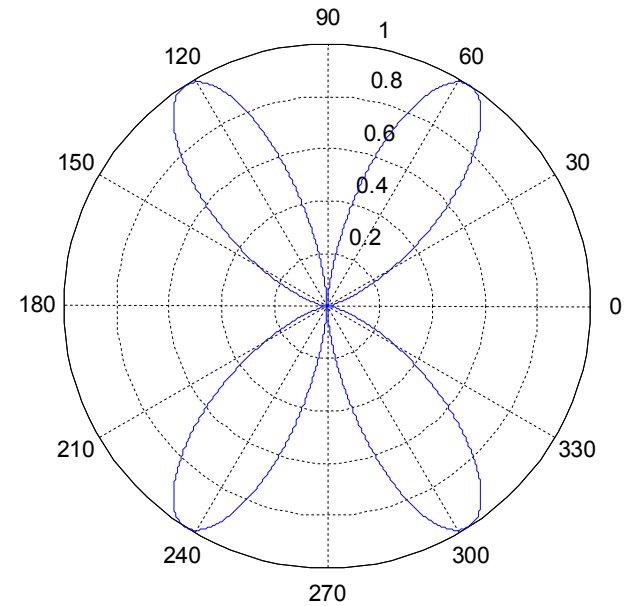


# Симетричний вібратор: поле випромінювання

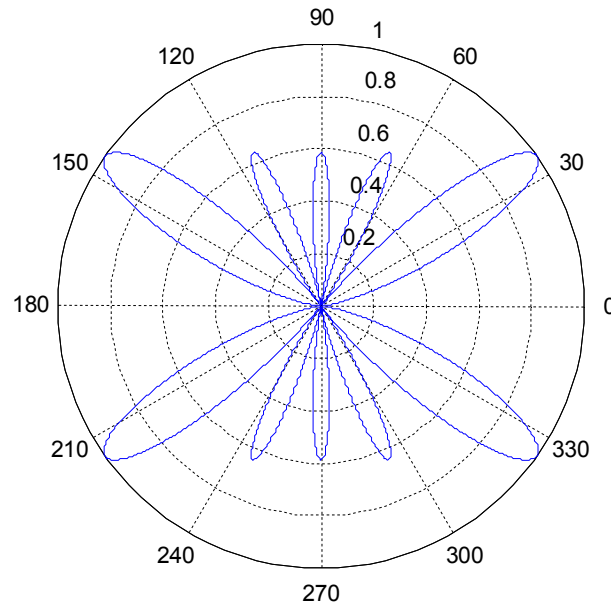
$$\frac{l}{\lambda} = 0,75$$



$$\frac{l}{\lambda} = 1$$



$$\frac{l}{\lambda} = 5$$



## Симетричний вібратор: поле випромінювання

Аналіз отриманих ДНА:

- 1) Для будь-яких співвідношень  $l/\lambda$  симетричний вібратор не випромінює уздовж своєї осі.
- 2) При  $l/\lambda \leq 0,5$  у напрямках  $\theta = 90^\circ$  і  $\theta = 270^\circ$  (екваторіальна площина) поля всіх елементарних вібраторів максимальні, синфазні та складаються арифметично. Тому поле у цих напрямках максимальне. ДН при  $l/\lambda = 0,5$  має дві (головних) пелюстки.
- 3) При збільшенні співвідношення  $l/\lambda$  до 0,5 ДН звужується, а при значенні цього співвідношення 0,625 на ДН з'являються бічні пелюстки.
- 4) Збільшення співвідношення  $l/\lambda$  супроводжується зменшенням рівня випромінювання в екваторіальній площині внаслідок появи ділянок із зустрічним напрямком струму. Максимум КСД буде при  $l/\lambda \leq 0,625$ , оскільки збільшення довжини вібратора супроводжується появою бічних пелюсток та звуженням головної пелюстки.

## Симетричний вібратор: поле випромінювання

- 5)  $\frac{l}{\lambda} = \begin{cases} 1; 3; 5; \dots \Rightarrow \text{випромінювання у екваторіальній площині } (f(90^\circ), f(270^\circ)) \\ \text{є, хоча його рівень зменшується при збільшенні } l/\lambda \\ \\ 2; 4; 6; \dots \Rightarrow \text{випромінювання у екваторіальній площині відсутнє в} \\ \text{силу рівності довжин ділянок з протилежним} \\ \text{напрямком струму} \end{cases}$
- 6) При  $l/\lambda = 1; 2; 3; 4; 5; \dots$  кількість пелюсток ДН у кожній півсфері дорівнює кількості довжин хвиль, які вкладаються уздовж вібратора. Тому на практиці використовують вібратори, у яких  $l/\lambda \leq 0,7$ .
- 7) По мірі збільшення співвідношення  $l/\lambda$  напрямок головної пелюстки все більше віддаляється від екваторіальної площини та наближається до осі вібратора.

**Теорія симетричного вібратора: діюча  
висота, вхідний опір,  
опір випромінювання, КСД.**

## Симетричний вібратор: діюча висота

Визначення діючої висоти антени через розподіл струму:

$$h_{\text{д}} = \frac{1}{I_A} \int_{-l}^l I(\xi) d\xi, \quad (7)$$

де  $I_A$  – струм у точках живлення.

Використовуючи вираз (1), отримаємо з (7) для симетричного вібратора:

$$h_{\text{д}} = \frac{2I}{kI_A} (1 - \cos kl) = \frac{2(1 - \cos kl)}{k \sin kl} = \frac{2}{k} \operatorname{tg} \frac{kl}{2} = \frac{\lambda}{\pi} \operatorname{tg} \frac{kl}{2}.$$

Якщо ж співвіднести діючу висоту до струму у пучності:

$$h_{\text{д}} = \frac{1}{I} \int_{-l}^l I(\xi) d\xi = \frac{2}{k} (1 - \cos kl) = \frac{2\lambda}{\pi} \sin^2 \frac{kl}{2}.$$

Частинні випадки:

$$\frac{l}{\lambda} = 0,25 \Rightarrow h_{\text{д}} = \frac{\lambda}{\pi}; \quad l \ll \lambda \Rightarrow h_{\text{д}} = l.$$

## Симетричний вібратор: опір випромінювання

Точну формулу опору випромінювання (віднесеного до струму у пучності) симетричного вібратора отримав Ван дер Поль:

$$R_{\Sigma\Pi} = 30 \{ [Si(4kl) - 2Si(2kl)] \sin 2kl + [C + \ln(kl) + Ci(4kl) - 2Ci(2kl)] \cos 2kl + 2[C + \ln(2kl) - Ci(2kl)] \}, \quad (8)$$

$Si(x)$  – інтегральний синус від аргументу  $x$ ;

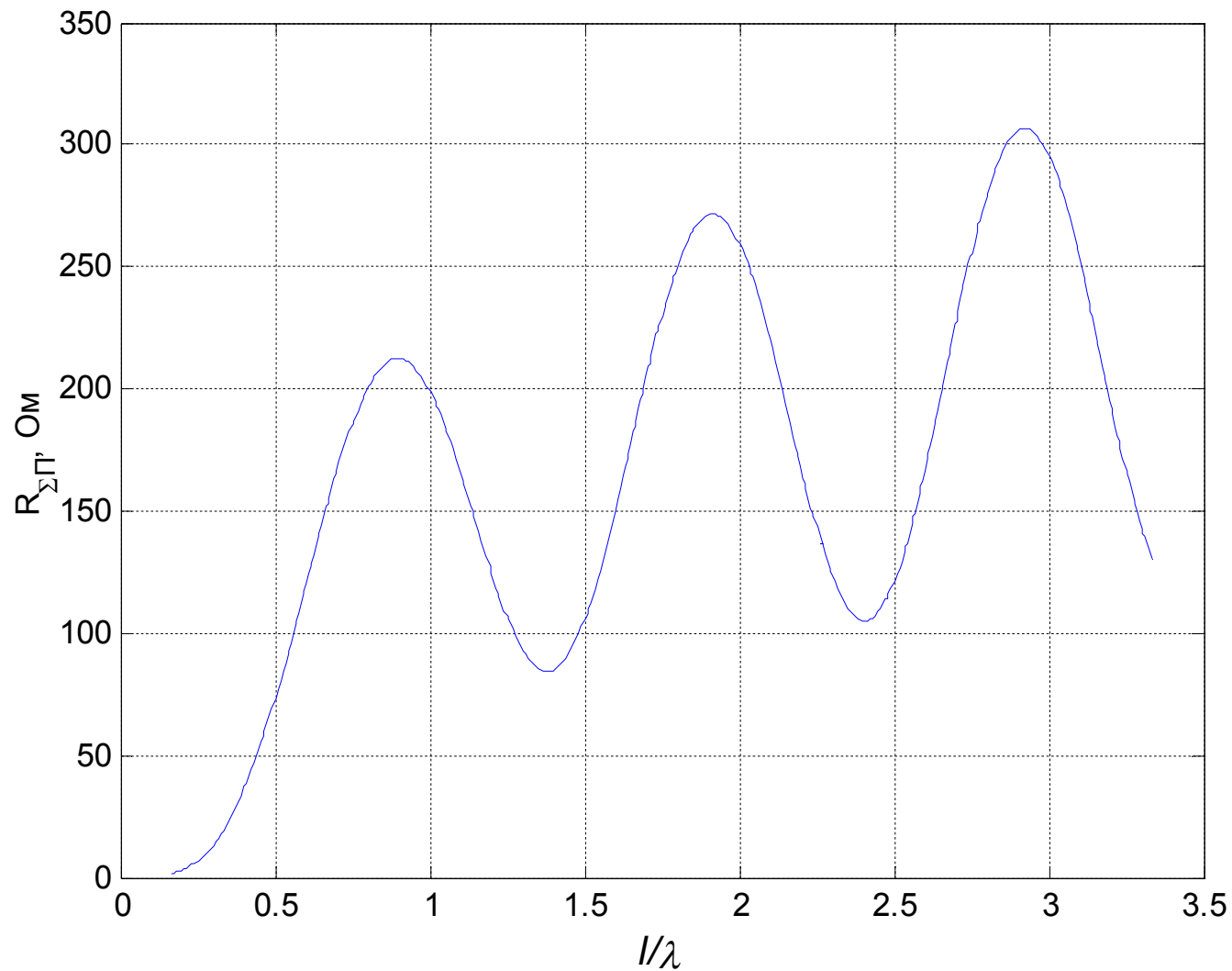
$Ci(x)$  – інтегральний косинус від аргументу  $x$ ;

$C = 0,577$  – стала Ейлера.

Цей опір залежить від відносної довжини симетричного вібратора  $l/\lambda$  (наступний слайд). Зі збільшенням  $l/\lambda$  від 0 до 1 опір збільшується, причому

$$\frac{l}{\lambda} = 0,25 : R_{\Sigma\Pi} = 73,1 \text{ Ом}; \quad \frac{l}{\lambda} = 0,5 : R_{\Sigma\Pi} = 200 \text{ Ом}; \quad \frac{l}{\lambda} = 0,625 : R_{\Sigma\Pi} = 110 \text{ Ом}.$$

## Симетричний вібратор: опір випромінювання



Залежність опору випромінювання вібратора (віднесеного до струму у пучності)  
від його відносної довжини

## Симетричний вібратор: опір випромінювання

Подальше збільшення  $l/\lambda$  до 1,5 спричиняє зменшення опору випромінювання до 100 Ом, яке змінюється його збільшенням до 250 Ом при зміні  $l/\lambda$  від 1,5 до 2, після чого мають місце коливання опору випромінювання, які супроводжуються деяким збільшенням його максимуму і мінімуму.

Такий характер зміни опору випромінювання можна пояснити тим, що збільшення довжини вібратора збільшує кількість елементарних вібраторів, які беруть участь у випромінюванні ЕМХ. З іншої сторони, зміна  $l/\lambda$  (наприклад, від 1 до 1,5) супроводжується появою ділянок вібратора з зустрічним напрямом струму, який і спричиняє зменшення опору випромінювання.

Опір випромінювання несиметричних вібраторів також можна визначити за цим графіком/формулою, проте отримані при цьому значення опору випромінювання слід ділити навпіл.

Наприклад, чвертьхвильовий несиметричний вібратор має  $R_{\Sigma\Pi} = 73,1/2 = 36,5$  Ом.

Для коротких (порівняно з довжиною хвилі) симетричних вібраторів можна використовувати наближений вираз:

$$R_{\Sigma\Pi} \cong 80\pi^2 \left( \frac{h_d}{\lambda} \right)^2 \text{ при } l \leq \lambda/2.$$

## Симетричний вібратор: вхідний опір

Активна та реактивна складові вхідного опору вібратора  $\dot{Z}_{ex A} = R_{ex A} + iX_{ex A}$  дорівнюють, відповідно, активному та реактивному опорам, віднесеним до вхідних клем вібратора.

Приблизно вхідний опір такого вібратора можна обчислити так: якщо  $l/\lambda \leq 0,5$  ( $l \leq \lambda/2$ ):

$$\dot{Z}_A \cong 80\pi^2 \left( \frac{h_\delta}{\lambda} \right)^2 - iW_A \operatorname{ctg} \left( \frac{kl}{2} \right), \quad (9)$$

а при  $l/\lambda > 0,5$  ( $l > \lambda/2$ ):

$$\dot{Z}_A \cong \frac{R_{\Sigma\Pi}}{\sin^2 \left( \frac{kl}{2} \right)} - iW_A \operatorname{ctg} \left( \frac{kl}{2} \right), \quad (10)$$

$W_A = 2761g \frac{l}{a} - 120$  – хвилевий опір вібратора;

$a$  – радіус вібратора.

## Симетричний вібратор: вхідний опір

Вирази (9), (10) дуже приблизні. Точніший вираз такий:

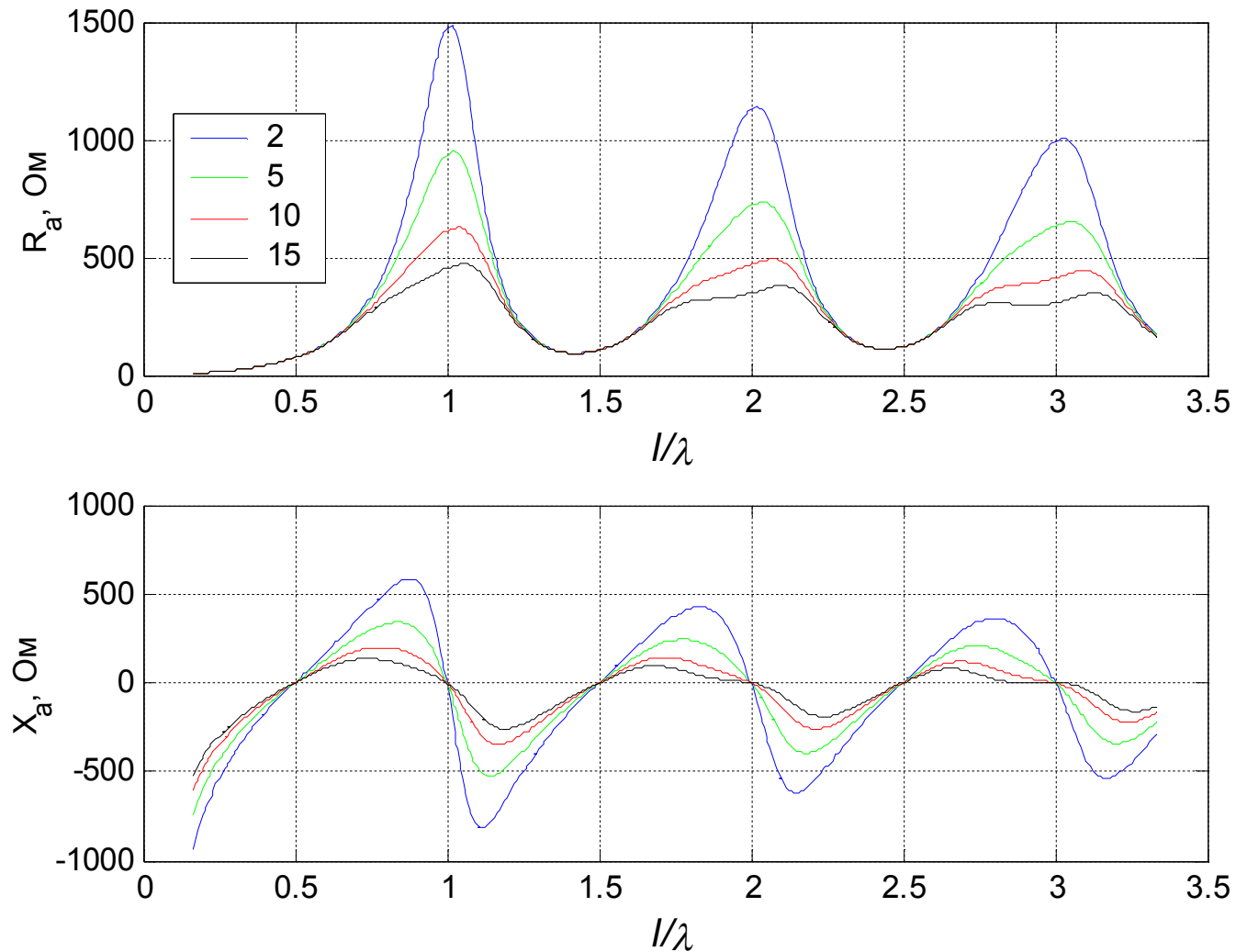
$$\dot{Z}_A = W_A \frac{\sin \frac{kl}{2} - i \frac{W_A}{R_{\Sigma\Pi}} \cos \frac{kl}{2}}{\frac{W_A}{R_{\Sigma\Pi}} \sin \frac{kl}{2} - i \cos \frac{kl}{2}}. \quad (11)$$

Розбиття (11) на активну та реактивну складові дає такий результат:

$$\dot{Z}_A = R_A + iX_A = \frac{R_{\Sigma\Pi} - i \frac{W_A}{2} \left[ 1 - \left( \frac{R_{\Sigma\Pi}}{W_A} \right)^2 \right] \sin kl}{\sin^2 \frac{kl}{2} + \left( \frac{R_{\Sigma\Pi}}{W_A} \right)^2 \cos^2 \frac{kl}{2}}, \quad (12)$$

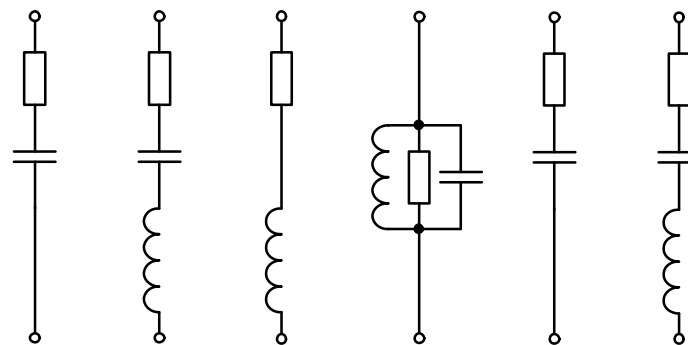
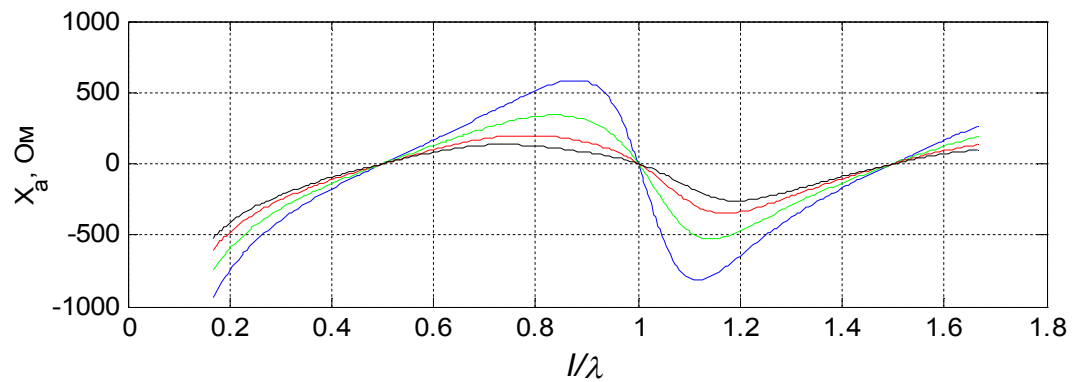
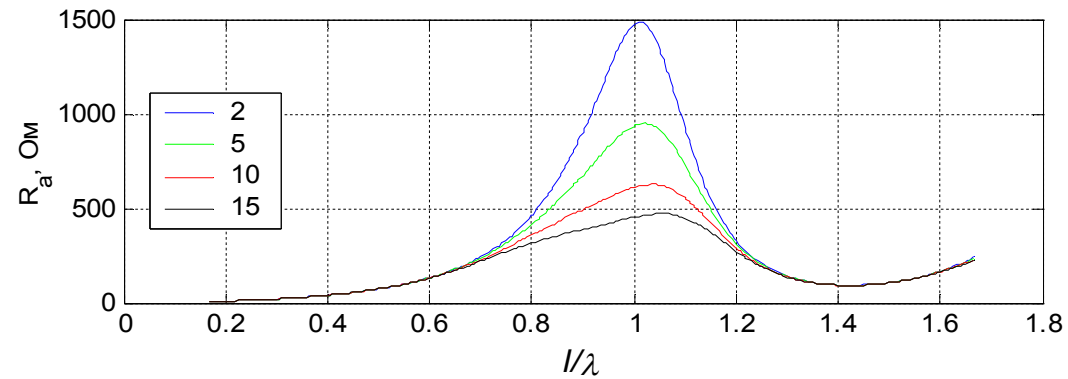
$$R_A = \frac{R_{\Sigma\Pi}}{\sin^2 \frac{kl}{2} + \left( \frac{R_{\Sigma\Pi}}{W_A} \right)^2 \cos^2 \frac{kl}{2}}, \quad X_A = - \frac{\frac{W_A}{2} \left[ 1 - \left( \frac{R_{\Sigma\Pi}}{W_A} \right)^2 \right] \sin kl}{\sin^2 \frac{kl}{2} + \left( \frac{R_{\Sigma\Pi}}{W_A} \right)^2 \cos^2 \frac{kl}{2}}.$$

## Симетричний вібратор: вхідний опір



Залежність вхідного опору вібратора від його відносної довжини та радіуса ( $a = 2$  мм;  $a = 5$  мм;  $a = 10$  мм;  $a = 15$  мм).

## Симетричний вібратор: вхідний опір



Залежність вхідного опору вібратора від його відносної довжини та радіуса ( $a = 2$  мм;  $a = 5$  мм;  $a = 10$  мм;  $a = 15$  мм).

## Симетричний вібратор: вхідний опір

При  $l/\lambda < 0,5$  вхідний опір вібратора має ємнісний характер та невелику активну складову. Для наочності відповідний відрізок значень опору показано як коло з активного опору та конденсатора (див. рисунок на наступному слайді).

При  $l/\lambda = 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; \dots$  має місце резонанс. Тоді  $X_{exA} = 0$ ,  $Z_{exA} = R_{exA}$ , причому значення  $R_{exA}$  залежать від того, який саме резонанс: послідовний чи паралельний.

Поблизу точок  $l/\lambda = 0,5; 1,5; 2,5; \dots$  має місце послідовний резонанс (для цього на рисунку показано послідовний коливальний контур): активна складова вхідного опору мінімальна і дорівнює повному активному опору антени, віднесеному до пучності.

З невеликою похибкою можна вважати, що для таких вібраторів  $R_{exA} = R_{\Sigma\Pi}$

При подальшому збільшенні  $l/\lambda$  приблизно в межах від 0,5 до 1 вхідний опір вібратора має індуктивний характер, що проілюстровано послідовним колом з активним опором та котушкою індуктивності.

Поблизу точок  $l/\lambda = 1; 2; 3; \dots$  має місце паралельний резонанс: активна складова вхідного опору максимальна і становить  $R_{exA} = W_A^2 / R_{\Sigma\Pi}$

## Симетричний вібратор: вхідний опір

При подальшому збільшенні  $l/\lambda$  опір вібратора знову набуває ємнісного характеру і хід кривої повторюється з тією лише різницею, що максимальні значення  $R_A$  і  $X_A$  будуть поступово зменшуватись (див. рисунок на слайді 30).

При деяких значеннях  $l/\lambda$  реактивна складова опору вібратора вібратора дорівнює нулю. Ці точки при заданій довжині вібратора відповідають резонансним хвилям антени. Найбільшу з резонансних хвиль називають основною резонансною хвилею чи першою гармонікою. Для симетричного вібратора вона приблизно дорівнює подвоєному значенню повної довжини вібратора  $\lambda_0 \cong 2l$ .

Вхідний опір та хвилевий опір вібратора удвічі менший, порівняно з симетричним вібратором, а перша гармоніка несиметричного вібратора  $\lambda_0 \cong 4h_e$  ( $h_e$  – висота несиметричного вібратора).

## Симетричний вібратор: КСД і коефіцієнт підсилення

$$\left. \begin{aligned}
 D &= \frac{r^2 E^2(\theta_1, \varphi_1)}{60 P_\Sigma} \\
 \dot{E} &= 60i \frac{I \cos(kl \cos \theta) - \cos kl}{r \sin \theta} e^{-ikr} \Big|_{\theta=90^\circ}
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow D_{\max} = \frac{120}{R_\Sigma} (1 - \cos kl)^2 \quad (13)$$

Залежність КСД у головному напрямі, оскільки в інших напрямках КСД буде значно менший, а то і дорівнюватиме нулю.

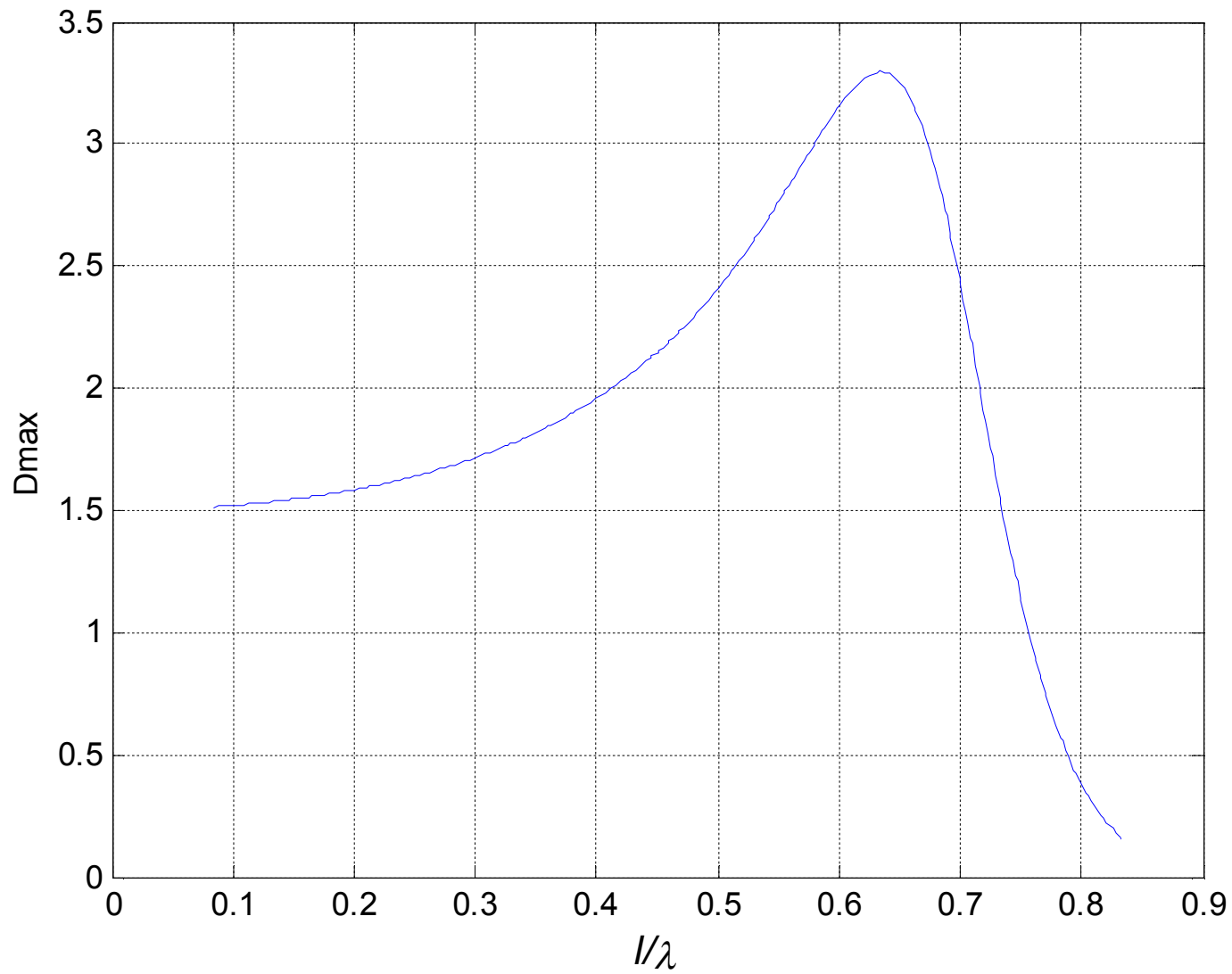
Частинні випадки:

$$\frac{l}{\lambda} = 0,25 : R_\Sigma = 73 \text{ Ом}, kl = 90, D_{\max} = 1,64;$$

$$\frac{l}{\lambda} = 0,625 : R_\Sigma = 110 \text{ Ом}, kl = 225, D_{\max} \cong 3,3.$$

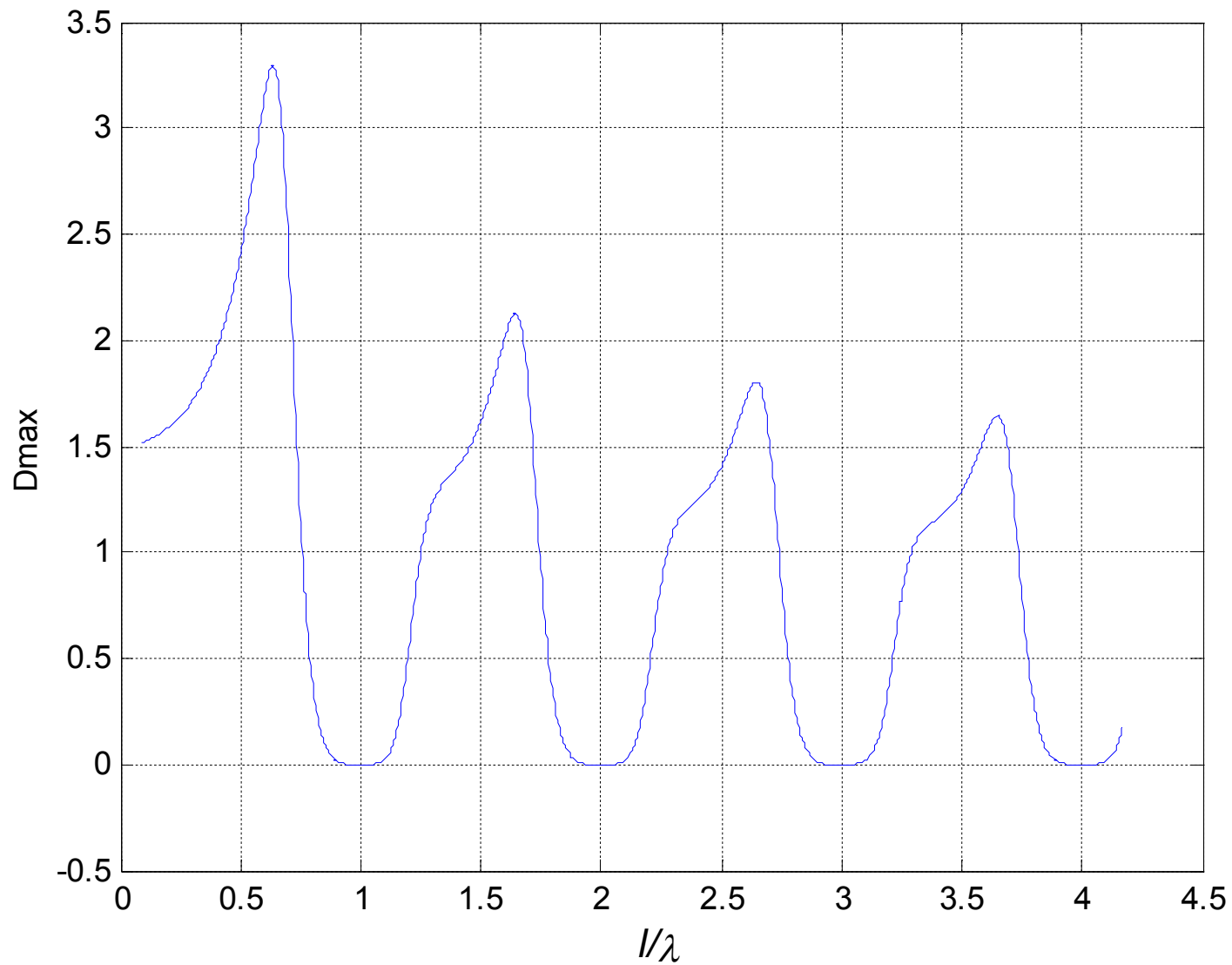
При  $l/\lambda = 0,625$  досягається максимальне значення КСД симетричного вібратора. Тому у попередніх випадках серед інших значень відносної довжини вібратора  $l/\lambda$  було присутнє “дивне” значення 0,625.

## Симетричний вібратор: КСД і коефіцієнт підсилення



Залежність КСД у головному напрямі (залежність (13))

## Симетричний вібратор: КСД і коефіцієнт підсилення



Залежність КСД у головному напрямі (залежність (13))

## Симетричний вібратор: КСД і коефіцієнт підсилення

Для будь-якої вібраторної антени значення КСД у головному напрямі:

$$D_{\max} = \frac{120}{R_{\Sigma}} f_{\max}^2 (\theta, \varphi), \quad (14)$$

де  $f_{\max}(\theta, \varphi)$  – максимальне значення ненормованої ХНА.

Оскільки для півхвильового симетричного вібратора КСД дорівнює 1,64 (див. слайд 34), між коефіцієнтом підсилення  $G$ , віднесеному до ізотропного (неспрямованого) випромінювача, і коефіцієнтом, віднесеним до півхвильового вібратора  $G_{hlv}$ , є залежність:

$$G_{hlv} = \frac{G}{1,64},$$

**тобто півхвильовий вібратор як самий короткий з резонансних симетричних вібраторів та такий, у якого відсутні бічні пелюстки ДН, використовують найчастіше.**

Цьому і буде присвячено наступний огляд.