Електродинаміка, пристрої НВЧ та антенна техніка

Поширення електромагнітних сигналів

Загальні положення

Дисперсія (у теорії хвилевих процесів) – залежність фазової швидкості хвилі від частоти.

Середовища, у яких має місце це явище, називають *диспергуючими*. Якщо строго, то всі середовища є такими, оскільки вони є електропровідними.

$$v_{ф} = \frac{c}{\mathrm{Re}\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{\omega}{k'}.$$

Крім цього, у лініях передачі дисперсія має зовсім іншу природу.

Наявність дисперсії потрібно враховувати, оцінюючи поширення електромагнітних сигналів, тобто хвилевих процесів, які переносять інформацію.

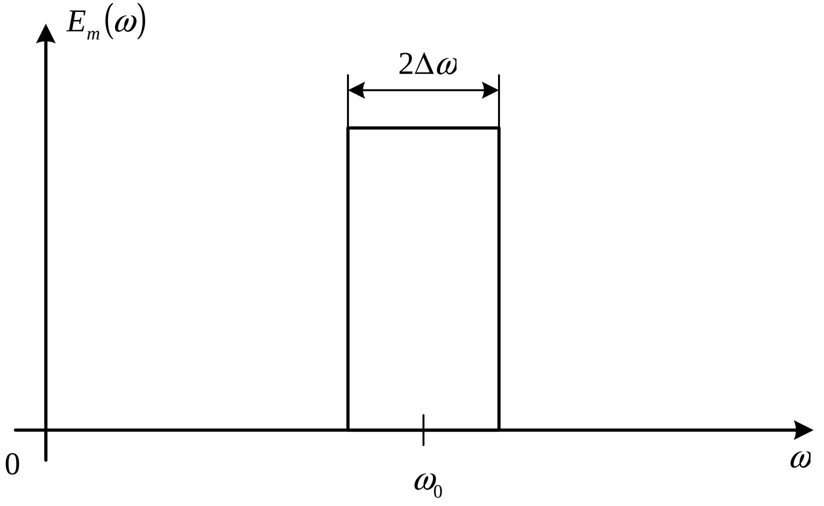
У цьому випадку **наявність дисперсії спричиняє спотворення форми сигналів.** Чому? Сигнал є сумою частотних компонент(математично це ряд чи інтеграл Фур'є). Прийнятий сигнал також є сумою цих компонент, кожна з яких поширюється зі своєю фазовою швидкістю, яка визначається частотою. У результаті зміни фазових співвідношень частотних компонент сигнал у певній мірі спотворюється.

Групова швидкість хвилевого процесу

Якщо взяти спектральну густину сигналу $\dot{S}(\omega)$ у вигляді комплексної амплітуди хвилі $\frac{1}{2}\dot{\vec{E}}(\omega)e^{-ikz}$, та врахувати, що $\dot{S}(-\omega)=\dot{S}^*(\omega)$, то напруженість електричного поля при цьому виглядатиме так:

$$\vec{E}=\mathrm{Re}\int_0^\infty \dot{\vec{E}}(\omega)e^{i[\omega t-k(\omega)z]}d\omega.$$

Вважаючи, що спектр зосереджено у смузі частот від $\omega_0-\Delta\omega$ äî $\omega_0+\Delta\omega$, (рисунок) маємо:



Групова швидкість хвилевого процесу

$$\vec{E} = \mathrm{Re} \int\limits_{\omega_0-\Delta\omega}^{\omega_0+\Delta\omega} \dot{\vec{E}}(\omega) e^{i[\omega t - k(\omega)z]} d\omega = \begin{bmatrix} \omega \to k \\ k_0 = k(\omega_0) \end{bmatrix} =$$

$$= \mathrm{Re} \int\limits_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} \dot{\vec{E}}(k) e^{i[\omega(k)t - kz]} dk.$$

Заміна змінної

Якщо смуга частот (а значить і хвилевих чисел) є вузькою, тобто $\Delta\omega << \omega_0$, з $\Delta k << k_0$, то розглядуваний хвилевий процес називають **група хвиль.** У цьому випадку можна розкласти частоту, як функцію хвилевого числа, у ряд Тейлора, у точці $k = k_0$:

$$\omega = \omega_0 + \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0} (k - k_0) + ...$$

та обмежитись лінійною частиною розкладу. Тоді

Групова швидкість хвилевого процесу

$$\vec{E} \approx \mathrm{Re}\, e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \int\limits_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} \dot{\vec{E}}(k) e^{i\left(\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0} t - z\right)(k-k_0)} dk.$$

Для найпростішого випадку $\dot{\vec{E}}(k) = \dot{\vec{E}}(\omega) = const$ і її можна винести з під знаку інтеграла. Після чого отримуємо:

Групова швидкість хвилевого процесу

$$\vec{E} \approx 2\,\mathrm{Re}\,\dot{\vec{E}}(k_0)e^{i(\omega_0 t - k_0 z)}\,\frac{\sin\left[\left(\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0} t - z\right)\Delta k\right]}{\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0} t - z} =$$

$$= 2\vec{E}_m\,\frac{\sin\left[\left(\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0} t - z\right)\Delta k\right]}{\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0} t - z}\cos(\omega_0 t - k_0 z) = \boxed{[\omega = \omega_0]} =$$

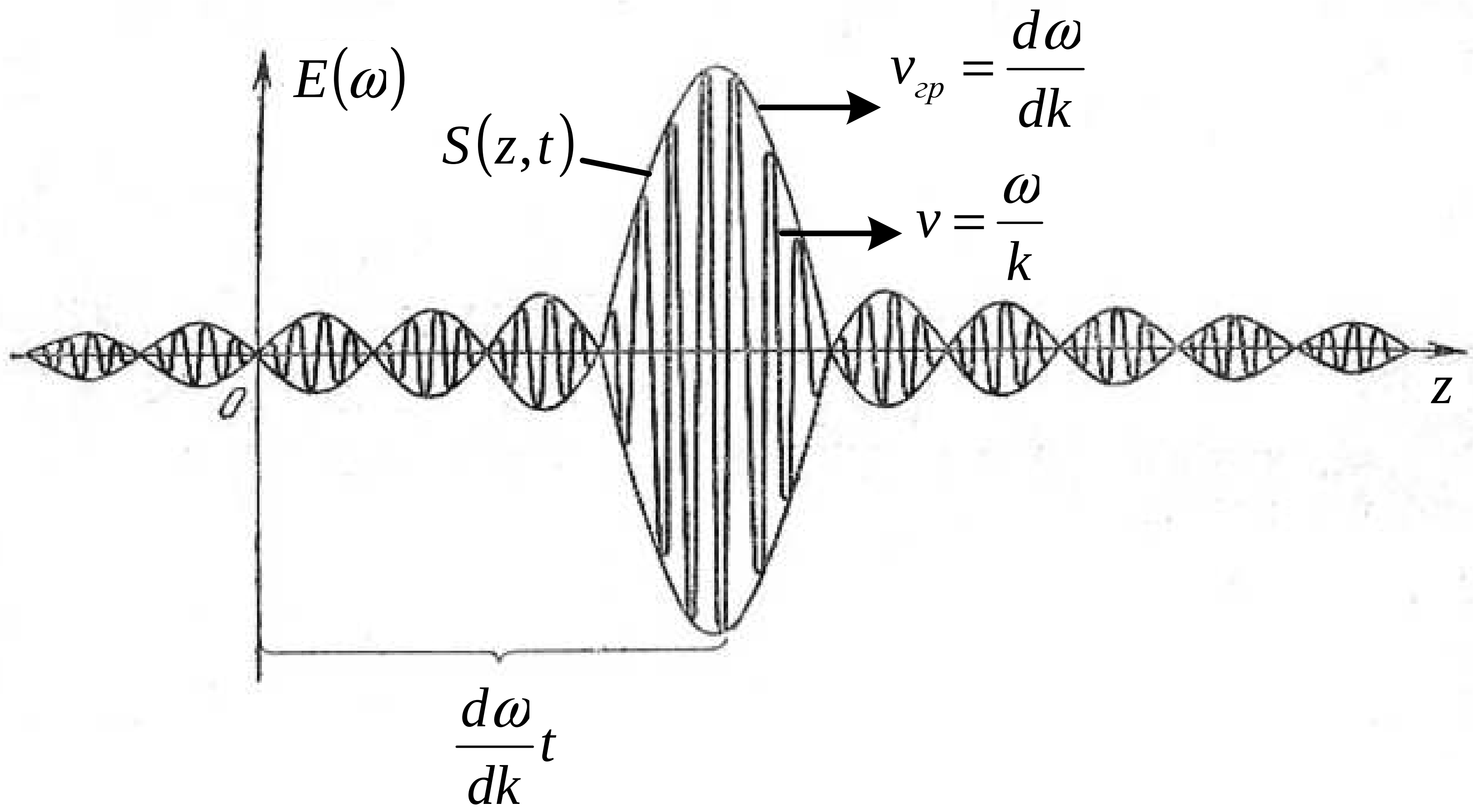
$$= \boxed{2\vec{E}_m\,\frac{\sin\left[\left(\frac{d\omega}{dk} t - z\right)\Delta k\right]}{\frac{d\omega}{dk} t - z}\cos(\omega t - kz).} \tag{1}$$

Групова швидкість хвилевого процесу

Отриманий результат говорить про те, що **поле групи хвиль має характер модульованої гармонічної хвилі з обвідною**

$$S(z,t)=\frac{\sin\left[\left(\frac{d\omega}{dk}t-z\right)\Delta k\right]}{\frac{d\omega}{dk}t-z}. \qquad (2)$$

Групова швидкість хвилевого процесу



“Миттєвий знімок” розподілу цього поля

Групова швидкість хвилевого процесу

Фазова швидкість $v \equiv v_{ф} = \omega/k$ в аргументі косинуса виразу (1) є швидкість зміщення "несучої косинусоїди" уздовж осі *z* всередині обвідної.

Щодо самої обвідної, то її максимум, як випливає з виразу (2), має місце при

$$\frac{d\omega}{dk}t - z = 0.$$

Оскільки ця умова при різних координатах *z* виконується у різні моменти часу, то обвідна рухається, і швидкість цього руху – це **групова швидкість**:

$$v_{гр} = \frac{d\omega}{dk}.$$

Вона **є швидкістю поширення сигналу, що передається хвилевим процесом.**

Фазова та групова швидкості

$$v_{гр} = \frac{d}{dk}\left(v_{ф} k\right) = v_{ф} + k\frac{dv_{ф}}{dk},$$

$$v_{гр} = v_{ф} + k\frac{dv_{ф}}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dk} = v_{ф} - \lambda\frac{dv_{ф}}{d\lambda}.$$

Фазова та групова швидкості у лініях передач

Для ліній передач:

$$v_{гр} = \frac{v_{\varepsilon\mu}^2}{v_ф} \frac{1 - \dfrac{k}{n}\dfrac{dn}{dk}}{1 - \dfrac{\chi}{k}\dfrac{d\chi}{dk}}. \qquad (3)$$

Тут $v_{\varepsilon\mu} = \dfrac{c}{n}$ - фазова швидкість швилі у даному середовищі;

$\mathrm{n} = \sqrt{\varepsilon\mu}$ - коефіцієнт заломлення;

χ - критичне (ппоперечн) ххвилев число.

Фазова та групова швидкості у лініях передач

Частинні випадки (3):

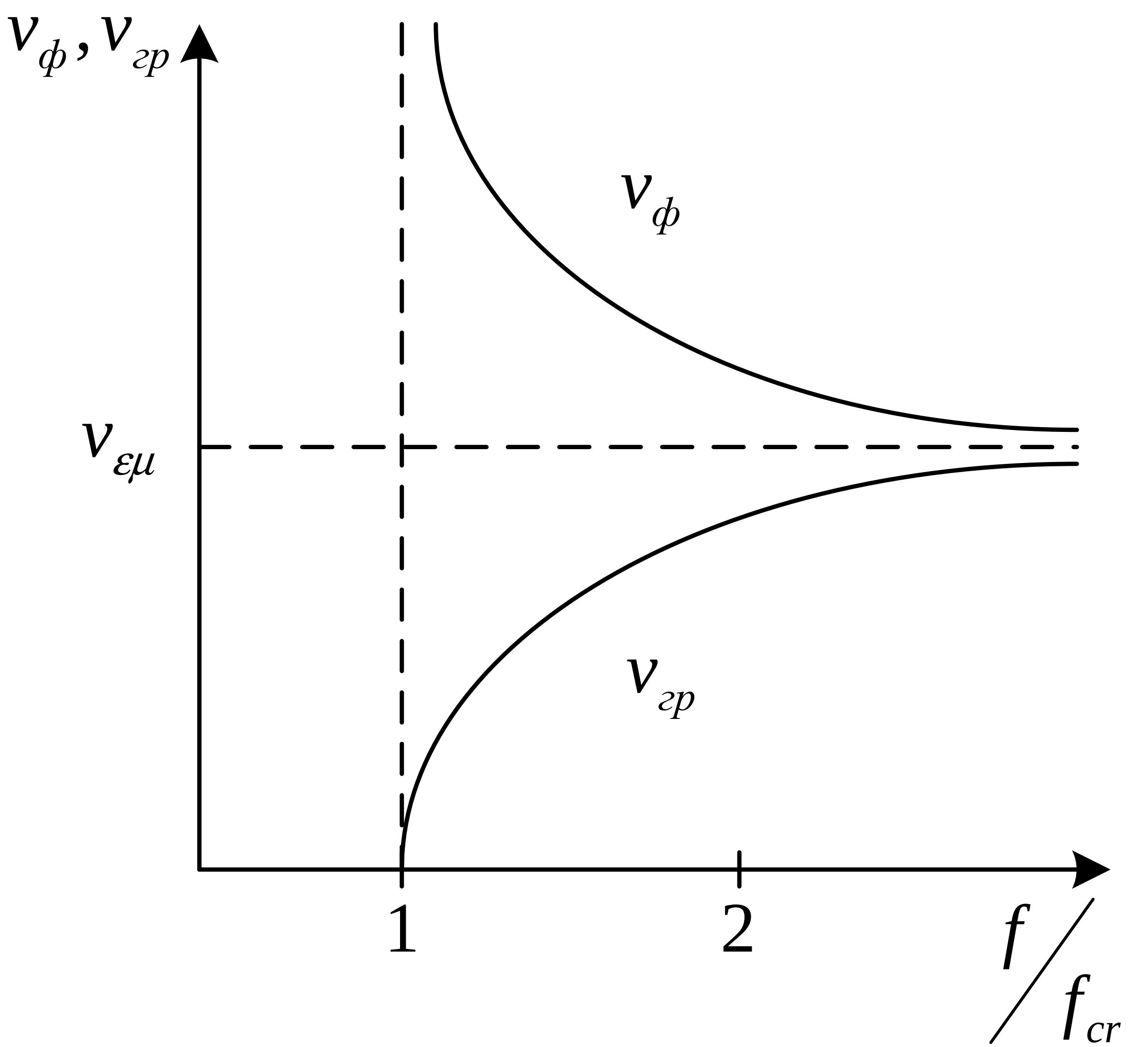
1) $\chi = 0 \Rightarrow \boxed{v_{ф} = v_{гр} = \frac{c}{n} = v_{\varepsilon\mu}}$ - дисперсія відсутня

2) $\chi^2 = const > 0 \Rightarrow \frac{d\chi}{dk} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} v_{ф} &= \frac{v_{\varepsilon\mu}}{\sqrt{1-\left(\frac{f_{cr}}{f}\right)^2}} = \frac{v_{\varepsilon\mu}}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2}} \\ v_{гр} &= v_{\varepsilon\mu}\sqrt{1-\left(\frac{f_{cr}}{f}\right)^2} = v_{\varepsilon\mu}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{v_{ф} v_{гр} = v_{\varepsilon\mu}^2}$$

f_{cr} - критична частота; λ_{cr} - критична довжина ххвилі

Фазова та групова швидкості у лініях передач



Залежності фазової та групової швидкостей від частоти при $\chi^2 = const > 0.$

Фазова та групова швидкості у лініях передач

На високих частотах фазова та групова швидкості близькі до швидкості світла у середовищі, яким заповнено хвилевід. При зменшенні частоти фазова швидкість хвилі в хвилеводі збільшується, а групова – зменшується, прямуючи відповідно до нескінченності та нуля по мірі наближення частоти до критичної.

Якщо частота менша за критичну, то стала поширення стає уявною величиною. У цьому випадку у хвилеводі існують не хвилі, а коливання, фаза яких залишається постійною, а амплітуда експоненційно зменшується при збільшенні координати z. Таким чином, при $f < f_{cr} \left(\lambda > \lambda_{cr}\right)$ електромагнітні хвилі у хвилеводі поширюватись не можуть. Це явище називають **відсіканням**. Режим роботи хвилеводу при $f < f_{cr} \left(\lambda > \lambda_{cr}\right)$ називають **позамежним.**

Фазова та групова швидкості у лініях передач

3) $\chi^2 < 0 \Rightarrow \chi = i\tau,\ \tau = \sqrt{\left|\chi^2\right|} \Rightarrow$

$$v_\phi = \frac{v_{\varepsilon\mu}}{\sqrt{1 - \dfrac{\tau^2}{k^2}}}, \quad v_{гр} = \frac{v_{\varepsilon\mu}\sqrt{1 - \dfrac{\tau^2}{k^2}}}{1 + \dfrac{\tau}{k}\dfrac{d\tau}{dk}} \Rightarrow \boxed{v_\phi v_{гр} \neq v_{\varepsilon\mu}^2.}$$