Електродинаміка, пристрої НВЧ та антенна техніка

Плоскі хвилі
у різних середовищах

Загальні положення

Для вільних (існують без джерел, тобто сторонній струм $\dot{\vec{j}}_m^{st} = 0$) плоских однорідних електромагнітних хвиль, які змінюються у часі за гармонічним законом, комплексні амплітуди $\dot{\vec{E}}_m$, $\dot{\vec{H}}_m$ задовольняють однорідним рівнянням Гельмгольца:

$$\begin{aligned} &\nabla^2 \dot{\vec{E}}_m + k^2 \dot{\vec{E}}_m = 0, \\ &\nabla^2 \dot{\vec{H}}_m + k^2 \dot{\vec{H}}_m = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

де $k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}$ – хвилеве число середовища, у якому поширюється хвиля.

Формально можна розв'язати будь-яке з цих рівнянь відносно одного з векторів поля, а потім, скориставшись відповідним рівнянням Максвела, знайти значення другого вектора. На практиці частіше віддають перевагу пошуку розв'язку відносно вектора електричного поля, що і буде використано далі.

Загальні положення

Нехай розглядається вільне (тобто існує без джерел, $\dot{\vec{j}}_m^{st} = 0$) гармонічне електромагнітне поле, яке *змінюється у просторі лише уздовж вісі* z *(тобто* $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$*).* У цьому випадку вираз (1) для електричного вектора набуває вигляду:

$$\frac{d^2 \dot{\vec{E}}_m}{dz^2} + k^2 \dot{\vec{E}}_m = 0.$$

Будь-яка з проекцій цього рівняння на вісі декартової системи координат має вигляд одновимірного рівняння Гельмгольца $\frac{d^2 \dot{u}_m}{dz^2} + k^2 \dot{u}_m = 0$ (див. попередню лекцію), тому просторові компоненти комплексної амплітуди вектора $\dot{\vec{E}}_m$ можна записати як $\dot{u}_m = \dot{P}e^{-ikz} + \dot{Q}e^{ikz}$.

Який характер цього електромагнітного поля ?

Загальні положення

Для цього розпишемо два перших рівняння Максвела по проекціях у декартовій системі координат, врахувавши при цьому умови вихідної задачі: $\dot{\vec{j}}_m^{st} = 0$, $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$. Маємо таку систему рівнянь:

$$\frac{d\dot{H}_{my}}{dz} = -i\,\omega\varepsilon_0\,\varepsilon\dot{E}_{mx}, \qquad \frac{d\dot{E}_{my}}{dz} = i\,\omega\mu_0\,\mu\dot{H}_{mx},$$

$$\frac{d\dot{H}_{mx}}{dz} = i\,\omega\varepsilon_0\,\varepsilon\dot{E}_{my}, \qquad \frac{d\dot{E}_{mx}}{dz} = -i\,\omega\mu_0\,\mu\dot{H}_{my},$$

$$\dot{H}_{mz} = 0, \qquad \dot{E}_{mz} = 0.$$

Що звідси вже випливає?

1) В обох векторів відсутні поздовжні складові: $\dot{E}_{mz} = 0$, $\dot{H}_{mz} = 0$.

Коментар: складову вектора називають *поздовжньою*, якщо вона відповідає проекції вектора на вісь, уздовж якої поширюється електромагнітна хвиля (вісь z у цій задачі). Інакше це *поперечна складова* (у даній задачі це проекції на вісі x, y).

2) Пари проекцій E_{mx}, H_{my} та E_{my}, H_{mx} незалежні.

Загальні положення

З п.2 випливає, що ця система розпадається на дві незалежні системи, кожна з яких має свій розв'язок, а саме:

Перший розв'язок:

$$\dot{\vec{E}}_{m1} = \vec{x}_0\left(\dot{A}e^{-ikz} + \dot{B}e^{ikz}\right), \quad \dot{\vec{H}}_{m1} = \frac{i}{\omega\mu_0\mu}\frac{d\dot{E}_{mx}}{dz} = \vec{y}_0\frac{1}{W}\left(\dot{A}e^{-ikz} - \dot{B}e^{ikz}\right), \tag{2}$$

де $\dot{A}, \dot{B}$ – довільні комплексні константи;

$$W = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = \sqrt{\frac{\mu_o\mu}{\varepsilon_0\varepsilon}} = \left[W_0 = \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_0}} = 120\pi \text{ Ом}\right] = W_0\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}.$$

Величина $W_0 = \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_0}} = 120\pi \text{ Ом} \approx 377 \text{ Ом}$ має назву «хвилевий опір вакууму».

Другий розв'язок:

$$\dot{\vec{E}}_{m2} = \vec{y}_0\left(\dot{C}e^{-ikz} + \dot{D}e^{ikz}\right), \quad \dot{\vec{H}}_{m2} = \frac{-i}{\omega\mu_0\mu}\frac{d\dot{E}_{my}}{dz} = -\vec{x}_0\frac{1}{W}\left(\dot{C}e^{-ikz} - \dot{D}e^{ikz}\right). \tag{3}$$

Хвилі в ідеальному діелектрику

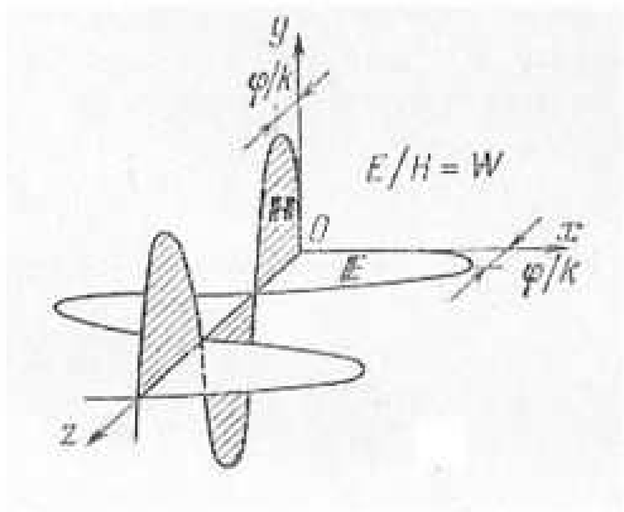
У цьому випадку проникності ε, μ – дійсні.

Взявши один з розв’язків (при $\dot{A}$ чи $\dot{B} = 0$), та перейшовши від комплексних амплітуд до векторів поля $\vec{E}, \vec{H}$, отримаємо:

$$\vec{E} = \vec{x}_0 A \cos(\omega t - kz + \varphi),$$

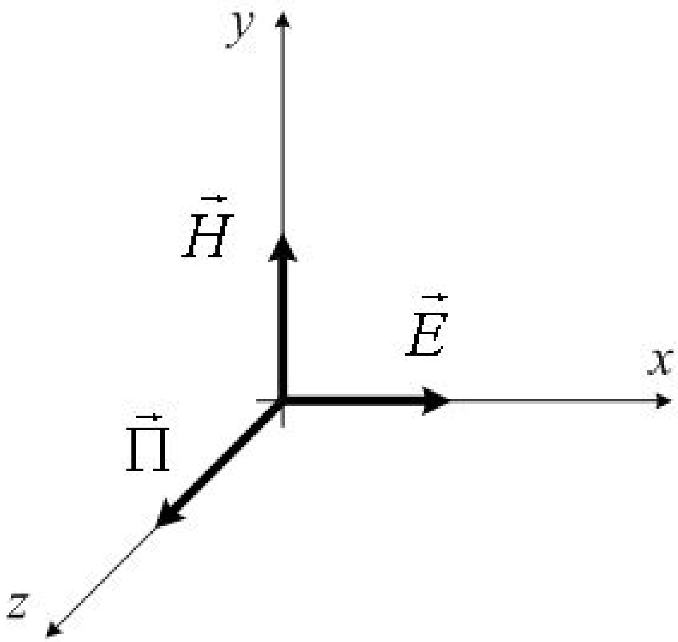
$$\vec{H} = y_0 \frac{A}{W} \cos(\omega t - kz + \varphi).$$

Це плоска однорідна гармонічна хвиля, яка поширюється уздовж вісі z. На рисунку показано «миттєвий знімок» розподілу поля цієї хвилі.



Хвилі в ідеальному діелектрику

Напруженості поля $\vec{E}, \vec{H}$ взаємно перпендикулярні та лежать у площині фронту $z = const$, а вектор Пойнтінга $\vec{\Pi} = \left[\vec{E}, \vec{H}\right]$ спрямовано у сторону поширення хвилі (рисунок).



Вектори $\vec{E}$, $\vec{H}$ та $\vec{\Pi}$ утворюють праву трійку векторів, при цьому:

$$\vec{E} = W\left[\vec{H}, \vec{z}_0\right], \quad \vec{H} = \frac{1}{W}\left[\vec{z}_0, \vec{E}\right].$$

Хвилі в ідеальному діелектрику

Обчислимо енергетичні характеристики цієї хвилі. Використовуючи вирази для густин електричної та магнітної енергії (див. попередні лекції), отримаємо:

$$w^E = w^M = \frac{w}{2} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{A^2}{2}\cos^2\left(\omega t - kz + \varphi\right).$$

Вектор Пойнтінга:

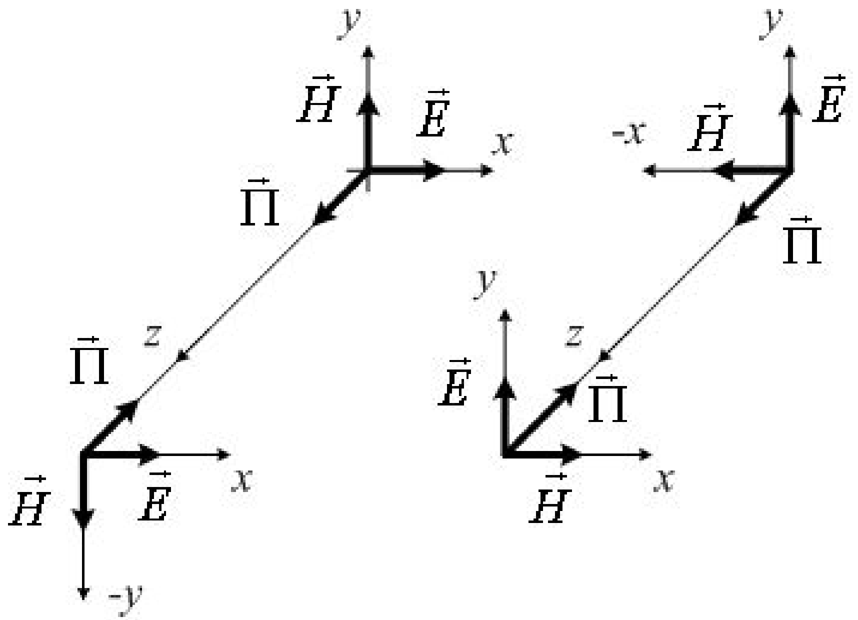
$$\vec{\Pi} = \left[\vec{E}, \vec{H}\right] = \vec{z}_0 \frac{A^2}{W}\cos^2\left(\omega t - kz + \varphi\right).$$

Комплексний вектор Пойнтінга при цьому $\dot{\vec{\Pi}}$ – величина суто дійсна, оскільки вектори $\vec{E}$ та $\vec{H}$ перебувають у фазі. Тому його середнє значення

$$\left\langle \dot{\vec{\Pi}} \right\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\dot{\vec{E}}_m, \dot{\vec{H}}_m^*\right] = \vec{z}_0 \frac{A^2}{2W} = \frac{1}{2}\vec{z}_0 \Pi_{\max}.$$

Хвилі в ідеальному діелектрику

Всі чотири хвилі, які можна отримати, розглядаючи розв'язки (2) при $\dot{B}=0\ \left(\dot{A}\neq 0\right)$ і $\dot{A}=0\ \left(\dot{B}\neq 0\right)$ і (3) при $\dot{D}=0\ \left(\dot{C}\neq 0\right)$ і $\dot{C}=0\ \left(\dot{D}\neq 0\right)$, описують одне і те ж саме електромагнітне поле при різних просторових орієнтаціях його векторів, що схематично показано на рисунку.



Другий та третій розв'язки переходять один в одного при повороті відносно вісі z на 90^0.

Хвилі у поглинаючих середовищах

У цьому випадку проникності ε, μ – є комплексними, тому і хвилевий опір W є комплексним.

Враховуючи те, що $\dot{\varepsilon} = \varepsilon' - i\varepsilon'', \dot{\mu} = \mu' - i\mu''$, перепишемо хвилеве число:

$$\dot{k} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\dot{\varepsilon}\dot{\mu}} = \omega\sqrt{\dot{\varepsilon}_a\dot{\mu}_a} = k' - ik'' = \pm|k|\exp\left(-i\frac{\delta + \delta^M}{2}\right), \qquad (4)$$

де $|k| = \frac{\omega}{c}\sqrt{|\dot{\varepsilon}| \cdot |\dot{\mu}|}$.

Для поглинаючих середовищ $\varepsilon'' \geq 0$ і $\mu'' \geq 0$, причому хоча б одна з них відмінна від нуля. Дійсні частини ε' і μ' вважатимемо додатними. Тоді кути δ, δ^M лежатимуть у межах $0...90^0$. Те ж саме можна сказати про їхню півсуму у (4). Звідси легко переконатись, що k' і k'' теж одного знаку, у подальшому вважатимемо $k' > 0$ і $k'' > 0$.

Розглянемо тепер частинний розв'язок (2) з урахуванням сказаного:

$$\dot{\vec{E}}_{m1} = \vec{x}_0\dot{A}e^{-ikz}, \quad \dot{\vec{H}}_{m1} = \vec{y}_0\frac{1}{\dot{W}}\dot{A}e^{-ikz}. \qquad (5)$$

Хвилі у поглинаючих середовищах

Нагадаємо, що тепер тут хвилевий опір величина комплексна: $\dot{W} = |\dot{W}| \exp(i\varphi_W)$.

Очевидно, що

$$\dot{\vec{E}}_m = \dot{W}\left[\dot{\vec{H}}_m, \vec{z}_0\right], \quad \dot{\vec{H}}_m = \frac{1}{\dot{W}}\left[\vec{z}_0, \dot{\vec{E}}_m\right].$$

Здійснюючи у (5) перехід від комплексних величин до миттєвих значень векторів поля, отримаємо:

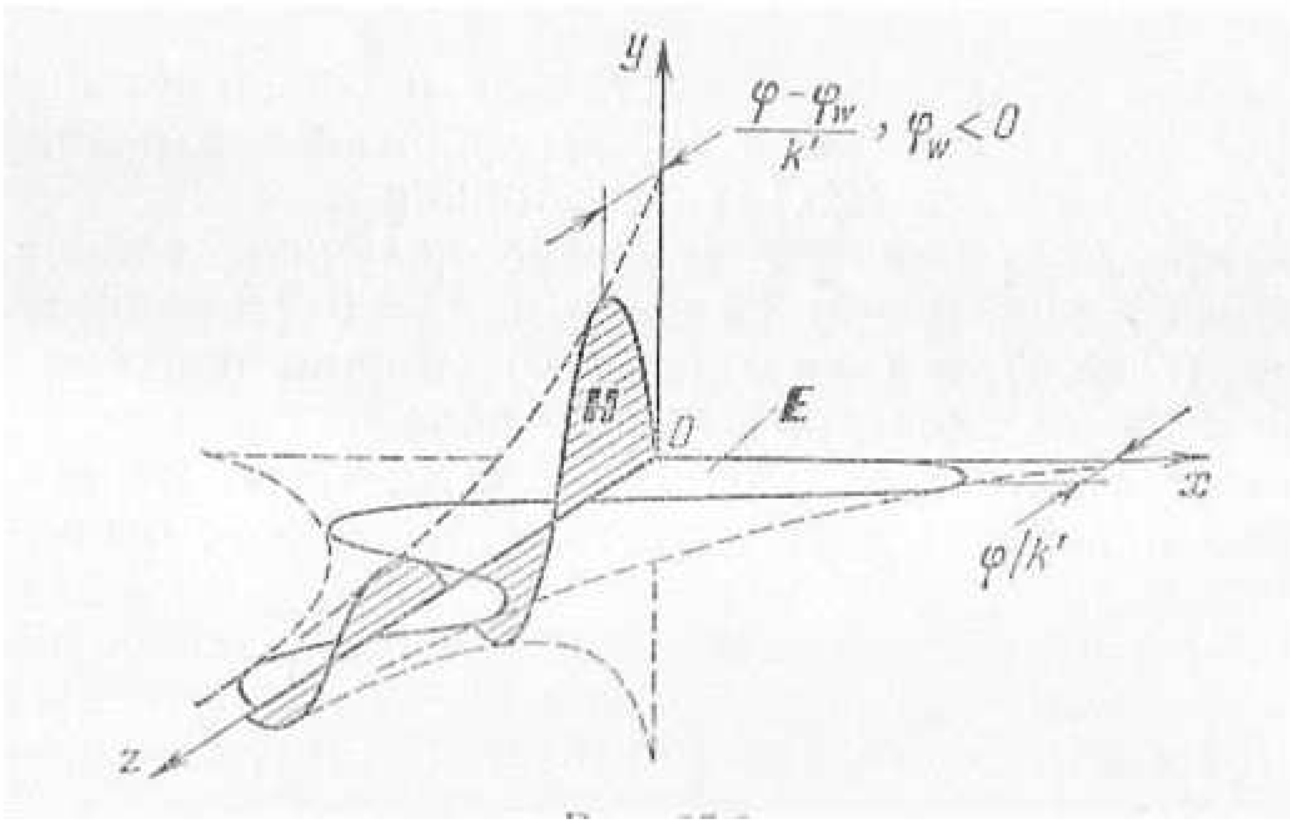
$$\vec{E} = \vec{x}_0 A e^{-k''z} \cos(\omega t - k'z + \varphi),$$

$$\vec{H} = y_0 \frac{A}{|\dot{W}|} e^{-k''z} \cos(\omega t - k'z + \varphi - \varphi_W).$$

Це затухаюча хвиля, яка поширюється уздовж вісі z.

Хвилі у поглинаючих середовищах

На рисунку показано «миттєвий знімок» розподілу поля цієї хвилі.



На відміну від попереднього випадку (ідеальний, тобто непоглинаючий діелектрик), напруженості полів $\vec{E}$ та $\vec{H}$ тепер несинфазні.

Хвилі у поглинаючих середовищах

Середнє значення вектора Пойнтінга тепер

$$\left\langle \dot{\vec{\Pi}} \right\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\dot{\vec{E}}_m, \dot{\vec{H}}_m^*\right] = \vec{z}_0 \frac{A^2}{2\left|\dot{W}\right|} \exp\left(-2k''z\right)\cos\varphi_W.$$

Виділивши дійсну та уявну частини комплексного числа (у випадку відсутності магнітних втрат $\mu'' = 0$), маємо:

$$k' = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon'\mu'}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + tg^2\delta}\right)},$$

$$k'' = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon'\mu'}\sqrt{\frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + tg^2\delta}\right)}.$$

Якщо хвиля поширюється у діелектрику ($tg\delta << 1$), то комплексне хвилеве число зручно розкласти в ряд:

$$k' = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon'\mu'\left(1 - i\,tg\delta\right)} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon'\mu'}\left(1 - i\frac{tg\delta}{2} + \frac{tg^2\delta}{8} + i\frac{tg^3\delta}{16} + \ldots\right).$$

Хвилі у поглинаючих середовищах

У більшості випадків вищими степенями розкладу тангенса кута втрат можна знехтувати, звідки:

$$k' \approx \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon'\mu},$$

$$k'' \approx k'\frac{tg\delta}{2} = \frac{\sigma}{2}W_0\sqrt{\frac{\mu'}{\varepsilon'}}.$$

Таким чином, фазова швидкість та довжина хвилі залежать лише від k':

$$k' = \frac{\omega}{v_ф} = \frac{2\pi}{\lambda},$$

та не набувають суттєвих змін при переході від ідеального діелектрика до реального, а коефіцієнт втрат k'' можна вважати пропорційним до тангеса кута діелектричних втрат, який доволі малий.

Хвилевий опір для діелектрика з втратами:

$$\dot{W} = W_0\sqrt{\frac{\mu'}{\varepsilon'(1 - i\,tg\delta)}} \approx W_0\sqrt{\frac{\mu'}{\varepsilon'}}\left(1 + i\frac{tg\delta}{2}\right).$$

Хвилі у провідниках

Для провідника $tg\delta >> 1$, звідки комплексне хвилеве число:

$$\dot{k} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon'\mu'(1 - itg\delta)} \approx \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon'\mu'}\sqrt{-itg\delta} = (1-i)\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon'\mu'}\sqrt{\frac{tg\delta}{2}},$$

звідки

$$\left.\begin{matrix} k' \\ k'' \end{matrix}\right\} \approx \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon'\mu'}\sqrt{\frac{tg\delta}{2}} = \sqrt{\frac{\omega\mu_0\mu\sigma}{2}} = \frac{1}{\Delta_{sk}},$$

де Δ_{sk} – товщина скін-шару.

Оскільки тут залежність k' від частоти нелінійна, то від частоти буде залежати і фазова швидкість. Зі збільшенням провідності σ фазова швидкість і довжина хвилі у провіднику зменшуються, а затухання збільшується. У металах затухання набагато більше, ніж у діелектриках. Коефіцієнт затухання при переході до ідеального діелектрика ($\sigma \to \infty$) необмежено збільшується, а це значить, що «повне затухання» процеса має відбуватись на будь-якій кінцевій відстані. Звідси випливає, що в ідеальному діелектрику електромагнітне поле існувати не може.