

Електродинаміка, пристрої НВЧ та антенна техніка

Плоскі однорідні хвилі

Загальні положення

Під **поширенням хвилі** розуміють поступове втягування середовища у деякий фізичний процес, що спричиняє передачу енергії у просторі.



$u(\vec{r}', t) = \varphi(t)$ – деякий фізичний процес у точці $P(\vec{r}')$;

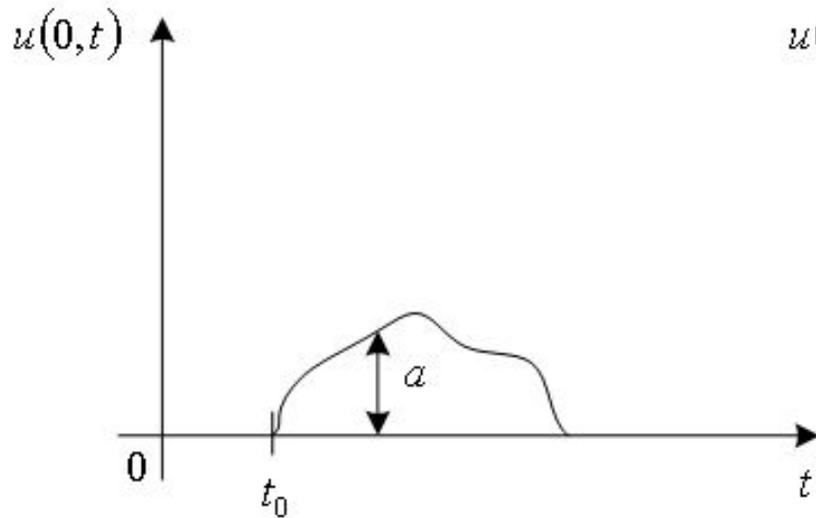
$u(\vec{r}, t) = \psi(t)$ – цей самий процес у точці $M(\vec{r})$.

У найпростішому випадку помітимо лише запізнення $\psi(t) = \varphi(t - \tau)$, де τ – час, потрібний для проходження відстані $|\vec{r} - \vec{r}'| = l$ зі швидкістю v .

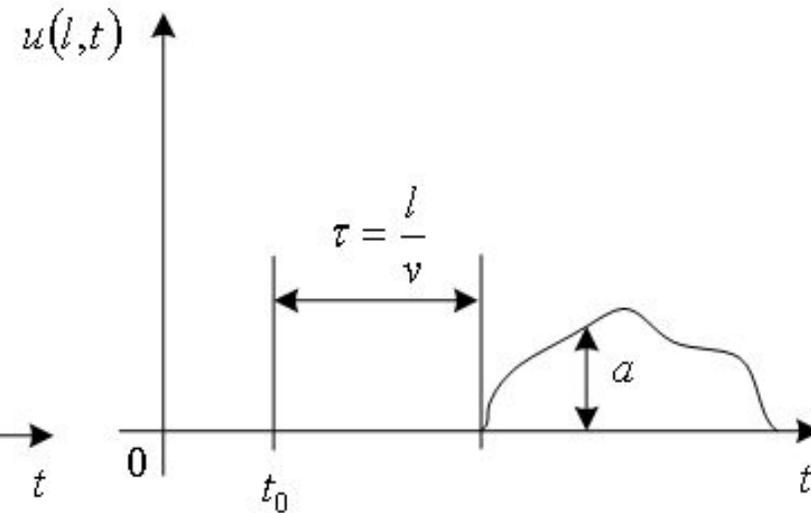
Загальні положення

Якщо у просторі існує залежність лише від координати z , а описання цього процесу у вигляді функції

$$u(z,t) = u\left(t - \frac{z}{v}\right). \quad (1)$$



Побудова при $z = 0$



Побудова при $z = l$

Загальні положення

Кажуть, що **функція (1) описує хвилю**. Таку хвилю називають **плоскою та однорідною**. Поклавши $z = const$, ми задаємо площину, на якій згідно з (1), миттєве значення функції u постійне. Таку площину називають фронт хвилі. Взявши “відлік” $u = a$, видно, що з часом він рухається.

Плоску однорідну хвилю, яка рухається у протилежному напрямі, записують так:

$$u(z,t) = u\left(t + \frac{z}{v}\right).$$

Однорідне хвильове рівняння

$$\nabla^2 u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

у декартовій системі координат, для процесів, що не залежать від x, y набуває вигляду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Загальні положення

Йому задовольняють **обидві (!)** функції $u(z,t) = u\left(t + \frac{z}{v}\right)$. Тоді розв'язок цього рівняння описує вираз:

$$u(z,t) = u_1\left(t - \frac{z}{v}\right) + u_2\left(t + \frac{z}{v}\right),$$

де $u_{1,2}$ – довільні, двічі диференційовані функції.

Фізично – це накладання двох **плоских однорідних хвиль**, які рухаються у протилежних напрямках.

Пояснення:

Плоска – тому що у кожній точці площини $z = const$ фаза процесу u стала.

Однорідна – тому що у цій само площині стала амплітуда.

Плоскі однорідні гармонічні хвилі

Якщо $u(z,t)$ така, що $u(z,t) = u_m \cos(\omega t + \varphi)$, то в кожній точці простору процес буде мати характер гармонічних коливань:

$$u(z,t) = u_m \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) + \varphi \right],$$

або

$$u(z,t) = u_m \cos(\omega t - kz + \varphi),$$

де $k = \frac{\omega}{v}$ – **хвильове число**;

λ – **довжина хвилі**, тобто та просторова відстань, на якій фаза коливання змінюється на 2π . Тому для довільного z маємо $u(z,t) = u(z + \lambda, t) \Rightarrow k\lambda = 2\pi$, тобто:

$$k = \frac{\omega}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} = \left[\lambda = \frac{c}{f} \right] = \lambda f,$$

де $f = \frac{\omega}{2\pi}$ – **частота процесу**, v – **фазова швидкість**.

Плоскі однорідні гармонічні хвилі

Плоска однорідна гармонічна хвиля виражається одним з частинних розв'язків одновимірного хвильового рівняння, яке для методу комплексних амплітуд виглядатиме так:

$$\frac{d^2 i_m}{dt^2} + k^2 i_m = 0.$$

Це одновимірна форма рівняння Гельмгольца, загальний розв'язок якого:

$$i_m = \dot{P}e^{-ikz} + \dot{Q}e^{ikz},$$

де $\dot{P} = Pe^{i\varphi}$, $\dot{Q} = Qe^{i\psi}$ – комплексні константи.

Звідси

$$u(z,t) = \operatorname{Re}(i_m e^{i\omega t}) = P \cos(\omega t - kz + \varphi) + Q \cos(\omega t + kz + \psi),$$

що є накладанням двох гармонічних хвиль, які рухаються у протилежних напрямках(!).

Кожну з цих хвиль називають біжучою.

Частинний випадок: **якщо $P = Q$, $\varphi = \psi$, то такий результат**

$$u(z,t) = 2P \cos kz \cdot \cos(\omega t + \varphi),$$

називають стояча хвиля.

Плоскі однорідні гармонічні хвилі

Якщо хвиля поширюється у середовищі з втратами, то в одновимірній формі рівняння Гельмгольца $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\hat{\epsilon}\hat{\mu}} = \omega \sqrt{\hat{\epsilon}_a \hat{\mu}_a} = k' - ik''$ – **комплексне хвильове число** (комплексна стала поширення), k' – коефіцієнт фази, k'' – коефіцієнт послаблення:

$$u(z, t) = Pe^{-k''z} \cos(\omega t - k'z + \varphi) + Qe^{k''z} \cos(\omega t + k'z + \psi).$$

Коефіцієнт фази k' характеризує зміну фази гармонічних коливань при поширенні хвилі, а коефіцієнт послаблення k'' – характеризує затухання хвилі.

Затухання:

$$L = \begin{cases} k''l, \text{ Нп} \\ 20 \lg e^{k''l} \approx 8,69 k''l \text{ дБ} \end{cases}$$

Хвиля залишиться однорідною і в тому випадку, якщо амплітуда u_m буде залежати від z : $u_m = u_m(z)$. **Але** хвиля

$$u(x, y, z, t) = u_m(x, y) \cos(\omega t - kz)$$

є плоскою, але неоднорідною: її амплітуда не залишається постійною у площині фронту $z = \text{const}$.

Види хвиль

У ширшому сенсі хвиля

$$u(x, y, z, t) = u_m(x, y) \cos[\omega t - kz + \varphi(x, y)]$$

плоска неоднорідна (комплексна амплітуда $u_m(x, y) = u_m \exp(i\varphi)$ залишається постійною у кожній площині фронту $z = \text{const}$)

В загальному випадку хвиля

$$u(x, y, z, t) = u_m(x, y, z) \cos[\omega t - kz + \varphi(x, y, z)]$$

неплоска і неоднорідна.

Її фазовий фронт, який розуміється як поверхня постійної фази при $t = \text{const}$, визначається рівнянням:

$$\varphi(x, y, z) = \text{const}.$$

Якщо

$$\varphi(x, y, z) = kr + \varphi_0,$$

де r – сферична радіальна координата, $\varphi_0 = \text{const}$, то це буде **сферична хвиля**.

Якщо ж r – циліндрична радіальна координати, то це буде циліндрична хвиля.