Електродинаміка, пристрої НВЧ та антенна техніка

Енергія електромагнітного поля

Енергія електромагнітного поля

1) Електромагнітне поле може віддавати або відбирати енергію.

2) Електромагнітне поле здатне переносити енергію у просторі.

$$\frac{dW}{dt} < 0 \Rightarrow$$ Це зменшення енергії (поглинання, перехід її у теплову енергію, випромінювання, тощо)

$$\frac{dW}{dt} > 0 \Rightarrow$$ Це збільшення енергії (генерування, регенеративні процеси, притік енергії зовні тощо)

Тут W – енергія ЕМП у деякий момент часу, у деякому об’ємі V.

Врахування наявності сторонніх сил

Врахування наявності сторонніх сил робиться такими способами:

$$\vec{j} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{E}_{ст}\right) \quad \text{або} \quad \vec{j} = \sigma\vec{E} + \vec{j}_{ст}$$

Тут $\vec{E}_{ст}$ - напруженість сторонніх сил (стороння напруженість),

$\vec{j}_{ст}$ - густина стороннього струму.

Також у розгляд вводяться:

$p = \vec{j}\vec{E}$ - густина потужності в об’ємі;

$p_{втр} = \vec{j}\vec{E} = \sigma E^2 = \dfrac{j^2}{\sigma}$ - густина потужності втрат.

$P_{втр} = \int\limits_V \vec{j}\vec{E}\,\mathrm{dv} = \int\limits_V \sigma E^2\,\mathrm{dv} = \int\limits_V \dfrac{j^2}{\sigma}\,\mathrm{dv}$ - потужність втрат у деякому об’ємі V (закон Джоуля-Ленца);

Врахування наявності сторонніх сил

$$P_{\tilde{n}\grave{o}} = -\int\limits_V \vec{j}\vec{E}_{\tilde{n}\grave{o}}\,\mathrm{dv}$$ - потужність сторонніх сил у деякому об’ємі V.

або

$$P_{\tilde{n}\grave{o}} = \int\limits_V \vec{j}_{\tilde{n}\grave{o}}\vec{E}\,\mathrm{dv}$$ - потужність сторонніх сил у деякому об’ємі V.

Коментар щодо знака “мінус”: якщо сторонні сили здійснюють роботу “проти сил поля” (тобто відбувається перетворення енергії деякого неелектромагнітного процесу в енергію електромагнітного поля), то величини Рст від’ємні.

Якщо є область V з границею S, а на її поверхні (чи на її частині) діють сторонні сили, то формалізація цього у рівняннях Максвела така:

$$\vec{E}_\tau = \vec{E}_{\tilde{n}\grave{o}} \text{ íà } S$$

Рівняння балансу енергії (теорема Пойнтінга у диференціальній формі)

Друге рівняння Максвела домножують на вектор Н: $\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \,|\, \vec{H}$

Перше рівняння Максвела домножують на вектор Е: $\mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \,|\, \vec{E}$

Від першого добутку віднімають другий, причому використовують при цьому тотожність:

$$\mathrm{div}\left[\vec{A}, \vec{B}\right] = \vec{B}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} - \vec{A}\,\mathrm{rot}\,\vec{B}$$

Результат:

$$\vec{H}\,\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\vec{H}\,\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$-$$

$$\vec{E}\,\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{E}\,\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}\vec{E}$$

$$\boxed{\mathrm{div}\left[\vec{E}, \vec{H}\right] = -\vec{E}\,\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{H}\,\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{j}\vec{E}} \qquad (1)$$

Рівняння балансу енергії (теорема Пойнтінга в інтегральній формі)

Вибираючи деяку замкнену поверхню *S*, інтегруємо (1) по об'єму *V*, обмеженому цією поверхнею *S* та використовуючи теорему Остроградського-Гауса

$$\int_V \operatorname{div}\vec{F}\,\mathrm{dv} = \oint_S \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{s},$$

отримаємо:

$$\boxed{\oint_S \left[\vec{E},\vec{H}\right]\mathrm{d}\vec{s} = -\int_V \left(\vec{E}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)\mathrm{dv} - \int_V \vec{j}\vec{E}\,\mathrm{dv}} \qquad (2)$$

Зміст отриманого результату доцільно розпочати з останнього члена виразу (2).

Враховуючи попередні вирази: $\vec{j} = \sigma\vec{E} + \vec{j}_{\text{ñò}}$, $P_{\text{âòð}} = \int_V \vec{j}\vec{E}\mathrm{dv}$ отримаємо, що

$$\boxed{\int_V \vec{j}\vec{E}\,\mathrm{dv}} = P = P_{\text{âòð}} + P_{\text{ñò}}$$

- це повна потужність, тобто всі процеси перетворення енергії в об'ємі *V* пов'язано зі струмом провідності (при j=0 перетворення енергії відсутнє)

Рівняння балансу енергії (теорема Пойнтінга в інтегральній формі)

У частинному випадку, коли область V енергетично ізольовано:

$$P = -\frac{dW}{dt}, \qquad (3)$$

де W – запас енергії ЕМП в об’ємі V.

За енергетичної ізоляції поле не проникає за межі області V, тому поверхневий інтеграл в (2) дорівнює нулю. Звідси:

$$P = -\int_V \left(\vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \mathrm{dv} \qquad (4)$$

Порівнюючи вирази (3) та (4), отримаємо:

$$\boxed{\int_V \left(\vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \mathrm{dv} = \frac{dW}{dt}}$$

Тобто другий член у (2) – це похідна за часом запасу енергії в об’ємі.

Рівняння балансу енергії (теорема Пойнтінга в інтегральній формі)

Остаточно маємо:

$$P_{\Sigma} + \frac{dW}{dt} + P = 0,$$

де $P_{\Sigma} = \oint\limits_{S} \left[\vec{E}, \vec{H}\right] \mathrm{d}\vec{s} = \oint\limits_{S} \ddot{\vec{I}}\ \mathrm{d}\vec{s}$ - потік вектора Пойнтінга

$$\ddot{\vec{I}} = \left[\vec{E}, \vec{H}\right]$$

- **вектор Пойнтінга**

Потік вектора Пойнтінга та баланс енергії

Якщо $\vec{Ï} \neq 0 \left(\text{òîáòî} \;\; P_{\Sigma} \neq 0 \right)$ то має місце енергетичний контакт області

V з навколишнім простором через границю S.

Можливі типи балансу енергії поля:

$$\boxed{\frac{dW}{dt} + P < 0 \Rightarrow P_{\Sigma} > 0}$$

- активний баланс

$$\boxed{\frac{dW}{dt} + P = 0 \Rightarrow P_{\Sigma} = 0}$$

- нейтральний баланс

$$\boxed{\frac{dW}{dt} + P > 0 \Rightarrow P_{\Sigma} < 0}$$

- пасивний баланс

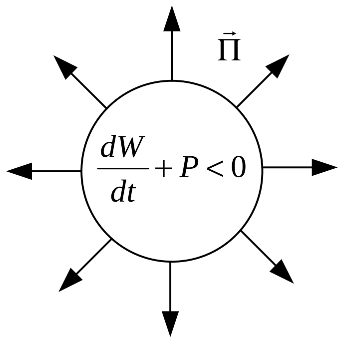
Потік вектора Пойнтінга та баланс енергії

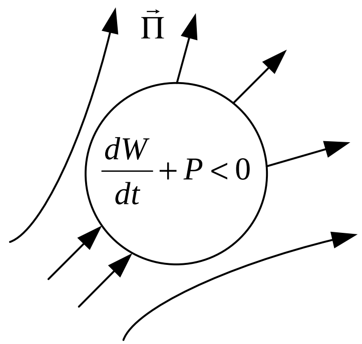
$$\boxed{\frac{dW}{dt} + P < 0 \Rightarrow P_{\Sigma} > 0}$$ **- активний баланс**

Фізична суть: сума швидкості зміни запасу енергії в області dW/dt та повної потужності P від’ємна. Ця від’ємна величина врівноважується додатнім потоком вектора Пойнтінга. Зменшення запасу енергії у V, як і генерування (ці процеси можуть відбуватись одночасно), спричиняють перехід енергії через границю S у зовнішнє середовище, тобто випромінювання.

У цьому випадку потік вектора Пойнтінга дорівнює випромінюваній за одиницю часу енергії (потужність випромінювання).

Найпростіший випадок: dW/dt=0 (запас енергії незмінний) і Pвтр=0 (поглинання відсутнє). Тоді $P_{\Sigma} = -P_{ст}$.

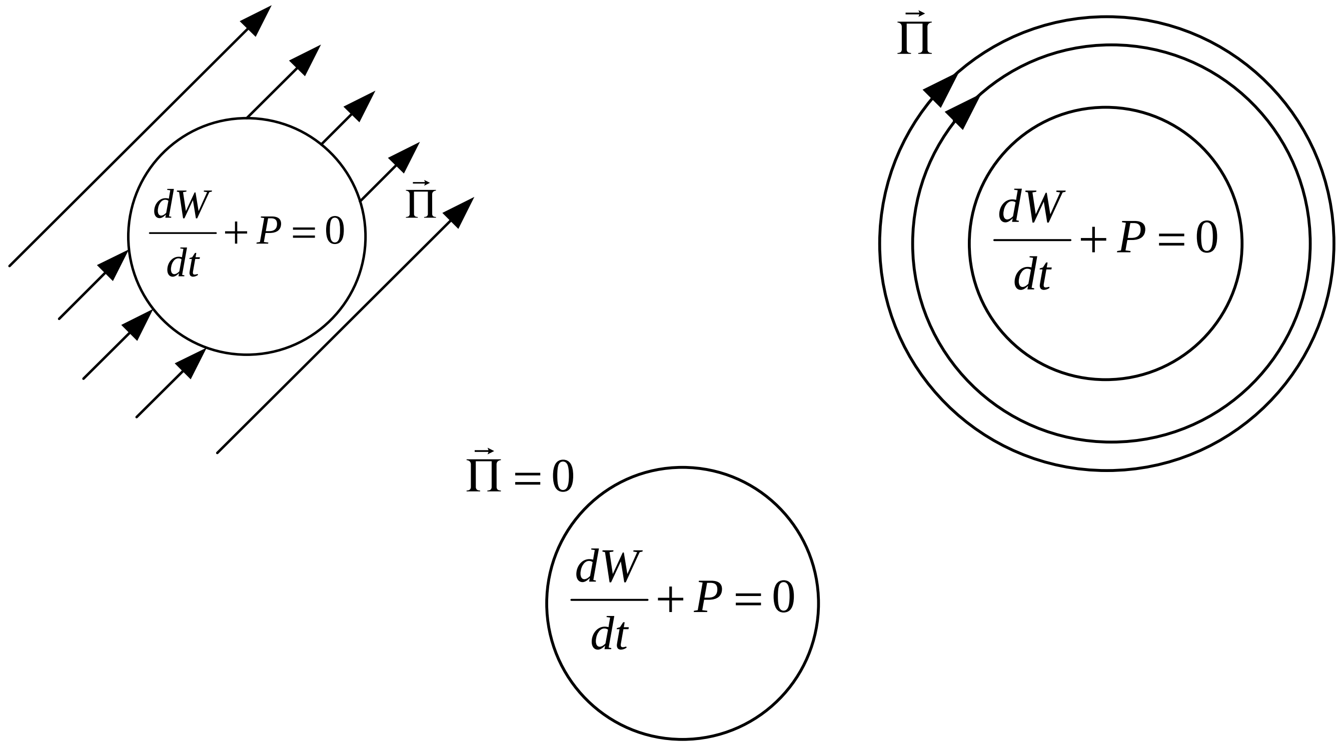




Потік вектора Пойнтінга та баланс енергії

$$\boxed{\frac{dW}{dt} + P = 0 \Rightarrow P_{\Sigma} = 0}$$ **- нейтральний баланс**

Фізична суть: цей випадок необов’язково означає, що область енергетично ізольовано. Цей тип балансу можливий і за відкритої границі.



Потік вектора Пойнтінга та баланс енергії

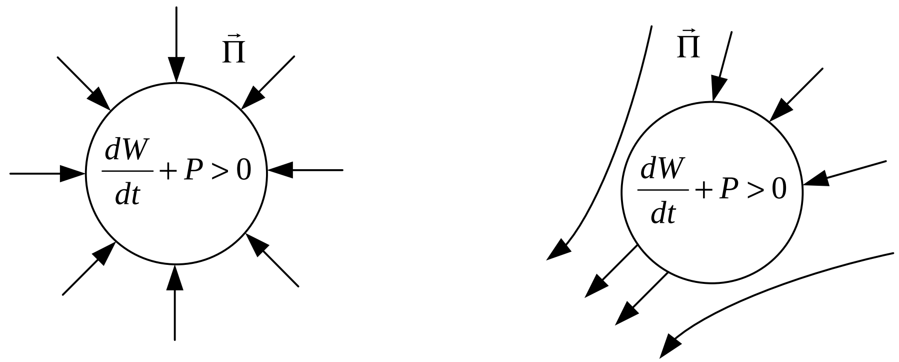
$$\frac{dW}{dt} + P > 0 \Rightarrow P_\Sigma < 0$$

- пасивний баланс

Фізична суть: сума швидкості зміни запасу енергії в області dW/dt та повної потужності P додатня. Ця додатня величина врівноважується від'ємним потоком вектора Пойнтінга. Внутрішні втрати (P>0) і (або) втрати енергії на збільшення її запасу W покриваються притоком енергії зовні. Енергія поглинається через границю S із зовнішнього середовище, тобто це поглинання.

У цьому випадку потік вектора Пойнтінга дорівнює поглинутій за одиницю часу енергії (потужність поглинання).

Найпростіший випадок: dW/dt=0 (запас енергії незмінний) і Рст=0 (поглинання відсутнє). Тоді $P_\Sigma = -P_{\text{âòð}}$.



Потік вектора Пойнтінга та баланс енергії

Потік вектора Пойнтінга дорівнює за абсолютним значенням енергії, що проходить через поверхню S за одиницю часу – це потік енергії.

Якщо значення вектора Пойнтінга додатнє – це віддача енергії, випромінювання.

Якщо значення вектора Пойнтінга від’ємне – це поглинання енергії.

Локалізація енергії електромагнітного поля

Вважаючи, що процеси поляризації та намагнічування безінерційні (тобто відносні діелектрична та магнітна проникності не залежать від часу), а також за відсутності анізотропії, маємо:

$$\vec{E}\,\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}^{\,2}}{2}\right), \quad \vec{H}\,\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu_0 \mu \vec{H}\,\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mu_0 \mu \vec{H}^{\,2}}{2}\right).$$

Інтегруючи ці вирази по деякому об’єму *V*, та винісши при цьому оператор диференціювання за знак інтегралу, отримаємо:

$$W = \frac{1}{2}\int_V \left(\varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}^{\,2} + \mu_0 \mu \vec{H}^{\,2}\right)\mathrm{dv} = \frac{1}{2}\int_V \left(\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}\right)\mathrm{dv}, \qquad (5)$$

де $$w = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}^{\,2} + \mu_0 \mu \vec{H}^{\,2}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}\right) \qquad (6)$$

слід тлумачити як

Локалізація енергії електромагнітного поля

густину енергії ЕМП:

$$w = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta V}.$$

Вирази (5), (6) показують характер розподілу енергії поля у просторі, її локалізацію.

Важливо те, що вираз (5) складається з двох доданків, один з яких залежить лише від магнітного поля, а другий – лише від електричного.

Тому розрізняють електричну енергію:

$$W^{E} = \frac{1}{2}\int_{V} \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}^{2} \mathrm{dv} = \frac{1}{2}\int_{V} \vec{E}\vec{D} \mathrm{dv}$$

та магнітну енергію

$$W^{M} = \frac{1}{2}\int_{V} \mu_0 \mu \vec{H}^{2} \mathrm{dv} = \frac{1}{2}\int_{V} \vec{H}\vec{B} \mathrm{dv}$$

електромагнітного поля.