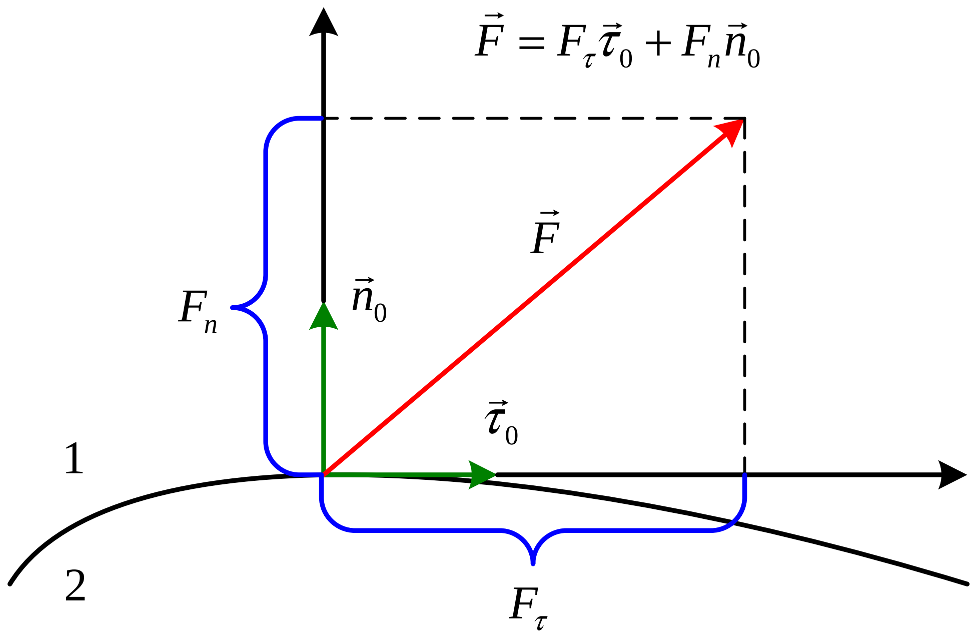
Електродинаміка, пристрої НВЧ та антенна техніка

Поля на границях розподілу середовищ

Загальні відомості

Поверхні фізичних тіл є границями, які розділяють середовища з різними властивостями. За такої ситуації, при переході з одного середовища в інше, властивості полів змінюються, оскільки параметри середовищ змінюються стрибкоподібно.

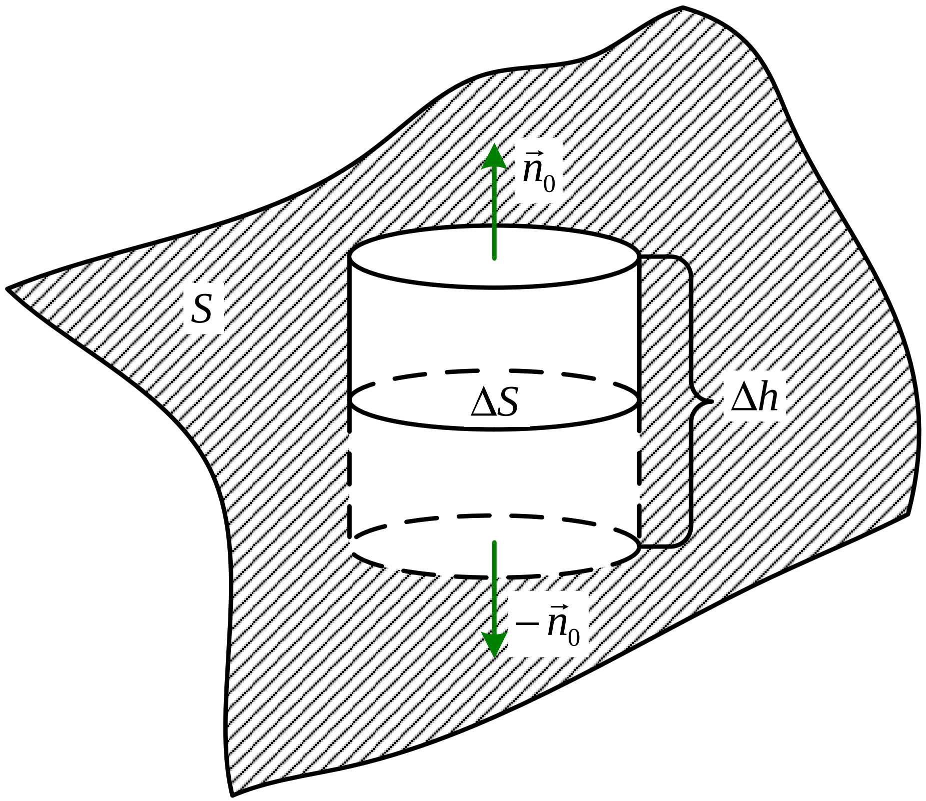
Рівняння Максвелла у диференціальній формі при цьому використати не вдасться. Тому доведеться використати їхні інтегральні аналоги, які за своїм математичним змістом такі, що їх можна засосовувати до областей V з поверхнями S, які містять всередині ці границі, на яких вектори поля мають розрив.



Нормальні компоненти векторів поля, електрична індукція

"Досить малий елемент поверхні *ΔS*" – це такий, що елемент *ΔS* можна вважати елементом площі, а поле в ньому – однорідним (незмінним) уздовж границі в обох середовищах.

Пригадуємо третє рівняння Максвелла: $\oint\limits_S \vec{D}d\vec{s} = \int\limits_V \rho dv$



Геометрія задачі

Нормальні компоненти векторів поля, електрична індукція

Оскільки поле у межах *ΔS* – однорідне, то потік вектора електричної індукції через верхню та нижню основи циліндра – це просто добуток на площу *ΔS* скалярного добутку цього вектора та одиничної нормалі $(\vec{n}_0$ та $-\vec{n}_0)$, зовнішньої до поверхні циліндра. Потік вектора електричної індукції через бокову поверхню циліндра позначимо як F^e_{side}. Таким чином, з третього рівняння Максвелла отримуємо:

$$\vec{D}_1\vec{n}_0\Delta S - \vec{D}_2\vec{n}_0\Delta S + F^e_{side} = \Delta q,$$

де Δq – заряд всередині циліндра.

Тепер зменшуватимемо висоту циліндра *Δh* доти, доки при *Δh→0* основа циліндра співпаде з *ΔS*. При *Δh→0* площа бокової стінки циліндра прямуватиме до нуля також і $F^e_{side} \to 0$.

Якщо припустити існування заряду на самій граничній поверхні і, відповідно до цього, виділити у *Δq* дві частини $\Delta q = \Delta q_V + \Delta q_S$ (заряди в об’ємі та на поверхні), то зникне лише Δq_V. Звідси маємо:

$$\left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right)\vec{n}_0\Delta S = \Delta q.$$

Нормальні компоненти векторів поля, електрична індукція

Ввівши у розгляд густину поверхневого заряду ξ:

$$\boxed{\xi = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S},}$$

і, оскільки поле у граничній області *ΔS* однорідне, величина ξ тут постійна, тому

$\Delta q_S = \xi \cdot \Delta S.$ Звідси

$$\boxed{\left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right)\vec{n}_0 = \xi.}$$

Оскільки $\vec{D}_1\vec{n}_0 = D_{1n}$, $\vec{D}_2\vec{n}_0 = D_{2n}$ – нормальні компоненти вектора електричної індукції при підході до границі зі сторони першого та другого середовищ, то **нормальна компонента вектора електричної індукції має розрив, значення якого дорівнює густині поверхневого заряду ξ.** У частинному випадку ($\xi=0$, тобто на поверхні розподілу відсутній заряд), нормальна компонента вектора електричної індукції неперервна:

$$\left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right)\vec{n}_0 = \xi\Big|_{\xi=0} \Rightarrow \left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right)\vec{n}_0 = 0 \Rightarrow \left(\varepsilon_0\varepsilon_1\vec{E}_1 - \varepsilon_0\varepsilon_2\vec{E}_2\right)\vec{n}_0 = 0 \Rightarrow \boxed{\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}\Big|_{\xi=0}}.$$

і значення стрибка буде пропорційне відношенню $\varepsilon_2/\varepsilon_1$.

Нормальні компоненти векторів поля, магнітна індукція

Для вектора магнітної індукції алгоритм такий само, як і для вектора електричної індукції, але при цьому за основу береться четверте рівняння Максвелла. В результаті маємо:

$$\vec{B}_1\vec{n}_0\Delta S - \vec{B}_2\vec{n}_0\Delta S + F_{side}^m = 0,$$

де F_{side}^m – потік магнітної індукції через бокову поверхню.

Тепер зменшуватимемо висоту циліндра *Δh* доти, доки при *Δh→0* основа циліндра співпаде з *ΔS*. При *Δh→0* площа бокової стінки циліндра прямуватиме до нуля також і $F_{side}^m \to 0$, тому

$$\boxed{\left(\vec{B}_1 - \vec{B}_2\right)\vec{n}_0 = 0.}$$

Оскільки $\vec{B}_1\vec{n}_0 = B_{1n}$, $\vec{B}_2\vec{n}_0 = B_{2n}$ – нормальні компоненти вектора магнітної індукції при підході до границі зі сторони першого та другого середовищ, то **нормальна компонента вектора магнітної індукції завжди неперервна:**

$$\boxed{B_{1n} = B_{2n}} \Rightarrow \mu_0\mu_1\vec{H}_{1n} = \mu_0\mu_2\vec{H}_{2n} \Rightarrow \mu_1\vec{H}_{1n} = \mu_2\vec{H}_{2n}.$$

Нормальні компоненти векторів поля, узагальнений (повний) струм

Тут береться за основу властивість узагальненого струму $\oint_S \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \right) d\vec{s} = 0,$

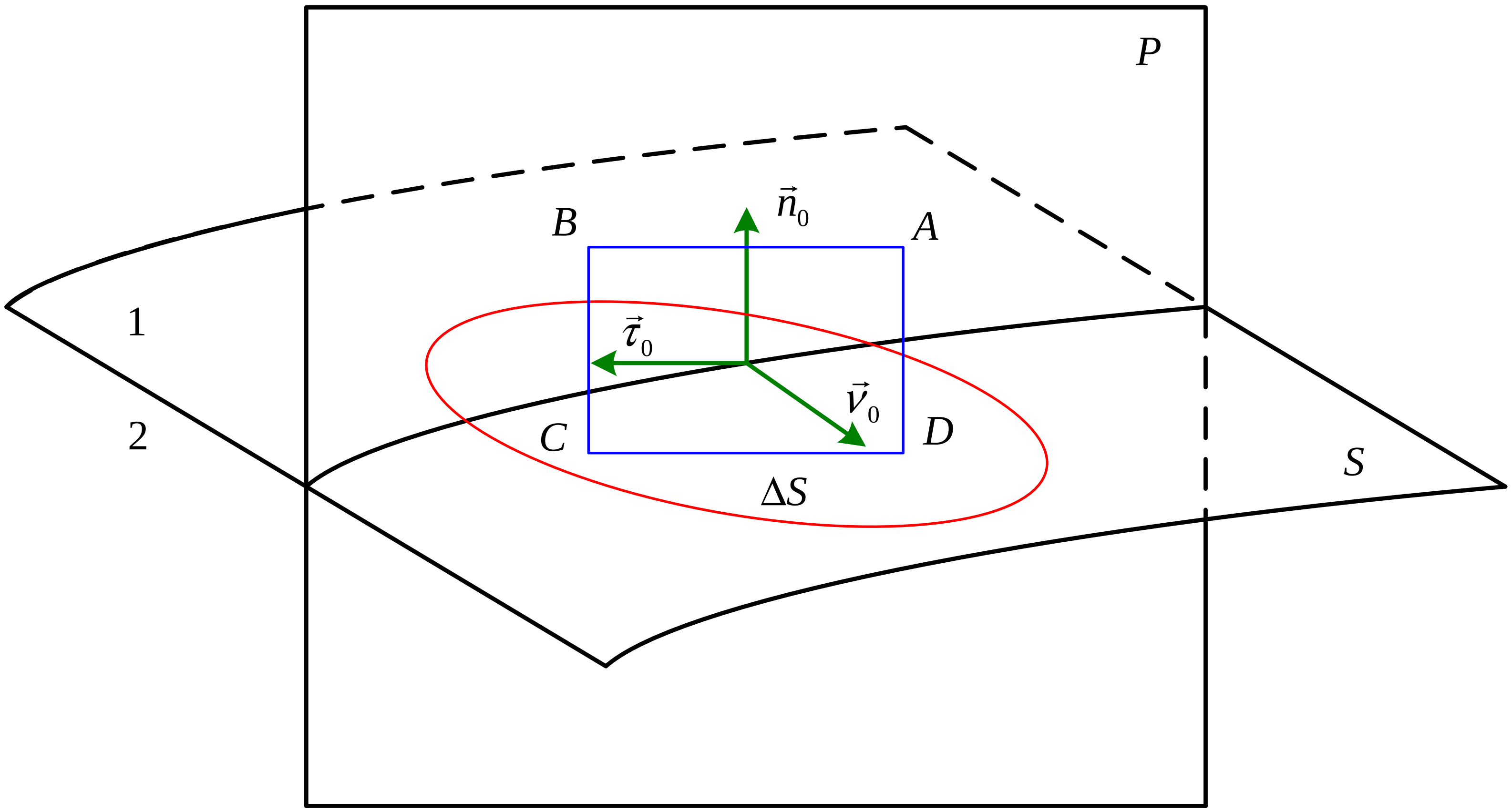
звідки маємо:

$$\left(\frac{\partial \vec{D}_1}{\partial t} + \vec{j}_1 \right) \vec{n}_0 - \left(\frac{\partial \vec{D}_2}{\partial t} + \vec{j}_2 \right) \vec{n}_0 = 0,$$

Нормальна компонента густини узагальненого (повного) струму завжди неперервна на границях розподілу середовищ. У частинному випадку – для стаціонарних процесів $(\partial/\partial t = 0)$, маємо неперервності компоненти густини струму провідності: $j_{1n} = j_{2n}$.

Тангенційні (дотичні) компоненти векторів поля, електричний вектор

Площина P перпендикулярна до площадки ΔS границі S в околі розглядуваної точки. $ABCD$ – прямокутний контур у площині P, який перетинає площину S у межах площадки ΔS, при цьому $AB=CD=\Delta l$, $BC=AD=\Delta h$, а бокова сторона контура паралельна нормалі $\vec{n}_0$. Дотичний орт вибрано так: $\vec{\tau}_0 = [\vec{v}_0, \vec{n}_0]$.



Геометрія задачі

Тангенційні (дотичні) компоненти векторів поля, електричний вектор

Застосувавши до контуру *ABCD* друге рівняння Максвелла $\oint\limits_L \vec{E}d\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int\limits_S \vec{B}d\vec{s}$,

та врахувавши мализну розглядуваної ділянки, отримаємо:

$$\vec{E}_1\vec{\tau}_0\Delta l - \vec{E}_2\vec{\tau}_0\Delta l + C^e_{side} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\vec{v}_0\Delta l\Delta h,$$

У лівій частині цього виразу – це циркуляція електричного вектора по сторонах *AB* та *CD* (два перших доданки), а третій доданок – циркуляція електричного вектора – боковими частинами контура *ABCD*.

Коли $\Delta h \to 0$ то сторони *AB* і *CD* співпадуть на границі, при цьому $C^e_{side} \to 0$,

$-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\vec{v}_0\Delta l\Delta h \to 0,$ в результаті маємо:

$$\boxed{\left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right)\vec{\tau}_0 = 0.}$$

Тангенційні (дотичні) компоненти векторів поля, електричний вектор

Оскільки орієнтація напряму орта $\vec{\tau}_0$ на границі розподілу довільна відносно поля (можна обертати площину P відносно нормалі до площини S), тому можна вважати, що $\vec{\tau}_0$ співпадає з проекцією вектора електричного поля на S за напрямом. Це означає, що величини $\vec{E}_1\vec{\tau}_0 = E_{1\tau}$, $\vec{E}_2\vec{\tau}_0 = E_{2\tau}$ рівні, тобто **тангенційна (дотична) компонента E_τ вектора електричного поля завжди неперервна на границі розподілу середовищ.**

Отриманий результат можна записати в інший спосіб:

$$\left.\begin{aligned} \vec{\tau}_0 &= [\vec{v}_0, \vec{n}_0] \\ (\vec{E}_1 - \vec{E}_2)\vec{\tau}_0 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (\vec{E}_1 - \vec{E}_2)[\vec{v}_0, \vec{n}_0] = [\vec{n}_0, \vec{E}_1 - \vec{E}_2]\vec{v}_0 = 0.$$

Оскільки ця рівність не повинна залежати від напряму вектора $\vec{v}_0$, що враховує орієнтація площини P, відносно поля, то остаточно маємо:

$$\boxed{[\vec{n}_0, \vec{E}_1 - \vec{E}_2] = 0.}$$

Зручність такого варіанта у тому, що вектор нормалі $\vec{n}_0$ є цілком визначеним (для гладких поверхонь) та ніяк не пов’язано з досліджуваним полем.

Тангенційні (дотичні) компоненти векторів поля, магнітний вектор

Для магнітного вектора алгоритм такий само, як і для електричного вектора, але при цьому за основу береться перше рівняння Максвелла

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \int_S \vec{D} d\vec{s} + \int_S \vec{j} d\vec{s}.$$

В результаті маємо:

$$\vec{H}_1 \vec{\tau}_0 \Delta l - \vec{H}_2 \vec{\tau}_0 \Delta l + C_{side}^m = \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \right) \vec{\nu}_0 \Delta l \Delta h,$$

де C_{side}^m – внесок у циркуляцію магнітного вектора бокових сторін контура.

Звідси при обмеженості густини узагальненого струму в результаті граничного переходу $\Delta h \to 0$ ми повинні отримати рівність, схожу на попередню, лише з заміною векторів $\vec{E} \to \vec{H}$. Проте ця умова не виконуватиметься, якщо припустити можливість існування на границі поверхневого струму провідності. Це така ж само макроскопічна абстракція, як і поверхневий заряд (“не займає об’єм”).

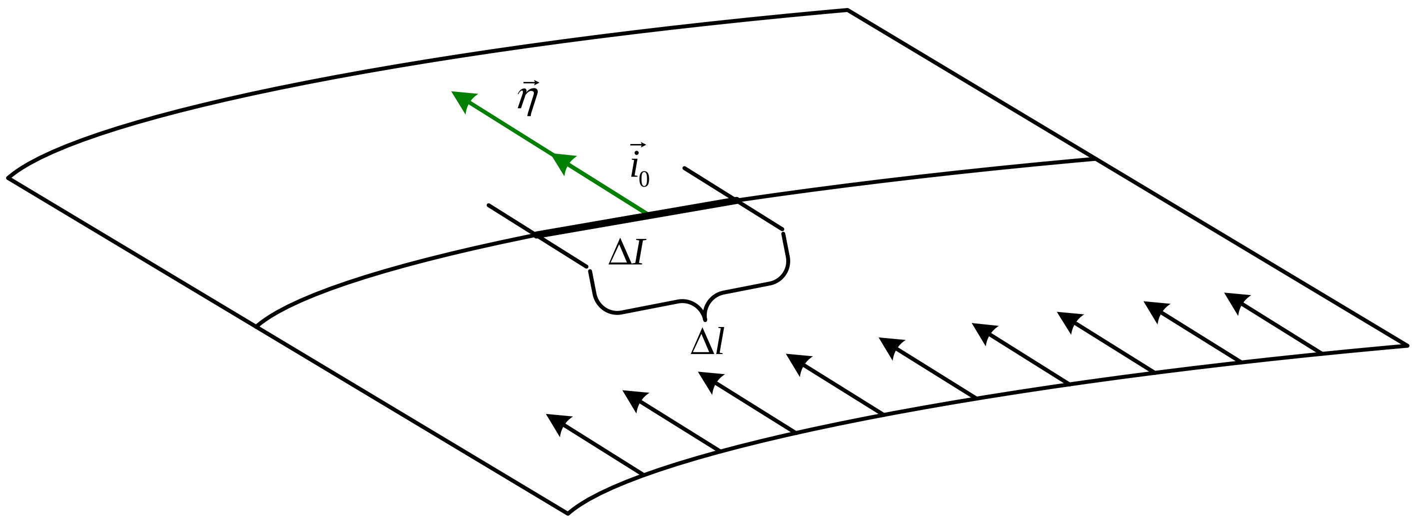
Тангенційні (дотичні) компоненти векторів поля, магнітний вектор

Звідси **густина поверхневого струму провідності**

$$\vec{\eta} = \lim_{\Delta l \to 0} \vec{i}_0 \frac{\Delta I}{\Delta l},$$

де $\vec{i}_0$ – одиничний вектор, що вказує напрям струму;

Δl – елемент лінії, що перетинається струмом ΔI перпендикулярно (рисунок).



До визначення густини поверхневого струму провідності

Тангенційні (дотичні) компоненти векторів поля, магнітний вектор

Струм провідності не є обмеженою функцією у випадку поверхневого струму, а враховуючи те, що за походженням це інтеграл виду

$$\int\limits_{\Delta l \Delta h} j ds = \vec{v}_0 \Delta l \int\limits_{x_1}^{x_2} \vec{j} dx \begin{pmatrix} x_2 - x_1 = \Delta h \\ x = x_0 \text{ на } S,\ x_2 > x_0 > x_1 \end{pmatrix}.$$

Тобто при стягуванні контура *L* до відрізка *Δl* на границі (при *Δh→0*) цей інтеграл не зникне, оскільки через *Δl* проходить весь поверхневий струм. Очевидно, що

$$\vec{v}_0 \Delta l \int\limits_{x_1}^{x_2} \vec{j} dx \to \vec{v}_0 \vec{\eta} \Delta l \Rightarrow \left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2\right) \vec{\tau}_0 = \vec{\eta} \vec{v}_0,$$

або (у зручнішій формі)

$$\boxed{\left[\vec{n}_0, \vec{H}_1 - \vec{H}_2\right] = \vec{\eta}.}$$

Тобто за наявності поверхневого струму на границі розподілу середовищ дотична компонента магнітного вектора має розрив. Вектори $\vec{H}_1 - \vec{H}_2$ та $\vec{\eta}$ перпендикулярні. Якщо ж поверхневий струм відсутній, дотична компонента магнітного вектора є неперервною:

$$\boxed{\vec{H}_{1\tau} = \vec{H}_{2\tau}\Big|_{\vec{\eta}=0}}$$

Граничні умови, підсумок

Граничні умови (за традиціями) – це **ряд співвідношень, яким підпорядковано нормальні та тангенційні складові компоненти векторів поля на границі розподілу середовищ.**

Основні з них:

- для **нормальних компонент**:

$$\left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right)\vec{n}_0 = \xi, \quad \left(\vec{B}_1 - \vec{B}_2\right)\vec{n}_0 = 0;$$

- для **тангенційних компонент**:

$$\left[\vec{n}_0, \vec{E}_1 - \vec{E}_2\right] = 0, \ \left[\vec{n}_0, \vec{H}_1 - \vec{H}_2\right] = \vec{\eta}.$$

Завдяки цим умовам ми володіємо деякою інформацією про характер поля на деякій границі, ще не знаючи самого поля (!), тобто граничні умови універсальні!

Вони потрібні для знаходження розв'язків рівнянь Максвела за наявності різнорідних середовищ. У частинному випадку – змінних полів поблизу поверхні ідеального провідника.

Граничні умови, підсумок, метали з кінцевою провідністю

Змінні поля проникають у матеріал з кінцевою провідністю. Проте, якщо вважати провідник ідеальним, то заряди всередині нього настільки рухливі, що миттєво реагують на будь-які швидкі зміни поля, створюючи на його поверхні густину заряду $\xi = \vec{E}_1 \vec{n}_0$, яка забезпечує нульове електричне поле всередині провідника. Аналогічно, при зміні у часі магнітного поля поверхневі заряди рухаються та створюють поверхневий струм $\vec{\eta} = \left[\vec{n}_0, \vec{H}_1\right]$, завдяки чому магнітне поле всередині провідника відсутнє.

Цю ідеалізацію часто використовують при розгляді поблизу провідних поверхонь, оскільки провідність реальних металів дійсно доволі велика, і припущення, що вона нескінченна, призводить до незначної похибки при визначенні поля у діелектрику.

Таким чином, **поле в ідеально-провідному середовищі відсутнє:**

$$\vec{E}_2 = \vec{D}_2 = \vec{H}_2 = \vec{B}_2 = 0.$$

звідки маємо:

$$\vec{D}_1 \vec{n}_0 = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \vec{E}_1 \vec{n}_0 = \xi, \quad \vec{B}_1 \vec{n}_0 = B_{1n} = 0 = H_{1n},$$

$$\left[\vec{n}_0, \vec{E}_1\right] = E_{1\tau} = 0, \qquad \left[\vec{n}_0, \vec{H}_1\right] = \vec{\eta}.$$

Граничні умови, підсумок, метали з кінцевою провідністю

Деталізуємо цей результат:

$$E_{1\tau} = 0, H_{1n} = 0$$

тангенційна складова напруженості електричного поля та нормальна складова напруженості магнітного поля поближу поверхні ідеального провідника відсутні;

$$\vec{D}_1\vec{n}_0 = \varepsilon_0\varepsilon_1\vec{E}_1\vec{n}_0 = \xi$$

нормальна складова електричного поля визначається розподілом поверхневого заряду;

$$\left[\vec{n}_0, \vec{H}_1\right] = \vec{\eta}$$

густина електричного струму на поверхні провідника дорівнює за значенням та перпендикулярна за напрямом тангенційної складової напруженості магнітного поля поблизу поверхні.

Граничні умови, підсумок, метали з кінцевою провідністю

Також можна показати, що

$$\boxed{\frac{\partial H_{1\tau}}{\partial n} = 0,}$$

тобто **тангенційна складова магнітного поля досягає на границі ідеального провідника екстремального значення (у напрямі нормалі до границі).**