

Приймання та оброблення сигналів і зображень

**Характеристики власних
шумів підсилювачів**

Види шумів підсилювачів

До власних шумів підсилювачів відносять:

- 1) тепловий шум (шум Джонсона);
- 2) дробовий шум (шум Шоткі);
- 3) флікер-шум.

Це “робоча”, укорочена версія такого списку. Для операційних підсилювачів шумів їх більше і їх важкувати розрізнити, якщо не застосувати так зване кольорове описання шумів. У цьому випадку колір шуму пов’язано грубою аналогією з кольором світла та має відношення до частотного розподілу компонент шуму.

Для описання шуму використовують багато кольорів, деякі з яких мають відношення до реального світу, у той же час решта швидше пов’язані з областю психоакустики.

Білий шум перебуває посередині цієї шкали, побудованої за критерієм частотного розподілу шумової потужності – таблиця на наступному слайді.

Види шумів підсилювачів

Таблиця – Кольори шумів

Колір	Залежність спектральної потужності від частоти
Пурпурний	f^2
Синій	f
Білий	1
Рожевий	$1/f$ (-3 дБ/окт)
Червоний / коричневий	$1/f^2$ (-6 дБ/окт)

Види шумів підсилювачів

Між цими основними кольорами мітиться незкінченна кількість варіацій. Можливі також шуми у вузькій смузі частот чи навіть на одній частоті. Але такі шуми зазвичай пов'язані з впливом на систему зовнішніх джерел завад.

Шуми з чистими кольорами відсутні. На високих частотах всі шуми втрачають потужність та стають трішки рожевими.

Шуми ОП проявляються на інтервалі від білого до червоно-коричневого.

Тепловий шум

Причина виникнення: хаотичний тепловий рух вільних електронів у провідниках.

Спектральна густина середньої потужності:

$$W_x(\omega) = 2kTR, \omega \in (-\infty, +\infty)$$

$k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ - стала Больцмана, Вт*с/град;

T – абсолютна температура, К;

R – опір резистора, який генерує шум, Ом.

Тепловий шум є білим шумом, причому гаусівським:

$$p(u) = \frac{1}{u_d \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2u_d^2}\right),$$

та ще й з нульовим мат. сподіванням: $m_x = 0$.

Тепловий шум

Якщо ж $\omega \in [0, +\infty) \Rightarrow W_x(\omega) = 4kTR$

Аналогічне подвоєння матиме місце і для дробового шуму.

Середнє значення квадрату цієї шумової напруги (дисперсія ЕРС цього генератора):

$$\overline{u_{ш}^2} = 4kTR\Delta f_{ef},$$

**формула
Найквіста**

Δf_{ef} - ефективна смуга (шумова смуга пропускання, у межах якої розраховують або вимірюють шуми).

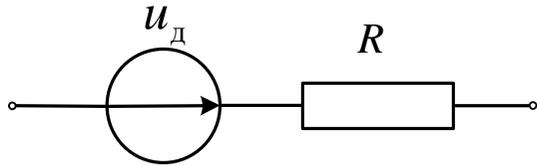
Або через дисперсію шумового струму:

$$\overline{i_{ш}^2} = 4kT \frac{1}{R} \Delta f_{ef} = 4kTg\Delta f_{ef}.$$

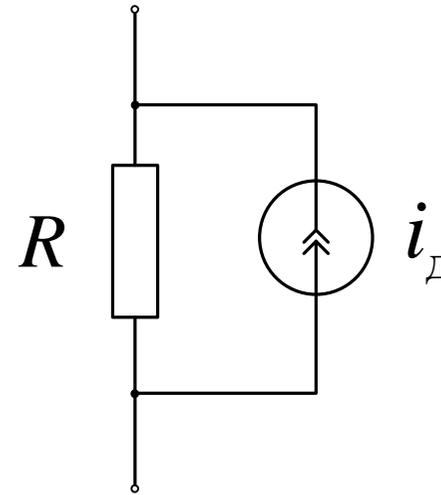
Елементи електричних схем можуть створювати теплові шуми, якщо вони здатні розсіювати енергію. Тому реактивні опори не є джерелами теплового шуму.

Тепловий шум

Звідси випливають схеми заміщення реального опору:



$$u_d = \sqrt{u_{ш}^2} = \sqrt{4kTR\Delta f_{ef}}$$



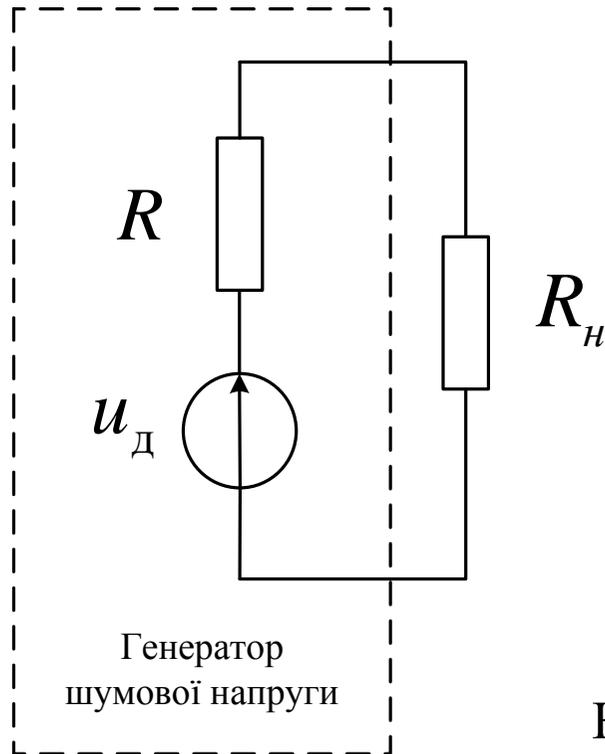
$$i_d = \sqrt{i_{ш}^2} = \sqrt{4kTg\Delta f_{ef}}$$

Зверніть увагу: при послідовному включенні реальних опорів складаються квадрати ЕРС окремих генераторів; при паралельному з'єднанні – квадрати струмів.

Чому? Тому що ЕРС окремих генераторів мають випадкові частоти і фази, тому мова може йти лише про складання потужностей.

Тепловий шум

$R=R_H$ - умова, як і звичайна, віддачі максимальної потужності шумового генератора у навантаження:



$$P_{ш \max} = \frac{\overline{u_{ш}^2}}{4R} = kT\Delta f_{ef}$$

$$P_{ш \max} \Big|_{\substack{T=290\text{ K} \\ (17^{\circ}\text{ C})}} = 4 \cdot 10^{-21} \text{ Вт / Гц}$$

Крім цього, теплові шуми, які створюються пасивними компонентами, які з'єднано довільно, дорівнюють тепловим шумам, які виникали б на опорі, рівному дійсній частині повного опору еквівалентного кола.

Тепловий шум

При кімнатній температурі:

$$u[\text{мкВ}] = \sqrt{u_{ш}^2} = \frac{1}{8} \sqrt{R[\text{кОм}] \Delta f_{ef} [\text{кГц}]}$$

Шумова смуга пропускання

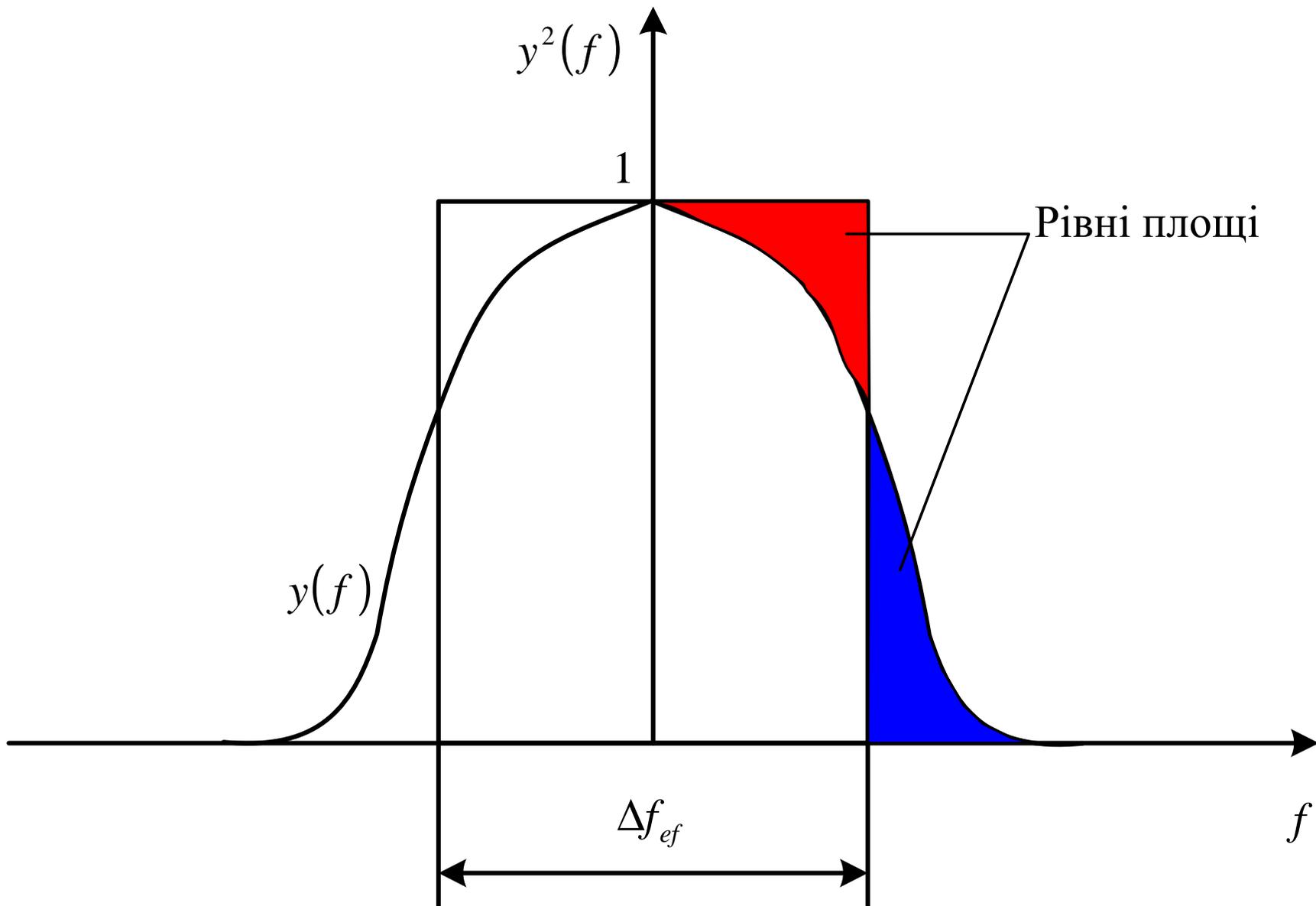
У загальному випадку:

$$\Delta f_{ef} = \int_0^{\infty} y^2(f) df = \left| y(f) = \frac{\dot{K}(f)}{\dot{K}_{\max}(f)} \right| =$$
$$= \frac{1}{|\dot{K}_{\max}(f)|^2} \int_0^{\infty} |\dot{K}(f)|^2 df.$$

Тобто шумова смуга визначається для системи при незмінному коефіцієнті підсилення у межах смуги пропускання та нульовому підсиленні за її межами.

Іншими словами, це **така смуга пропускання ідеальної системи, потужність шуму на виході якої $P_{ш}$ дорівнює потужності реальної системи – рисунок на наступному слайді.**

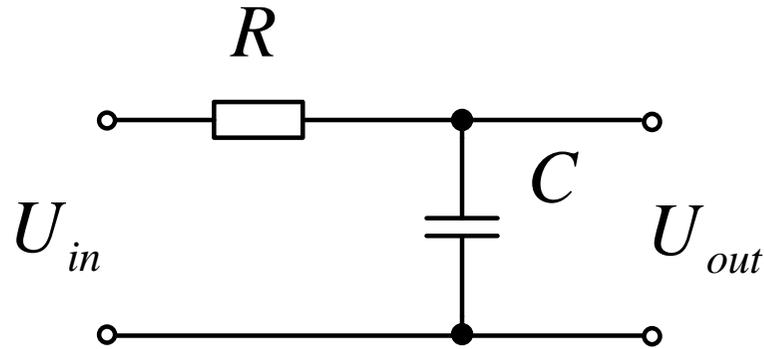
Шумова смуга пропускання



До питання шумової смуги

Шумова смуга пропускання

Приклад. Дано чотириполюсник – див. рисунок. Визначити його шумову смугу.



Розв'язок.

Частотний коефіцієнт передачі за напругою цього чотириполюсника:

$$\dot{K}(f) = \frac{1}{1 + i2\pi fRC}.$$

Перепишемо його у канонічній формі:

$$\dot{K}(f) = \frac{1}{1 + i \frac{f}{f_{zp}}} = \frac{f_{zp}}{f_{zp} + if}, \text{ де } f_{zp} = \frac{1}{2\pi RC}.$$

Шумова смуга пропускання

Нагадування (канонічна форма):

$$K(p) = K_0 \frac{(p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_m)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)},$$

де $n \geq m$, z_i – нулі; p_j – полюси.

Шумова смуга пропускання

$$\left| \dot{K}_{\max}(f) \right| = \left| \dot{K}(0) \right| = 1,$$

$$\begin{aligned} \Delta f_{ef} &= \int_0^{\infty} \left| \frac{f_{zp}}{f_{zp} + if} \right|^2 df = f_{zp}^2 \int_0^{\infty} \frac{df}{f_{zp}^2 + f^2} = \\ &= \left[\begin{array}{l} f = f_{zp} \operatorname{tg} \theta, \\ df = f_{zp} \sec^2 \theta d\theta \end{array} \right] = f_{zp} \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2} f_{zp}. \end{aligned}$$

Отже, для полюса першого порядку, різниця між шумовою смугою та смугою пропускання становить 1,57. Якщо продовжити розгляд для полюсів більших порядків то отримаємо такі результати – таблиця на наступному слайді.

Тепловий шум

Співвідношення між шумовою смугою та смугою пропускання

Кількість полюсів	$\Delta f_{ef} / f_{зр}$	Спад АЧХ, дБ/окт
1	1,57	6
2	1,22	12
3	1,15	18
4	1,13	24
5	1,11	30

Дробовий шум

Причина виникнення: дискретна структура у підсилювальних елементах, тобто флуктуації струму відносно середнього значення I_0 , спричинені випадковим характером емісії електронів (дірок).

Спектральна густина середньої потужності:

$$W_x(\omega) \approx eI_0, \omega \in (-\infty, +\infty)$$

e - заряд електрона.

Дробовий шум є білим шумом, причому гаусівським:

$$p(i) = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(i - I_0)^2}{2\sigma_i^2}\right),$$

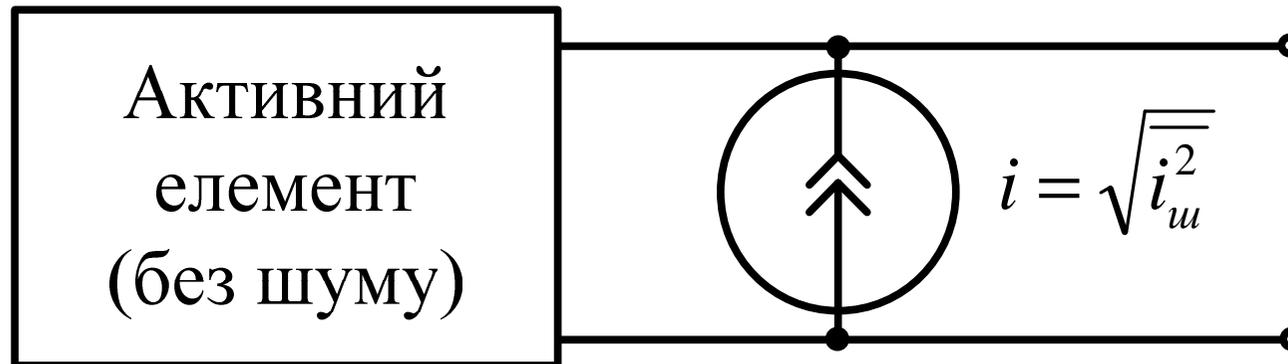
$$I_0 = ne$$

Дробовий шум

Дисперсія дробового шуму:

$$\overline{i_{ш}^2} = 2eI_0\Delta f_{ef}.$$

Еквівалентна схема активного елемента – рисунок.



$$\frac{i}{\sqrt{\Delta f_{ef}}} = \sqrt{2eI_0} = 5,56 \cdot 10^{-10} \sqrt{I_0}.$$

Флікер-шум

Причина виникнення: протікання струму крізь неоднорідний матеріал. Зокрема *в електронних лампах:* випаровування атомів речовини катода, тобто його постійним руйнуванням, дифузією нових атомів з глибини катода до його поверхні та, як наслідок, структурними змінами поверхні катода (“мерехтіння катода”). *У напівпровідниках:* неперервні ймовірнісні зміни їхньої внутрішньої структури – локального перестроювання провідних каналів всередині напівпровідника при протіканні крізь нього струму. Результатом цього буде хаотична модуляція опору з подальшою флуктуацією струму.

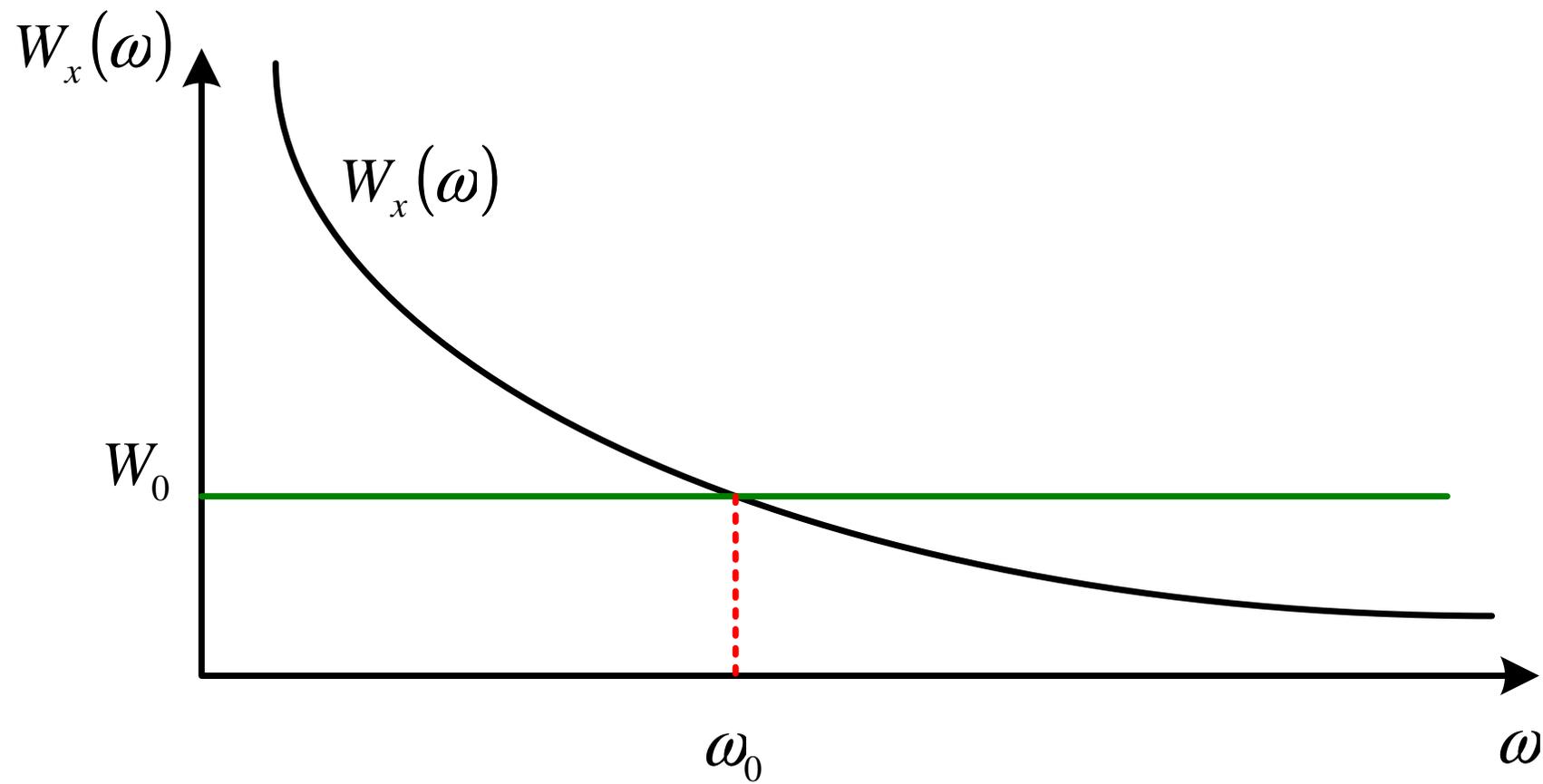
Спектральна густина середньої потужності (у загальному випадку):

$$W_x(\omega) \approx \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^\alpha W_o$$

W_o - спектральна густина БШ;

ω_o - частота спряження білого та рожевого шумів (тут їхні спектральні густини однакові).

Флікер-шум



До питання частоти спряження

Флікер-шум

Якщо $\alpha \approx 1$, тоді це флікер-шум (рожевий шум):

$$W_x(\omega) \approx \frac{\omega_0}{\omega} W_o,$$

Для нього характерною є постійність енергії у межах кожної октави (чи декади) зміни частоти. Це означає, що спектральна густина зменшується при збільшенні частоти за логарифмічним законом. Такий шум широко поширений у природі, і багато випадкових процесів йому підпорядковується. Прикладом є, власне, флікер-шум.

Червоний/коричневий шуми

Якщо ж $\alpha \approx 2$, тоді це червоний/коричневий шум:

$$W_x(\omega) \approx \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 W_o.$$

Червоний шум не дуже поширений термін для позначення типу шуму. У багатьох літературних джерелах використовують термін “коричневий шум”, якому і приписують властивості червоного. Це питання естетики: якщо використовувати термін “коричневий шум”, то тоді рожевий шум доцільно було б називати бронзовим (жовто-коричневим). Проте його називають “рожевий шум”, тому наступний за кольором буде червоний. Хоча і термін “коричневий шум” також пояснюється – обернена квадратична закономірність є характерною для шумів, створюваним броунівським рухом, відкритим Робертом Броуном (Robert Brown).

У природі червоний/коричневий шумом, наприклад, є акустичні характеристики великих об’ємів води. Імпульсні шуми та шуми лавинного пробую теж іноді характеризують червоний/коричневий шумом, хоча коректніше буде представляти їх як рожеві шуми.

Коефіцієнт шуму

Коефіцієнт шуму

Коефіцієнт шуму $K_{ш}$ – це відношення потужностей сигналу та шуму на вході підсилювача $P_{с.вх} / P_{ш.вх}$ до такого ж відношення на виході підсилювача:

$$K_{ш} = \frac{P_{с.вх} / P_{ш.вх}}{P_{с.вих} / P_{ш.вих}}$$

$$K_{ш(дБ)} = 10 \lg K_{ш}$$

Коефіцієнт шуму

Фізична суть цього поняття: у скільки разів шуми на виході підсилювача підсилюються за рахунок шумів, які виникають у самому підсилювачі.

$$K_{ш} = \frac{(P_c / P_{ш})_{\text{вих.ідеальн.підсил.}}}{(P_c / P_{ш})_{\text{вих.реальн.підсил.}}}$$

Тобто у скільки разів відношення С/Ш на виході ідеального підсилювача (без шуму) більше, ніж відношення С/Ш на виході реального підсилювача (з шумами).

Властивості коефіцієнта шуму:

1. Коефіцієнта шуму не залежить від опору навантаження.
2. Коефіцієнта шуму залежить від опору джерела вхідного шуму R_2 .
3. Для підсилювача без шуму $K_{ш} = 1$ ($K_{ш(дБ)} = 0$).

Коефіцієнт шуму

Але у такого підходу є обмеження:

1. При збільшенні опору джерела вхідного шуму коефіцієнт шуму може зменшуватись, хоча сумарний шум у схемі при цьому збільшується.
2. При суто реактивному опорі джерела шуму поняття коефіцієнт шуму втрачає свій зміст ($P_{ш.вх} = 0 \Rightarrow K_{ш} \rightarrow \infty$).
3. Якщо рівень шумів підсилювача невеликий порівняно з тепловими шумами джерела, то при розрахунку коефіцієнта шуму береться відношення практично однакових чисел, що може спричинити значні похибки => потрібне інше поняття.

Проте порівняння двох коефіцієнтів шуму має зміст лише у тому випадку, коли їх обох виміряно за одного і того ж опорі джерела шуму!

Коефіцієнт шуму також є функцією частоти, температури, опору джерела шуму, тому при визначенні коефіцієнта шуму ці параметри потрібно описувати.

**Коефіцієнт шуму
багатокаскадного підсилювача**

Приведений шум

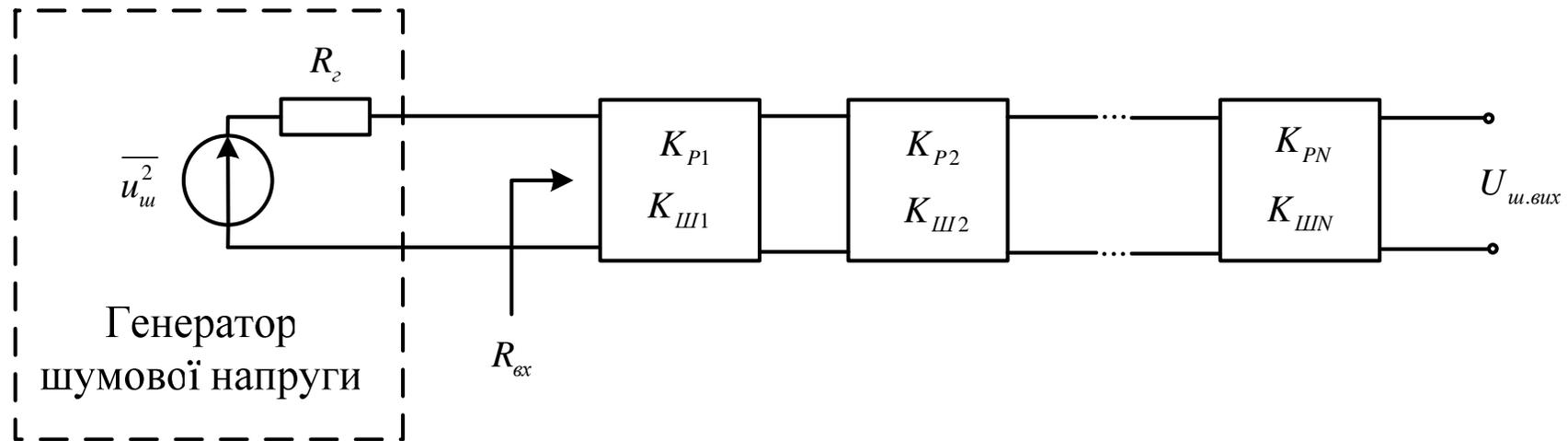
Потужність власного шуму чотириполюсника (у загальному випадку), приведена до його входу, скорочено – “**приведений шум**”:

$$P_{ш.власн} = \frac{P_{ш.вих.власн}}{K_P}$$

Нормування джерела шуму при визначенні коефіцієнта шуму (тобто $R_z = R_{ex}$, $T = T_n$) дозволяє знайти значення приведенного шуму за відомим значенням коефіцієнта шуму без додаткової інформації:

$$P_{ш.власн} = kT_n \Delta f_{eff} (K_{ш} - 1)$$

Коефіцієнт шуму багатокаскадного підсилювача



Вихідні дані:

1) шумові смуги пропускання у всіх підсилювачів однакові;

2) коефіцієнти підсилення за потужністю у смузі

пропускання $K_{Pi}(\omega) = const = K_{Pi}$;

3) Вхідні та вихідні опори суміжних підсилювачів – узгоджено, тобто

$$q_i = 1, q_{i+1} = 1, \quad q = \frac{4R_2}{R_{ex}} \frac{1}{(1 + R_2/R_{ex})^2} = \frac{4R_2 R_{ex}}{(R_{ex} + R_2)^2}$$

4) Кожен підсилювач має свій власний коефіцієнт шуму $K_{шi}$.

Коефіцієнт шуму багатокаскадного підсилювача

Тоді для першого підсилювача:

$$P_{ш.вих.власн1} = kT_n \Delta f_{eff} (K_{ш1} - 1) K_{P1}.$$

Аналогічно для інших підсилювачів:

$$P_{ш.вих.власн2} = kT_n \Delta f_{eff} (K_{ш2} - 1) K_{P2},$$

$$P_{ш.вих.власн3} = kT_n \Delta f_{eff} (K_{ш3} - 1) K_{P3},$$

...

Тепер визначимо рівень шуму окремих підсилювачів, приведенного до входу:

$$P_{ш.власн1} = \frac{P_{ш.вих.власн1}}{K_{P1}} = kT_n \Delta f_{eff} (K_{ш1} - 1),$$

$$P_{ш.власн2} = \frac{P_{ш.вих.власн2}}{K_{P1} K_{P2}} = kT_n \Delta f_{eff} \frac{(K_{ш2} - 1)}{K_{P1}},$$

$$P_{ш.власн3} = \frac{P_{ш.вих.власн2}}{K_{P1} K_{P2} K_{P3}} = kT_n \Delta f_{eff} \frac{(K_{ш3} - 1)}{K_{P1} K_{P2}},$$

...

Коефіцієнт шуму багатокаскадного підсилювача

Приведені до входу потужності власного шуму каскадів складаються енергетично, оскільки статистично вони незалежні. Тому

$$\begin{aligned} P_{ш.власн} &= P_{ш.власн1} + P_{ш.власн2} + P_{ш.власн3} + \dots = \\ &= \left(K_{ш1} - 1 + \frac{K_{ш2} - 1}{K_{P1}} + \frac{K_{ш3} - 1}{K_{P1}K_{P2}} + \dots \right) kT_n \Delta f_{eff} \end{aligned}$$

З іншого боку $K_{ш} = 1 + \frac{P_{ш.власн}}{kT_n \Delta f_{eff}}$.

Звідси

$$K_{ш} = K_{ш1} + \frac{K_{ш2} - 1}{K_{P1}} + \frac{K_{ш3} - 1}{K_{P1}K_{P2}} + \dots$$

Коефіцієнт шуму багатокаскадного підсилювача

$$K_{ш} = K_{ш1} + \frac{K_{ш2} - 1}{K_{P1}} + \frac{K_{ш3} - 1}{K_{P1} K_{P2}} + \dots$$

Цей вираз справедливий і тоді, коли парціальні коефіцієнти шуму та підсилення за потужністю стосуються окремих груп, які складаються з кількох каскадів.

Аналіз результату:

- 1) шумові властивості багатокаскадного підсилювача в основному визначаються першими каскадами (як правило, двома), де власний шум зіставний з рівнем сигналу;
- 2) шумові властивості багатокаскадного підсилювача визначаються не тільки парціальними коефіцієнтами шуму, але й парціальними коефіцієнтами підсилення за потужністю;
- 3) якщо $q_i = 1$, то коефіцієнт шуму визначений при розузгодженні дає тим більшу похибку, чим більше розузгодження. Тому це ще одна причина потреби в узгодженні опорів при визначенні коефіцієнта шуму.

Шумова температура

Аналіз підсилювачів з $K_{ш} \rightarrow 1$ зручніше проводити, використовуючи поняття “шумової температури” .

Визначення. Приведений до входу власний шум підсилювача створюється не еквівалентним генератором напруги чи струму, а узгодженим з входом підсилювача резистором $R_{ш} = R_{вх}$, що шумить. Температуру, за якої має перебувати цей резистор, щоб створити на виході шум реального підсилювача, і називають шумовою температурою.

Зв’язок шумової температури з нормальною температурою та коефіцієнтом шуму:

$$T_{ш} = T_n (K_{ш} - 1)$$

де $T_n \approx 300 \text{ K } (25 \pm 10^0 \text{ C})$.

Шумова температура

Шумова температура багатокаскадного підсилювача:

$$T_{ш} = T_{ш1} + \frac{T_{ш2}}{K_{P1}} + \frac{T_{ш3}}{K_{P1}K_{P2}} + \dots$$

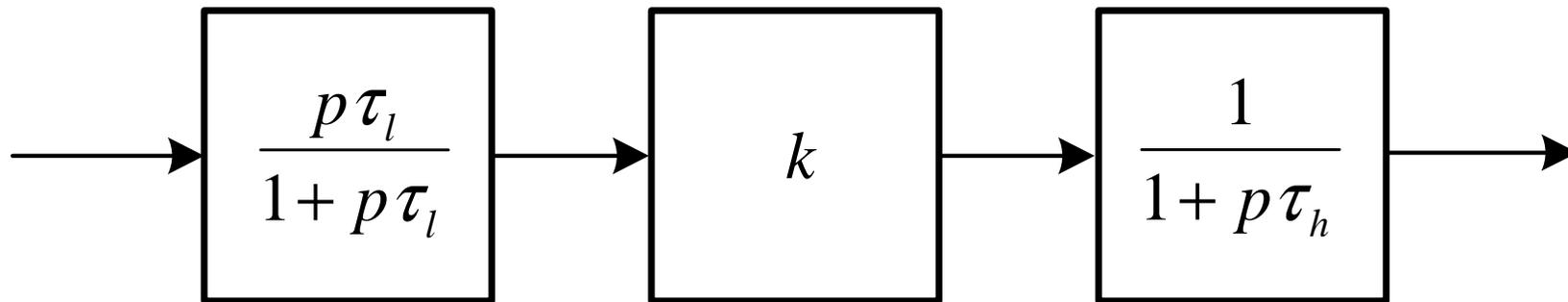
де $T_{шi}$ – еквівалентні шумові температури окремих каскадів.

Шум підсилювача змінної напруги

Шум підсилювача змінної напруги

Смугу пропускання знизу визначає ланка з коефіцієнтом передачі

$$K(p) = \frac{p\tau_l}{1+p\tau_l} \quad \text{а зверху – аперіодична ланка} \quad K(p) = \frac{1}{1+p\tau_h}.$$



Структурна схема підсилювача змінної напруги

Вважається, що на вході підсилювача діє суміш білого та фліккер шумів, спектральна густина яких $W_x(\omega) = W_0 \left(1 + \frac{\omega_0}{\omega} \right)$.

Потрібно знайти спектральну гуштину шуму на виході та його дисперсію.

Шум підсилювача змінної напруги

Знаходимо сумарний коефіцієнт передачі:

$$K(p) = \frac{p\tau_l}{1+p\tau_l} \cdot k \cdot \frac{1}{1+p\tau_h} = \frac{p\tau_l k}{(1+p\tau_l)(1+p\tau_h)}. \quad (1)$$

Переходимо до частотного коефіцієнта передачі, зробивши у попередньому виразі заміну змінної $p = i\omega$:

$$\dot{K}(i\omega) = \frac{i\omega\tau_l k}{(1+i\omega\tau_l)(1+i\omega\tau_h)}.$$

Тут k – коефіцієнт підсилення в області середніх частот.

Спектральна густина шуму на виході підсилювача:

$$W_y(\omega) = |\dot{K}(i\omega)|^2 W_x(\omega) = \frac{\omega^2 \tau_l^2 k^2}{(1+\omega^2 \tau_l^2)(1+\omega^2 \tau_h^2)} W_x \left(1 + \frac{\omega_0}{\omega} \right).$$

Шум підсилювача змінної напруги

Тепер дисперсія шуму на виході:

$$D_y = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} W_y(\omega) d\omega.$$

Підставляємо сюди вираз

$$W_y(\omega) = \frac{\omega^2 \tau_l^2 k^2}{(1 + \omega^2 \tau_l^2)(1 + \omega^2 \tau_h^2)} W_x \left(1 + \frac{\omega_0}{\omega} \right).$$

Маємо:

$$\begin{aligned} D_y &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega^2 \tau_l^2 k^2}{(1 + \omega^2 \tau_l^2)(1 + \omega^2 \tau_h^2)} W_0 \left(1 + \frac{\omega_0}{\omega} \right) d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega^2 \tau_l^2 k^2 W_0}{(1 + \omega^2 \tau_l^2)(1 + \omega^2 \tau_h^2)} d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{W_0 \omega_0 \omega \tau_l^2 k^2}{(1 + \omega^2 \tau_l^2)(1 + \omega^2 \tau_h^2)} d\omega = \\ &= D_{БШ} + D_{ФШ}, \end{aligned}$$

Шум підсилювача змінної напруги

Тут:

$$D_{БШ} = \frac{k^2 W_0 \tau_l}{2(\tau_l + \tau_h) \tau_h}, \quad D_{ФШ} = \frac{k^2 W_0 \omega_0 \tau_l^2}{\pi(\tau_l^2 - \tau_h^2)} \ln \frac{\tau_l}{\tau_h}. \quad (2)$$

Зв'язок між сталими часу та відповідними частотами:

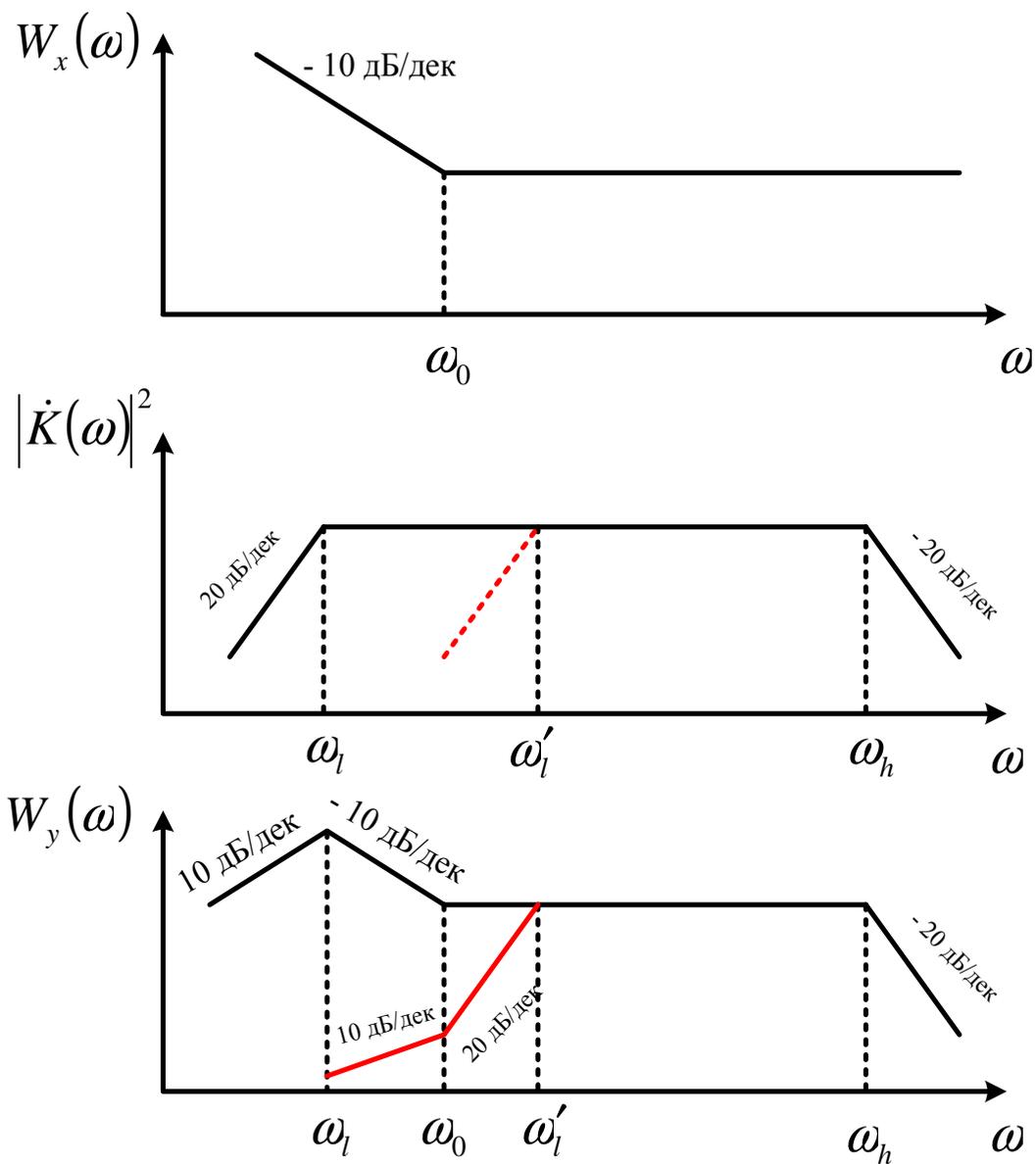
$$\omega_l = \frac{1}{\tau_l}, \quad \omega_h = \frac{1}{\tau_h}.$$

З урахуванням цього з (1) випливає, що коли $\tau_l \downarrow \Rightarrow \omega_l \uparrow$, $\tau_h \uparrow \Rightarrow \omega_h \downarrow$,

То $D_{БШ} \downarrow$, $D_{ФШ} \downarrow$. Іншими словами, при зменшенні смуги пропускання підсилювача зменшується дисперсія шумів на його виході.

Графічно (у логарифмічному масштабі) це можна зобразити так, як показано на наступному слайді.

Шум підсилювача змінної напруги



Розподіл потужності шуму у підсилювачі змінної напруги

Шум підсилювача змінної напруги

Якщо $\omega_l < \omega_0$, то $W_y(\omega)$ має сплеск на нижніх частотах.

Якщо $\omega_l > \omega_0$, то такий сплеск відсутній.

Ці всі результати стосуються підсилювача без зворотного зв'язку. **При його наявності картина не змінюється.**

$$K' = \frac{K}{1 + K\beta} = \frac{p\tau_l k}{(1 + p\tau_l)(1 + p\tau_h)} \cdot \left[1 + k\beta \frac{p\tau_l k}{(1 + p\tau_l)(1 + p\tau_h)} \right]^{-1}.$$

За глибокого зворотного зв'язку $k\beta \gg 1$, то:

$$K' \approx \frac{1}{\beta} \frac{p\tau_l k\beta}{1 + p\tau_l k\beta} \frac{1}{1 + p\tau_h / (k\beta)}.$$

Якщо порівняти з попереднім результатом

$$K = \frac{p\tau_l k}{(1 + p\tau_l)(1 + p\tau_h)}$$

Шум підсилювача змінної напруги

то матимемо такий результат:

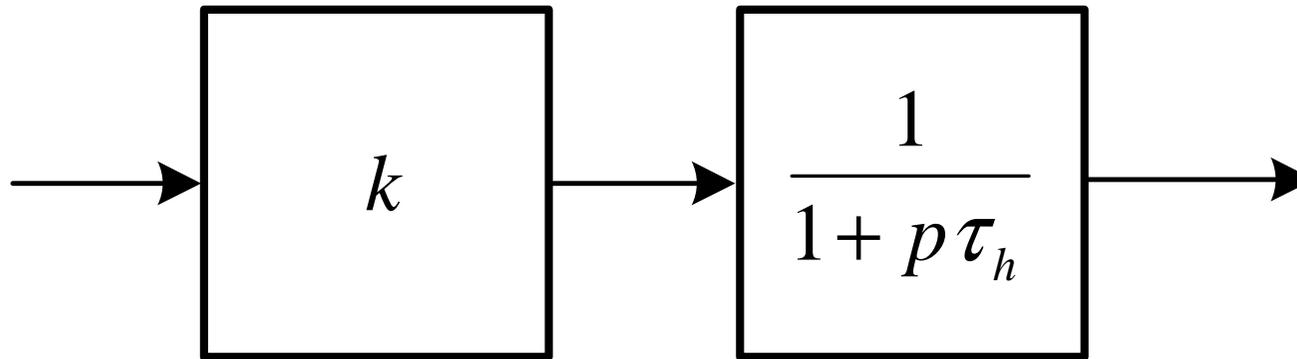
введення негативного зворотного зв'язку зменшує у $k\beta$ раз коефіцієнт підсилення та нижню межу смуги пропускання ($\tau'_l = \tau_l k\beta$) та у стільки ж разів збільшує верхню межу смуги пропускання ($\tau'_h = \tau_h / k\beta$).

Таким чином, результати аналізу шумів підсилювача без негативного зворотного зв'язку повністю придатні для аналізу шумів підсилювача з негативним зворотним зв'язком, якщо ввести відповідні поправки у значення коефіцієнта підсилення та сталих часу, проте характер коефіцієнта передачі та АЧХ при цьому не змінюється!

Шум підсилювача постійної напруги

Шум підсилювача постійної напруги

Смугу пропускання зверху визначає аперіодична ланка $K(p) = \frac{1}{1 + p\tau_h}$.



Структурна схема підсилювача постійної напруги

Вважається, що на вході підсилювача діє суміш білого та фліккер шумів, спектральна густина яких $W_x(\omega) = W_0 \left(1 + \frac{\omega_0}{\omega} \right)$.

Потрібно знайти спектральну гуστину шуму на виході та його дисперсію.

Шум підсилювача постійної напруги

Знаходимо сумарний коефіцієнт передачі:

$$K(p) = k \cdot \frac{1}{1 + p\tau_h} = \frac{k}{1 + p\tau_h}. \quad (3)$$

Переходимо до частотного коефіцієнта передачі, зробивши у попередньому виразі заміну змінної $p = i\omega$:

$$\dot{K}(i\omega) = \frac{k}{1 + i\omega\tau_h}.$$

Спектральна густина шуму на виході підсилювача:

$$W_y(\omega) = |\dot{K}(i\omega)|^2 W_x(\omega) = \frac{k^2}{1 + \omega^2\tau_h^2} \cdot W_x \left(1 + \frac{\omega_0}{\omega} \right).$$

Шум підсилювача постійної напруги

Тепер дисперсія шуму на виході:

$$D_y = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} W_y(\omega) d\omega.$$

Підставляємо сюди вираз

$$W_y(\omega) = \frac{k^2}{1 + \omega^2 \tau_h^2} \cdot W_x \left(1 + \frac{\omega_0}{\omega} \right).$$

Маємо:

$$\begin{aligned} D_y &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k^2}{1 + \omega^2 \tau_h^2} W_0 \left(1 + \frac{\omega_0}{\omega} \right) d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k^2 W_0}{1 + \omega^2 \tau_h^2} d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{W_0 \omega_0 k^2}{\omega (1 + \omega^2 \tau_h^2)} d\omega = \\ &= D_{БШ} + D_{ФШ}, \end{aligned}$$

Шум підсилювача постійної напруги

Обчислити ці доданки можна двома шляхами – інтегруванням, або обчисливши границю виразів (2) при $\tau_l \rightarrow \infty$, оскільки $\omega_l = 0$.

Скористаємось другим способом:

$$D_{БШ} = \lim_{\tau_l \rightarrow \infty} \frac{k^2 W_0 \tau_l}{2(\tau_l + \tau_h) \tau_h} = \lim_{\tau_l \rightarrow \infty} \frac{k^2 W_0 \tau_l}{2\tau_l \left(1 + \frac{\tau_h}{\tau_l}\right) \tau_h} = \frac{k^2 W_0}{2\tau_h},$$

$$D_{ФШ} = \lim_{\tau_l \rightarrow \infty} \frac{k^2 W_0 \omega_0 \tau_l^2}{\pi(\tau_l^2 - \tau_h^2)} \ln \frac{\tau_l}{\tau_h} = \lim_{\tau_l \rightarrow \infty} \frac{k^2 W_0 \omega_0 \tau_l^2}{\pi \tau_l^2 (1 - \tau_h^2/\tau_l^2)} \ln \frac{\tau_l}{\tau_h} = \infty.$$

Тобто за цим результатом дисперсія флікер-шуму на виході підсилювача постійної напруги дорівнює нескінченності, а такі підсилювачі працюють.

Чому?

Шум підсилювача постійної напруги

Чому ж працюють такі підсилювачі?

А тому, що **нижня частота смуги пропускання шуму у таких підсилювачах не дорівнює нулю!** Час, протягом якого ми працюємо з таким підсилювачем після першого або чергового підстроювання початкового рівня вихідного сигналу, обмежений, тобто не нескінченний. А раз так, то **можна показати, що шумова смуга такого підсилювача розпочинається не з нуля, а з деякої кінцевої частоти (якщо є флуктуації сигналу, період якого значно більший часу спостереження, то ці флуктуації і проявляються як постійні зміщення на виході підсилювача).**

Шум підсилювача постійної напруги

Це випадок дисперсії нестационарного випадкового процесу на виході лінійної системи у перехідному режимі:

$$\begin{aligned} D_y(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} W_0 \left(1 + \frac{\omega_0}{\omega}\right) \frac{4k^2 \sin^2(\omega t/2)}{1 + \omega^2 \tau_h^2} d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{W_0 4k^2 \sin^2(\omega t/2)}{1 + \omega^2 \tau_h^2} d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{W_0 \omega_0 4k^2 \sin^2(\omega t/2)}{\omega(1 + \omega^2 \tau_h^2)} d\omega = \\ &= D_{БШ}(t) + D_{\PhiШ}(t), \end{aligned}$$

Результат:

$$D_{БШ}(t) = \frac{k^2 W_0}{\tau_h} (1 - \exp(-t/\tau_h)),$$

$$D_{\PhiШ}(t) = \frac{k^2 W_0 \omega_0}{\pi} \left[2C + 2 \ln \frac{t}{\tau_h} - \exp(-t/\tau_h) Ei\left(\frac{t}{\tau_h}\right) - \exp(t/\tau_h) Ei\left(-\frac{t}{\tau_h}\right) \right].$$

Шум підсилювача постійної напруги

Тут:

$C=0,5772$ – стала Ейлера (Ейлера-Маскероні);

$Ei(x)$ – інтегральна показникова функція $Ei(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt$. При $x > 0$ інтеграл розходиться у точці $t=0$. У цьому випадку під інтегральною показниковою функцією розуміють головне значення невласного інтегралу:

$$Ei(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt = C + \ln|x| + \frac{x}{1 \cdot 1!} + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \dots + \frac{x^n}{n \cdot n!} + \dots$$

У підсумку маємо для білого шуму при $t \rightarrow \infty$:

$$D_{БШ}(t) = \frac{k^2 W_0}{\tau_h},$$

а для фліккер-шуму при $t \gg \tau_h$:

$$D_{ФШ}(t) \approx \frac{2k^2 W_0 \omega_0}{\pi} \left(C + \ln \frac{t}{\tau_h} \right).$$