

Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет
Шосткинський інститут

ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ ТА МАГНІТНИХ КІЛ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

для студентів напрямку 050201 «Системна інженерія»
спеціальності 6.091401 «Системи управління та автоматики»
заочної форм навчання
У п'яти частинах

Частина 5

Затверджено
на засіданні кафедри системотехніки та
інформаційних технологій як конспект
лекцій з дисципліни «Теорія електричних
та магнітних кіл».
Протокол № 1 від 31.09.2009 р.

Суми
Видавництво СумДУ
2010

Теорія електричних та магнітних кіл: конспект лекцій у п'яти частинах / Укладач А.В. Булашенко. – Суми:Вид-во СумДУ, 2010. – Ч. 5. – 157с.

Кафедра системотехніки та інформаційних технологій

Зміст

	С.
ВСТУП.....	5
РОЗДІЛ 7 ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ У ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ	6
7.1 Основні поняття	6
7.2 Закони комутації	7
7.3 Загальна методика класичного методу	8
7.4 Підключення котушки індуктивності до джерела постійної напруги	10
7.5 Відключення котушки індуктивності від джерела постійної напруги.....	14
7.7 Заряд конденсатора від джерела постійної напруги	18
7.8 Розряд конденсатора на резистор	20
7.9 Підключення конденсатора до джерела синусоїдальної напруги	22
7.10 Розряд конденсатора на RL-коло.....	24
7.11 Підключення RLC-кола до джерела постійної напруги .	32
7.12 Розрахунок перехідних процесів у складному колі	34
7.13 Метод змінних стану	37
7.14 Розрахунок кола при впливі ЕРС довільної форми. Інтеграл Дюамеля.....	43
7.15 Основні положення операторного методу аналізу перехідних процесів.....	46
7.16 Закони Ома та Кірхгофа у операторній формі	48
7.17 Алгоритм розрахунку перехідних процесів операторним методом	50
7.18 Знаходження оригіналу за зображенням	53
РОЗДІЛ 8 ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛОЛА ІЗ РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ	56
8.1 Основні поняття	56
8.2. Рівняння однорідної лінії	57
8.3 Рівняння однорідної лінії при сталому синусоїдальному режимі.....	59
8.4 Біжучі хвилі	60

8.5 Однорідна лінія без спотворень.....	64
8.6 Розподіл струму та напруги	65
8.7 Однорідні лінії без втрат при різних режимах роботи	68
РОЗДІЛ 9 НЕЛІНІЙНІ КОЛА	74
9.1 Основні поняття	74
9.2 Нелінійні електричні кола постійного струму	82
9.3 Магнітні кола при постійних магнітних потоках.....	91
9.4 Нелінійні кола змінного струму	94
9.4.1 Основні поняття.....	94
9.4.2 Кола з інерційними нелінійними елементами	96
9.4.3 Кола з безінерційними елементами.....	97
9.5 Метод еквівалентних синусоїд	102
9.5.1 Рівняння стану котушки з феромагнітним осердям .	105
9.6 Ферорезонанс у нелінійних колах	106
9.7 Трансформатор з феромагнітним осердям	110
9.8 Магнітний підсилювач	114
9.9 Феромагнітні стабілізатори напруги	116
РОЗДІЛ 10 СТІЙКІСТЬ ТА СИНТЕЗ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ... 120	
10.1 Частотні характеристики схемних функцій	120
10.1.1 Поняття про схемні функції	120
10.1.2 Частотні характеристики	122
10.2 Карта нулів та полюсів схемних функцій.....	124
10.3 Критерії стійкості схемних функцій.....	129
10.3.1 Загальні положення.....	129
10.3.2 Частотний критерій Михайлова	130
10.3.3 Метод Рауса-Гурвіца	132
10.3.4 Критерій Гурвіца.....	133
10.3.5 Критерій Рауса	134
10.4 Синтез електричних кіл	136
10.4.1 Основні положення.....	136
10.4.2 Синтез пасивних двополюсників	137
10.4.3 Синтез пасивних двополюсників за Фостером.....	143
10.4.4 Синтез пасивних двополюсників за Кауером	149
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	155

ВСТУП

Конспект лекцій з дисципліни «Теорія електричних та магнітних кіл» для студентів заочної форми навчання складається з п'яти частин. Частина 5 розглядає складні лінійні та нелінійні кола в усталених та перехідних режимах.

Конспект лекцій призначений для надання допомоги студентам у їх самостійній роботі під час вивчення дисципліни «Теорія електричних та магнітних кіл».

Конспект лекцій складається з десяти розділів. У першому та другому, четвертому розділах розглядаються лінійні електричні кола постійного, змінного та трифазного струму. Третій розділ містить теорію прохідних чотириполюсників. У п'ятому розділі розглядається аналіз лінійних електричних кіл із взаємною індуктивністю. У шостому розділі розглянуті несинусоїдальні струми. У сьомому розділі розглянуті причини виникнення перехідних процесів та основні математичні положення при аналізі перехідних процесів, розглянуті загальні положення класичного методу аналізу перехідних процесів і його математичний апарат, класичний метод аналізу перехідних процесів у найпростіших послідовних RL-, RC-, RLC-колах, операторний метод аналізу перехідних процесів, аналіз перехідних процесів за допомогою часових характеристик. Восьмий розділ присвячений лінійним електричним колам із розподіленими параметрами. Дев'ятий розділ містить матеріали щодо аналізу нелінійних електричних та магнітних кіл постійного та змінного струму та пристрої на їх основі.

РОЗДІЛ 7 ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ У ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ

7.1 Основні поняття

Перехідний процес – процес, що виникає у електричному колі при переході від одного сталого режиму до іншого.

Сталій режим – режим, що встановлюється у електричному колі у результаті тривалого впливу на це коло постійних або періодичних ЕРС.

Перехідний процес виникає в електричному колі в результаті комутацій.

Комутації – дії, що викликають перехідний процес в електричному колі відключення або включення джерел, окремих гілок, зміна параметрів кола, зміна фази, частоти, амплітуди напруги і струму та ін.

Завдання аналізу перехідних процесів полягає у визначенні характеру зміни $u(t)$ і $i(t)$ на елементах електричного кола під час перехідного процесу та тривалості проходження цього перехідного процесу.

Аналіз перехідних процесів ґрунтується на описі стану електричного кола за допомогою законів Кірхгофа для миттєвих значень. У результаті одержуємо систему інтегрально-диференціальних рівнянь. Завдання аналізу перехідних процесів зводиться до відшукування розв'язання (інтеграла, інтегрування) вихідної системи рівнянь.

Запишемо систему рівнянь для схеми, що подана на рис. 7.1.

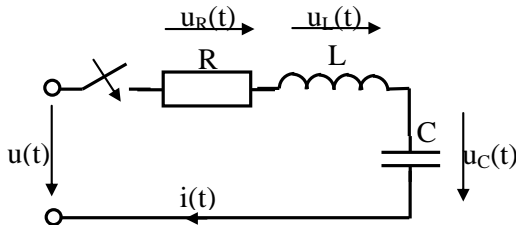


Рисунок 7.1

$$u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = u(t);$$

$$i(t)R + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt = u(t);$$

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = \frac{du(t)}{dt};$$

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = \frac{1}{L} \frac{du(t)}{dt}.$$

Залежно від використовуваного методу інтегрування розрізняють:

- 1) класичний метод аналізу перехідних процесів;
- 2) операторний метод аналізу перехідних процесів;
- 3) частотний метод аналізу перехідних процесів;
- 4) метод із використанням інтеграла Дюамеля;
- 5) метод змінних стану.

7.2 Закони комутації

Будемо вважати, що процес комутації відбувається миттєво (хоча реально - це мікросекунди для тиристорів, транзисторів).

Умовно позначати через $t=0$ момент комутації

$t = 0_-$ – момент часу безпосередньо до комутації;

$t = 0_+$ – момент часу безпосередньо після комутації.

У реальних електричних колах не може бути миттєвої зміни накопиченої в електричних і магнітних полях енергії.

Дійсно, у реальних електричних колах миттєва потужність p завжди кінцева (тому що u та i кінцеві). Отже, приріст енергії ΔW за час комутації $\Delta t \Rightarrow 0$ дорівнює 0:

$$\Delta W = p \Delta t \Rightarrow 0, \text{ при } \Delta t \Rightarrow 0, \text{ тобто } W(0_-) = W(0_+).$$

У такий спосіб:

1-й закон комутації. Струм у гілці з котушкою індуктивності не може змінюватися стрибком:

$$\frac{Li_L^2(0_-)}{2} = \frac{Li_L^2(0_+)}{2} \Rightarrow i_L(0_-) = i_L(0_+).$$

2-й закон комутації. Напруга на конденсаторі не може змінюватися стрибком:

$$\frac{Cu_c^2(0_-)}{2} = \frac{Cu_c^2(0_+)}{2} \Rightarrow u_c(0_-) = u_c(0_+).$$

Або:

У момент комутації напруги на конденсаторах струми в котушках індуктивності залишаються незмінними (рис. 7.2).

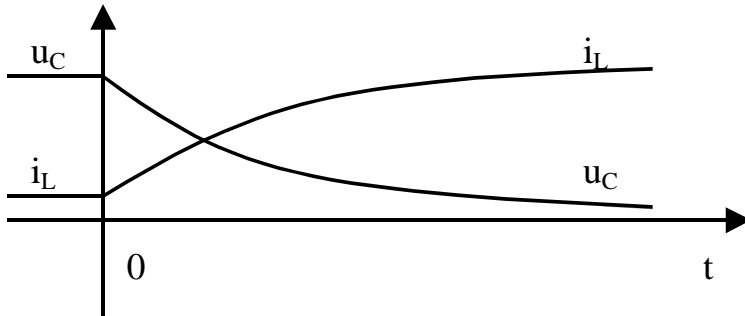


Рисунок 7.2

7.3 Загальна методика класичного методу

Відповідно до класичного методу: повне розв'язання (інтеграл) лінійного неоднорідного диференціального рівняння дорівнює сумі власного розв'язання вихідного диференціального рівняння та загального розв'язання цього рівняння при рівності нулю правої частини (однорідного диференціального рівняння):

$$a_n \frac{d^n i}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} i}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{di}{dt} + a_0 i = f \Leftrightarrow i = i_{\text{влас}} + i_{\text{в}}.$$

Власне розв'язання (одне із розв'язків, що задовольняє вихідне неоднорідне диференціальне рівняння) визначають шля-

хом розрахунку сталого режиму у схемі після комутації. Ця складова перехідного струму (напруги) називається вимушеною:

$$i_{np} = i_{уст}.$$

Загальне розв'язання диференціального рівняння без правої частини (без джерел ЕРС, струму) визначає вільну складову перехідного струму (напруги).

З курсу математики відомо, що розв'язання однорідного лінійного диференціального рівняння має вигляд

$$a_n \frac{d i_{\epsilon}^n}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d i_{\epsilon}^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d i_{\epsilon}}{dt} + a_0 i_{\epsilon} = 0,$$

і являє собою суму експонент

$$i_{св} = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t},$$

де p_k – показники загасання, обумовлені коренями характеристичного рівняння, отриманого з вихідного шляхом заміни

$$\frac{d}{dt} \Rightarrow p; \quad \frac{d^2}{dt^2} \Rightarrow p^2; \quad \dots; \quad \frac{d^n}{dt^n} \Rightarrow p^n; \quad \int dt \Rightarrow \frac{1}{p}$$

і одержання лінійного алгебраїчного рівняння n -го порядку

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0,$$

де A_k – постійні інтегрування, обумовлені за значеннями шуканої функції і її похідних у момент комутації (початкові умови).

Початкові умови визначаємо за допомогою законів комутації.

$$\text{Дійсно, } i = i_{вум} + \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}.$$

При $t = 0_+$:

$$i \big|_{t=0_+} = i_{вум} + \sum_{k=1}^n A_k \Rightarrow \sum_{k=1}^n A_k = i \big|_{t=0_+} - i_{вум},$$

$$i_{\text{ввл}} \mathbb{Q}_+ \supseteq \sum_{k=1}^n A_k ; i'_{\text{ввл}} \mathbb{Q}_+ \supseteq \sum_{k=1}^n p_k A_k .$$

Тоді складаємо систему з n алгебраїчних рівнянь і знаходимо A_k :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n A_k = i \mathbb{Q}_+ \supseteq i_{np} , \\ \sum_{k=1}^n A_k p_k = i' \mathbb{Q}_+ \supseteq i'_{np} . \end{cases}$$

7.4 Підключення котушки індуктивності до джерела постійної напруги

Проаналізуємо перехідні процеси у колі, що зображене на рис. 7.3.

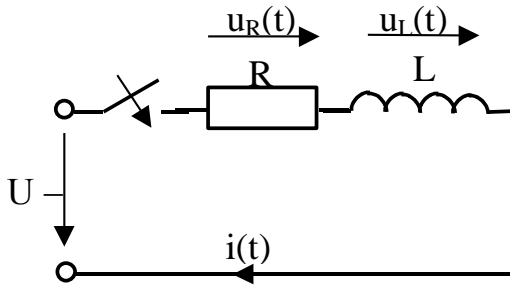


Рисунок 7.3

1 На підставі законів Кірхгофа для миттєвих значень з урахуванням того, що $u_L = L \frac{di_L}{dt}$, $u_c = \frac{1}{C} \int i_c dt$ або ($i_c = C \frac{du_c}{dt}$) складаємо диференціальне рівняння для схеми після комутації:

$$u_R + u_L = U \Rightarrow iR + L \frac{di}{dt} = U .$$

2 Запишемо шукане розв'язання: $i = i_{\text{ввл}} + i_g$.

3 Знаходимо $i_{\text{вим}} = i_{\text{уст}}$ (при $t \Rightarrow \infty$; $\frac{di}{dt} = 0$ – підставляємо у вихідне диференціальне рівняння та одержуємо $i_{\text{уст}} = i_{\text{вим}}$):

$$i_{\text{вим}} = \frac{U}{R}.$$

4 Знаходимо показники загасання p_k . Характеристичне рівняння

$$Lp + R = 0 \Rightarrow p = -\frac{R}{L}.$$

$$5 i_g = Ae^{pt},$$

де p – показник загасання, c^{-1} ;
 A – постійна інтегрування, A .

У такий спосіб $i_g = Ae^{-\frac{R}{L}t}$.

Характеристичне рівняння для визначення p часто складають більш простим шляхом. Із цією метою складають вирази для вхідного опору кола на змінному струмі $[Z(j\omega)]$, а потім замінюють у ньому j на p і прирівнюють $Z(p)$ до нуля:

$$Z(j\omega) = R + j\omega L; \quad j\omega \Rightarrow p.$$

$$\text{Тоді } p = -\frac{R}{L}, c^{-1}.$$

Найважливіша характеристика перехідного процесу τ – стала часу:

$$\tau = \left| \frac{1}{p} \right| = \frac{L}{R}, c.$$

6. Визначаємо сталу інтегрування.

Запишемо загальне розв'язання диференціального рівняння і

$$i = i_{\text{вим}} + i_g = \frac{U}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t}.$$

При $t = 0_+$:

$$i_{\ominus+} = \frac{U}{R} + A \Rightarrow A = i_{\ominus+} - \frac{U}{R}.$$

Запишемо значення струму до комутації $i_{\ominus-} = 0$.

На підставі 1-го закону (правила) комутації:
 $i_L \ominus- = i_L \ominus+ = 0$.

$$\text{Отже, } A = 0 - \frac{U}{R} = -\frac{U}{R}.$$

7 Визначаємо шукану функцію:

$$i = \frac{U}{R} - \frac{U}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

Визначаємо $u_L = L \frac{di}{dt}$; $u_R = iR$:

$$u_L = L \frac{d}{dt} \left(\frac{U}{R} - \frac{U}{R} e^{-\frac{R}{L}t} \right) = -L \cdot \frac{U}{R} e^{-\frac{R}{L}t} \cdot \left[-\frac{R}{L} \right] = U e^{-\frac{R}{L}t};$$

$$u_L = U e^{-\frac{R}{L}t};$$

$$u_R = U \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

Графіки перехідного струму (рис. 7.4) та перехідної напруги (рис. 7.5) подані нижче.

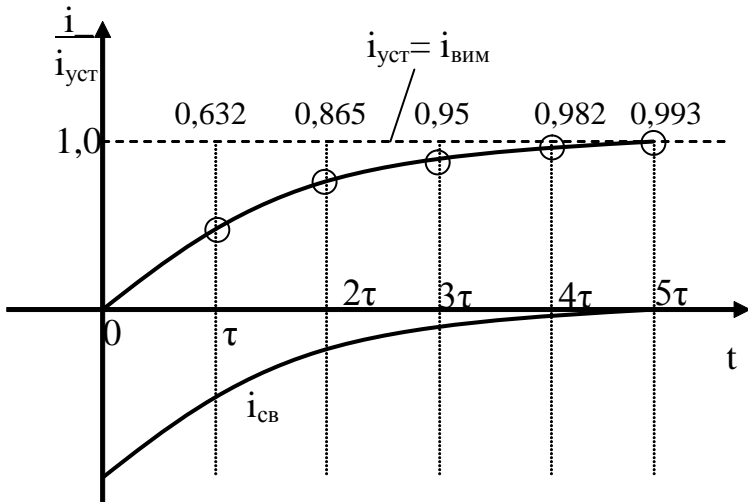


Рисунок 7.4

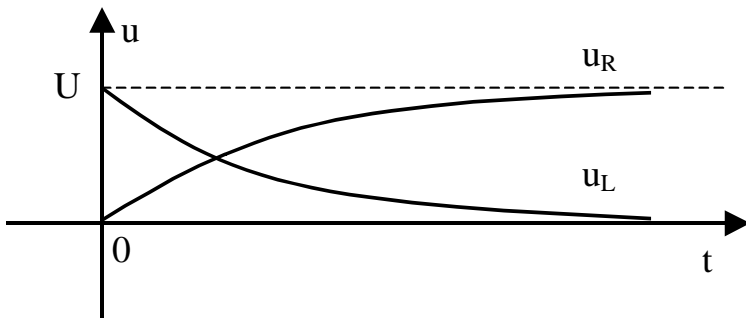


Рисунок 7.5

За час τ величина i зменшиться у e раз. Значення τ подане у таблиці 7.1

Таблиця 7.1

t	0	τ	2τ	3τ	4τ	5τ
$1 - \exp(-t/\tau)$	0	0,632	0,865	0,95	0,982	0,993
$\exp(-t/\tau)$	1	0,308	0,135	0,05	0,018	0,007

Для інженерних розрахунків беруть час перехідного процесу $(3-5)\tau$.

Тривалість перехідного процесу визначається тільки параметрами кола (R, L, C).

Приклад 7.1. Для RL-кола з параметрами $U=10$ В; $R=10$ Ом; $L=0,01$ Гн записати вирази для перехідного струму та напруги.

Розв'язання

Запишемо вирази для перехідної напруги та струму

$$i = \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = \frac{10}{10} \left(1 - e^{-\frac{t}{10^{-3}}} \right) = 1,0 \left(1 - e^{-10^3 t} \right);$$

$$u_R = 100 \left(1 - e^{-10^3 t} \right); \quad u_L = 100 e^{-10^3 t}.$$

Час, через який закінчиться перехідний процес, $t_{пер} = 5$ мс.

7.5 Відключення котушки індуктивності від джерела постійної напруги

Розглянемо коло, що зображене на рис. 7.6.

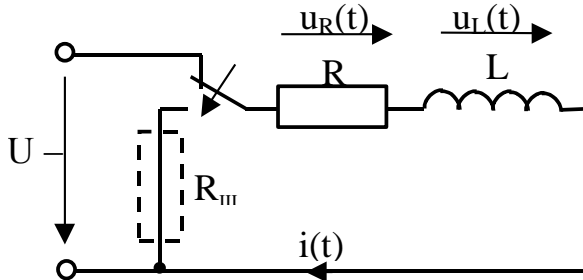


Рисунок 7.6

1 Диференціальне рівняння $u_R + u_L = 0 \Rightarrow iR + L \frac{di}{dt} = 0$.

2 Шукана величина $i = i_{вим} + i_{\epsilon}$.

3 Вимушена складова $i_{вм} = 0$, тому що $\frac{di}{dt} = 0$.

4 Характеристичне рівняння $R + Lp = 0$, звідки

$$p = -\frac{R}{L} \Rightarrow \text{стала часу } \tau = \frac{L}{R}.$$

5 Вільна складова $i_e R + L \frac{di_e}{dt} = 0$; $i_e = Ae^{pt}$.

6 Вираз для вільної складової $i = Ae^{-\frac{R}{L}t} \Rightarrow i_{\infty+} = A$.

За 1-м законом комутації $i_{\infty-} = \frac{U}{R} \Rightarrow A = \frac{U}{R}$.

7 Шукані функції:

$$i = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}; u_R = U e^{-\frac{t}{\tau}};$$

$$u_L = L \frac{d}{dt} \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = L \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \left(-\frac{1}{\tau}\right) = -\frac{LUR}{RL} e^{-\frac{t}{\tau}} = -U e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Графік перехідного струму поданий на рис. 7.7.

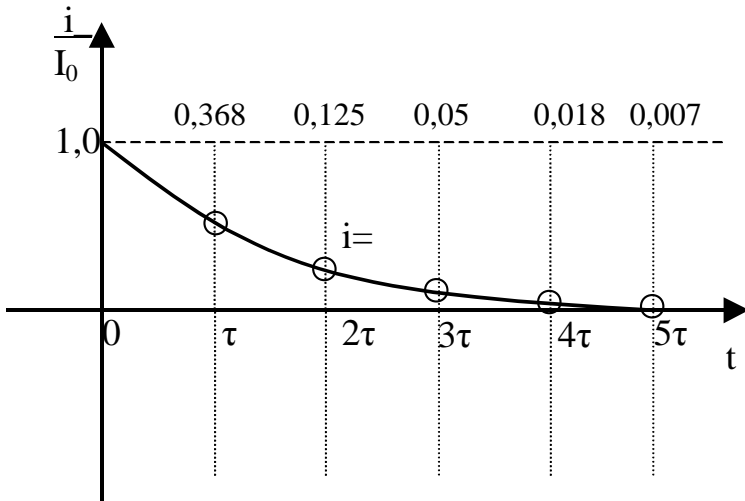


Рисунок 7.7

При відключенні котушки індуктивності від джерела живлення на її затискачах виникає напруга, обумовлена співвідношенням:

$$u_k \overset{+}{\underset{-}}{=} I_0 R_{uu} = \frac{U}{R} R_{uu}.$$

Зокрема, при відключенні котушок індуктивності без шунтуючого опору ($R_{uu} = \infty$) перенапруги на затискачах котушок можуть досягти небезпечних величин:

$$u_k = i R_{uu} = U \frac{R_{uu}}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U}{R} R_{uu} e^{-\frac{t}{\tau}} = I_0 R_{uu} e^{-\frac{t}{\tau}};$$

$$u_k + u_L + u_R = 0 \Rightarrow u_k = u_{uu} = -u_L + u_R.$$

7.6 Включення котушки індуктивності до джерела синусоїдальної ЕДС

Розглянемо коло, зображене на рис. 7.8.

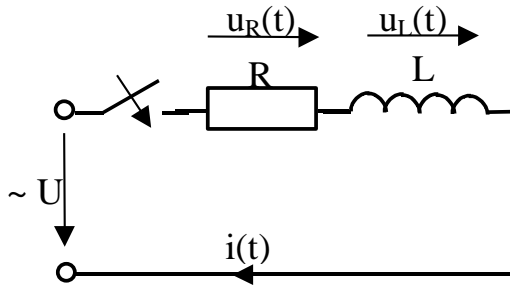


Рисунок 7.8

1 Складемо диференціальне рівняння щодо струму:

$$u_R + u_L = u, \quad iR + L \frac{di}{dt} = U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

2 Запишемо загальний розв'язок для диференціального рівняння $i = i_{вим} + i_c$.

3 Вираз для вимушеної складової $i_{\text{взм}} = I_m \sin(\omega t + \psi_u - \varphi)$,

де $I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \omega L^2}}$.

4 Складемо характеристичне рівняння $R + Lp = 0$, $p = -\frac{R}{L}$,

$\tau = \frac{L}{R}$.

5 Знайдемо вільну складову

$$i_{\text{в}} R + L \frac{di_{\text{в}}}{dt} = 0; i_{\text{в}} = Ae^{pt}.$$

6 Запишемо вираз для струму

$$i = i_{\text{взм}} + i_{\text{в}} = I_m \sin(\omega t + \psi_u - \varphi) + Ae^{-\frac{R}{L}t}.$$

Запишемо на підставі 1-го закону комутації

$$i(0_-) = i(0_+) = 0.$$

Запишемо вираз для струму після комутації

$$i(0_+) = I_m \sin(\psi_u - \varphi) + A = 0 \Rightarrow A = -I_m \sin(\psi_u - \varphi).$$

7. Запишемо загальний вираз для струму

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_u - \varphi) - I_m \sin(\psi_u - \varphi) e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Графік функції поданий на рис. 7.9.

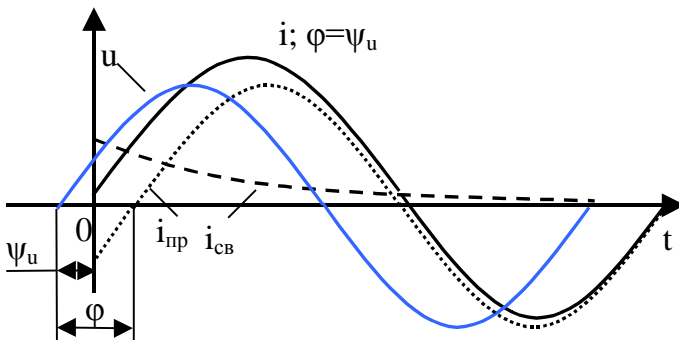


Рисунок 7.9

1 Початкове значення вільного струму (і характер перехідних процесів) залежить від моменту включення (початкової фази ψ_u).

Якщо $\psi_u - \varphi = 0$, тобто $\psi_u = \varphi$, то $i_s = 0$, тобто комутація не спричинить перехідний процес.

Якщо $\psi_u - \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$, тобто $\psi_u = \varphi \pm \frac{\pi}{2}$, то i_s максимально й дорівнює I_m .

2 При несприятливих умовах комутації ($\psi_u - \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$) та сталої часу кола $\frac{L}{R}$ максимальне значення перехідного струму може досягти майже подвійної амплітуди сталого струму (через час π після комутації).

7.7 Заряд конденсатора від джерела постійної напруги

Розглянемо коло, що зображене на рис. 7.10.

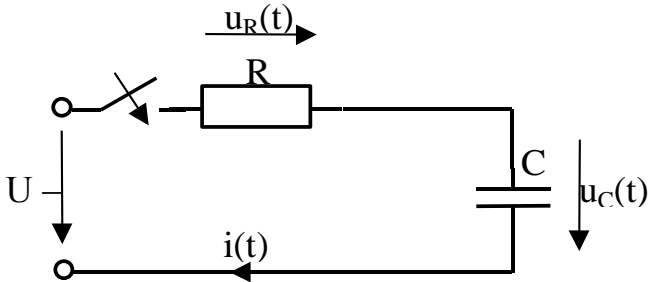


Рисунок 7.10

1 Для схеми, що зображена на рис. 7.10, складемо диференціальне рівняння

$$u_R + u_C = U ; iR + \frac{1}{C} \int i dt = U \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C \frac{du_c}{dt} R + u_c = U ; R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$$

2 Запишемо загальний вираз для струму $i = i_{\text{вим}} + i_{\text{с}}$.

3 Визначимо вимушену складову $i_{\text{вим}} = 0$.

4 Запишемо загальний вхідний опір

$$Z_{\text{вх}}(\omega) = R + \frac{1}{j\omega C}.$$

Тепер складемо характеристичне рівняння

$$R + \frac{1}{pC} = 0.$$

Знайдемо корінь характеристичного рівняння

$$p = -\frac{1}{RC} ; \tau = RC.$$

5. Запишемо вирази для вільної складової струму та напруги $i_{\text{с}} = A_1 e^{pt} ; u_{\text{с}} = A_2 e^{pt}$.

6 Визначимо сталі інтегрування:

$$i = A_1 e^{-\frac{t}{RC}} ; i(0_+) = A_1 ; u_c = U + A e^{-\frac{t}{RC}} ;$$

$$u_c(0_+) = U + A_2 ; u_c(0_-) = u_c(0_+) = 0 \Rightarrow A_2 = -U.$$

Початкові умови – значення струмів через котушки індуктивності та напруг на конденсаторах відомі з режиму до комутації.

Значення u та i на всіх елементах схеми при $t = 0_+$ – *залежні початкові умови*. Вони визначаються з незалежних за допомогою вихідного диференціального рівняння

$$i(0_+) R + u_c(0_+) = U \Rightarrow i(0_+) R + 0 = U \Rightarrow i(0_+) = \frac{U}{R} = A_1.$$

7 Запишемо загальні вирази для струму та напруги:

$i = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$; $u_c = U - Ue^{-\frac{t}{RC}}$. На основі цих виразів побудуємо графіки (рис. 7.11).

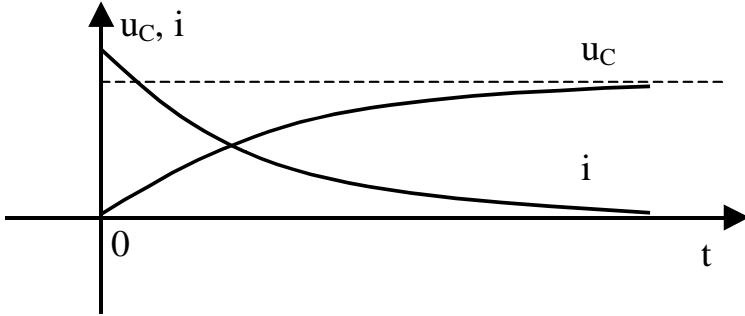


Рисунок 7.11

При включенні струм змінюється стрибком від 0 до $i \approx \frac{U}{R}$ і при невеликому активному опорі кола може досягти більших значень, що значно перевищують номінальне (наприклад, при підключенні навантаження через кабель, розподілена ємність якого велика, а опір проводів низький).

7.8 Розряд конденсатора на резистор

Розглянемо схему, зображену на рис. 7.12.

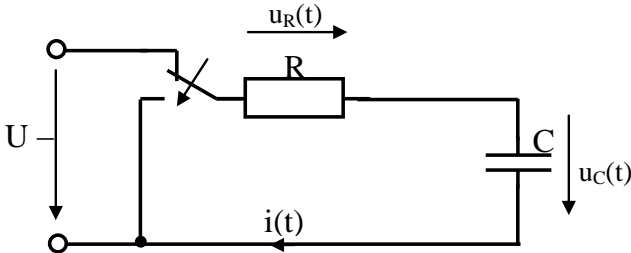


Рисунок 7.12

1. Складемо диференціальне рівняння для кола, зображеного на рис. 7.12, для напруги на ємності:

$$u_c + u_R = 0; u_c + iR = 0;$$

$$u_c + C \frac{du_c}{dt} R = 0; RC \frac{du_c}{dt} + u_c = 0.$$

2 Запишемо вираз для розв'язку $u_c = u_{C_{внм}} + u_{C_e}$.

3 Визначимо вираз для вимушеного значення $u_{C_{внм}} = 0$.

4 Складемо характеристичне рівняння $RCp + 1 = 0$, визначимо корені цього рівняння $p = -\frac{1}{RC}$; $\tau = RC$.

5 Запишемо вираз вільної складової $u_c = u_{C_e} = Ae^{pt}$.

6 Визначимо сталу інтегрування $u_c = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$,

$$u_c \Big|_{t=0} = u_c \Big|_{t=0} = U_0 \Rightarrow u_c \Big|_{t=0} = A = U_0.$$

7 Запишемо загальні вирази для напруги та струму

$$u_c = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}; u_R = -U_0 e^{-\frac{t}{RC}};$$

$$i = C \frac{du_c}{dt} = C \frac{d}{dt} U_0 e^{-\frac{t}{RC}} = C \frac{-U_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow i = \frac{-U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Побудуємо графіки цих величин (рис. 7.13).

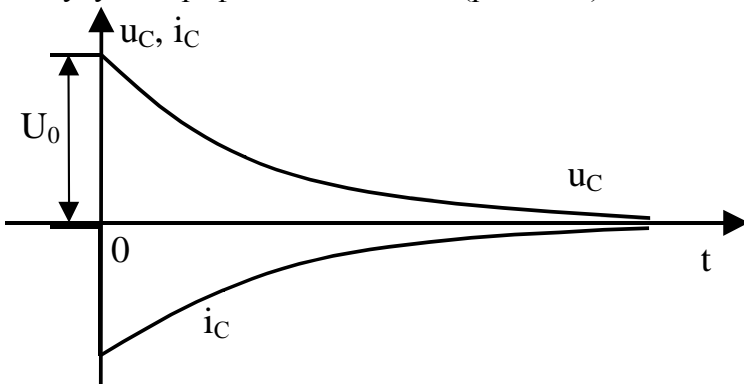


Рисунок 7.13

7.9 Підключення конденсатора до джерела синусоїдальної напруги

Розглянемо схему, зображену на рис. 7.14.

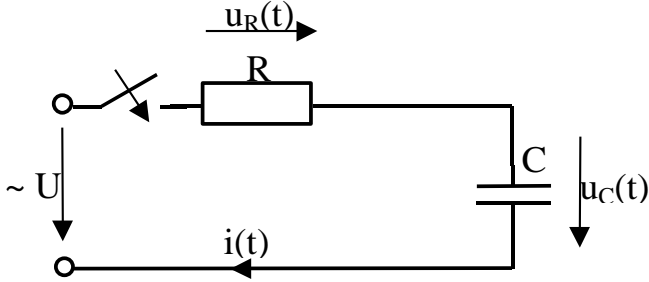


Рисунок 7.14

1 Складемо диференціальне рівняння для кола

$$u_R + u_c = u,$$

$$C \frac{du_c}{dt} + R u_c = U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

2 Запишемо розв'язок цього рівняння $u_c = u_{c_{np}} + u_{c_{св}}$

3 Запишемо вираз для вимушеної складової

$$u_{c_{вм}} = \frac{U_m}{z} X_c \sin(\omega t + \psi_u + \varphi - 90^\circ).$$

4 Запишемо вираз для кореня характеристичного рівняння:

$$p = -\frac{RC}{4}; \quad \tau = RC.$$

5 Запишемо вираз для вільної складової $u_{c_s} = Ae^{pt}$.

6 Знайдемо сталу інтегрування:

$$u_c(0_+) = 0; \quad u_c(0_+) = \frac{U_m}{z} X_c \sin(\psi_u + \varphi - 90^\circ) + A,$$

$$A = -\frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\psi_u + \varphi - \frac{\pi}{2}\right).$$

7 Запишемо вирази для напруги та струму

$$u_c = \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\omega t + \psi_u + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\psi_u + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) e^{-\frac{t}{RC}};$$

$$i = C \frac{du_c}{dt} = I_m \sin\left(\omega t + \psi_u + \varphi\right) + \frac{X_c}{R} I_m \sin\left(\psi_u + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Побудуємо на основі цих виразів графіки функцій (рис. 7.15).

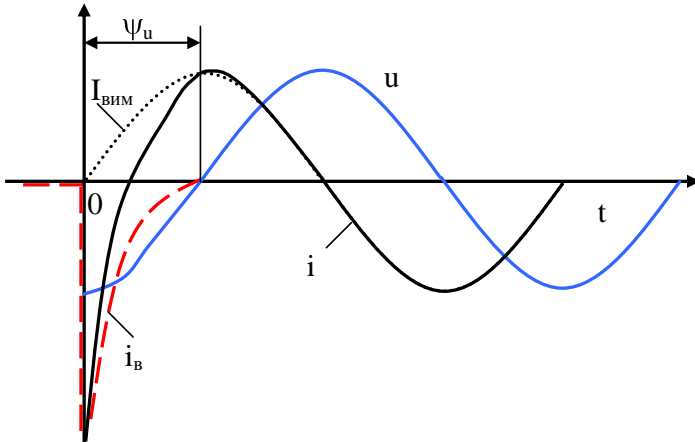


Рисунок 7.15

1 Якщо $\psi_u + \varphi = \frac{\pi}{2}$, то перехідний процес не виникає, і відразу ж настає сталий режим.

2 Якщо включення відбувається при $\psi_u + \varphi = 0$, то вільна складова напруги $u_{c_{св}}$ найбільша. Якщо $R \ll \frac{1}{\omega C}$, то в початковий момент відбувається великий сплеск струму, що набагато перевищує амплітуду струму $\left(\frac{I_m}{\omega CR}\right)$. Однак такий великий струм проходить незначну частину періоду, тому що, а тому $\tau \ll T$.

7.10 Розряд конденсатора на RL-коло

Розглянемо схему, зображену на рис. 7.16.

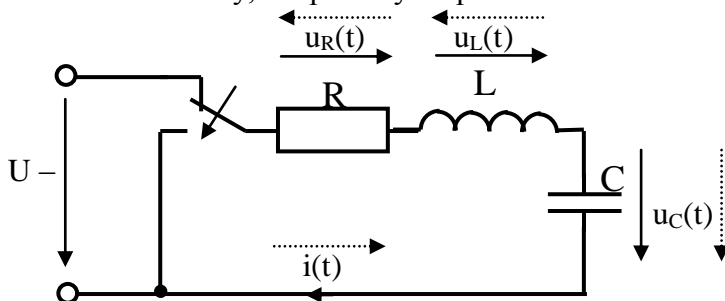


Рисунок 7.16

1. Складемо диференціальне рівняння:

$$u_R + u_L + u_C = 0,$$

$$iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = 0,$$

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0,$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2 \frac{R}{2L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0,$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\delta \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0,$$

де $\frac{R}{2L} = \delta$ – коефіцієнт загасання; $\frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$ – власна частота контуру (резонансна).

2. Запишемо загальний розв'язок диференціального рівняння $i = i_{вм} + i_{в}$.

3. Визначимо вимушену складову $i_{np} = 0$.

4. Складемо характеристичне рівняння $p^2 + 2\delta p + \omega_0^2 = 0$.

5. Запишемо вираз для вільної складової

$$i_{св} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

Знайдемо корені характеристичного рівняння

$$p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}.$$

6. Запишемо вираз для вільної складової

$$i = i_{св} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

За першим законом комутації

$$i \Big|_{t=0-} = i \Big|_{t=0+} = 0; \quad i \Big|_{t=0+} = A_1 + A_2 \Rightarrow A_1 + A_2 = 0.$$

Запишемо вхідний опір кола $Z_{ex} \Big|_{\omega} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$.

На основі виразу для вхідного опору складемо характеристичне рівняння

$$R + pL + \frac{1}{pC} = 0 \Rightarrow \frac{Rp}{L} + p^2 + \frac{1}{LC} = 0.$$

У результаті одержали таке ж саме характеристичне рівняння, що і у пункті 4

$$p^2 + 2\delta p + \omega_0^2 = 0.$$

Для визначення сталі інтегрування в рівняннях n-го порядку знаходять початкові значення шуканого струму (напруги) і всіх їхніх похідних до (n-1) включно, використовуючи рівняння кола й початкові значення струмів у котушках і напруг на конденсаторах, обумовлених за законами комутації.

Оскільки n=2, то необхідна перша похідна виразу з пункту 6:

$$\frac{di}{dt} = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}.$$

Запишемо похідну в нульовий момент часу:

$$\left(\frac{di}{dt} \right) \Big|_{t=0+} = p_1 A_1 + p_2 A_2.$$

З рівняння кола пункту 1 знайдемо вираз для похідної у нульовий момент часу:

$$i \left(R + L \frac{di}{dt} \right) + u_c = 0,$$

$$0 + L \frac{di}{dt} + U_0 = 0 \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{U_0}{L}.$$

Оскільки $-\frac{U_0}{L} = p_1 A_1 + p_2 A_2$, то запишемо систему рівнянь для визначення констант інтегрування:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 0, \\ A_1 p_1 + A_2 p_2 = -\frac{U_0}{L}. \end{cases}$$

Визначимо константи інтегрування з записаної системи рівнянь:

$$A_2 p_1 - A_2 p_2 = -\frac{U_0}{L} \Rightarrow A_2 = \frac{U_0}{L(p_1 - p_2)} = \frac{-U_0}{L(p_2 - p_1)};$$

$$A_1 p_2 - A_1 p_1 = \frac{U_0}{L} \Rightarrow A_1 = \frac{U_0}{L(p_2 - p_1)} = \frac{U_0}{L(p_1 + p_2)}.$$

7. Запишемо вирази для напруг на індуктивності та ємності

$$u_L = L \frac{di}{dt} = \frac{U_0}{-p_1 + p_2} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t});$$

$$u_c = \frac{1}{C} \int i dt + U_0 = \frac{U_0}{-p_1 + p_2} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}).$$

Характер процесів при розряді конденсатора виявляється істотно різним залежно від того, будуть корені характеристичного рівняння дійсними або комплексними, що визначається співвідношеннями між параметрами R , L і C .

Випадок 1:

$$\delta > \omega_0, \text{ тобто } \frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ або } \left(R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} \right).$$

Обидва корені p_1 та p_2 негативні, дійсні й відмінні одне від одного $p_1 \neq p_2$; $p_1 < 0$; $p_2 < 0$ і $|p_2| > |p_1|$, то вигляд вільної складової буде таким

$$i = A_1 p e^{\tau_1 t} + A_2 e^{\tau_2 t}.$$

При зміні t від 0 до ∞ величини $e^{p_1 t}$ та $e^{p_2 t}$ убувають від 1 до 0, причому тому що $|p_2| > |p_1|$ (тобто $\tau_2 < \tau_1$), а $(e^{p_1 t} - e^{p_2 t})$ завжди позитивні.

Отже, струм не змінює свого напрямку, а конденсатор увесь час розряджається.

Такий однобічний розряд конденсатора називають аперіодичним розрядом.

Струм досягає максимуму $\left(\frac{di}{dt} = 0\right)$ при $t_m = \frac{\ln \frac{p_2}{p_1}}{p_1 - p_2}$, а потім убуває.

Напруга на ємності монотонно убуває, прямуючи до нуля. При розрахунку використані умовно додатні напрямки струму та напруги. Дійсні напрямки показані на схемі пунктиром і зображені на малюнку (див. вище).

З рівняння випливає, що $u_C = -u_L + u_R$.

При $t = 0$ $u_R = iR = 0$ $u_L = u_C$.

При $t = t_m$ $u_L = L \frac{di}{dt} = 0$ $u_C = u_R$.

При $t > t_m$ струм зменшується, $u_L = L \frac{di}{dt}$ змінює знак.

З енергетичної точки зору при $t < t_m$ котушка індуктивності запасє енергію від конденсатора, а при $t > t_m$ – віддає. Побудуємо графіки струмів та напруг (рис. 7.17 та рис. 7.18).

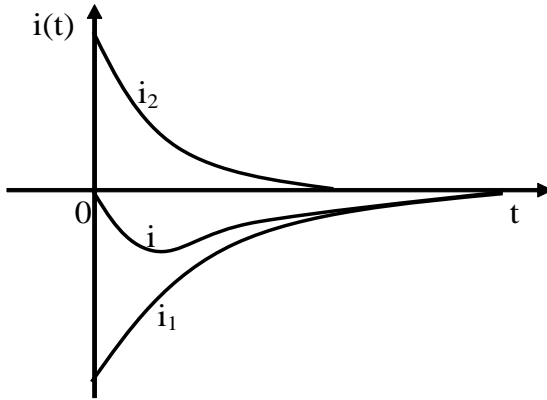


Рисунок 7.17

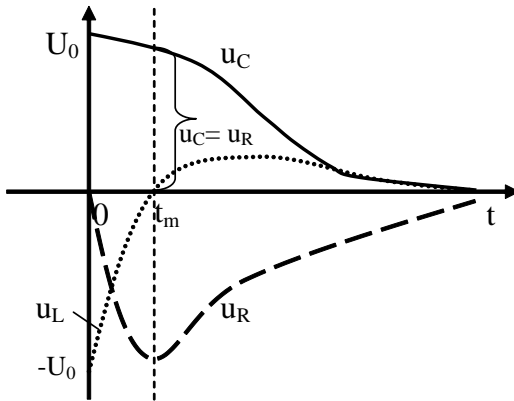


Рисунок 7.18

Випадок 2:

$$\delta = \omega_0, \text{ тобто } \frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ або } \left(R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \right).$$

Тоді корені характеристичного рівняння дійсні та рівні $p_1 = p_2 = -\delta$.

Тоді $i = \frac{U_0}{L} \frac{e^{p_1 t} - e^{p_2 t}}{p_2 - p_1} = \frac{0}{0}$ – невизначеність. Розкривши

одержаний вираз за правилом Лопітала одержимо:

$$i = \frac{-U_0}{L} t e^{-\delta t}; \quad u_L = U_0 (t-1) e^{-\delta t}; \quad u_C = U_0 (t+1) e^{-\delta t}.$$

Процес – аперіодичний $\left(t_m = \frac{1}{\delta} \right)$.

Даний випадок при $\delta = \omega_0$ є граничним випадком аперіодичного розряду, тому що при подальшому зменшенні $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ розряд стає коливальним.

Випадок 3:

$$\delta < \omega_0, \text{ тобто } \frac{R}{2L} < \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ або } R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Корені комплексно спряжені:

$$p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_R,$$

$$p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta \pm j\omega_R,$$

де $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ – кутова частота загасаючих коливань.

$$\text{Тоді } p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_R = \omega_0 e^{\pm j\nu},$$

де $\omega_0 = \sqrt{\delta^2 + \omega_R^2}$; $\nu = \text{arctg} \frac{\omega_R}{-\delta} \left(\frac{\pi}{2} < \nu < \pi \right)$;

$$p_1 = -\delta + j\omega_R = \omega_0 e^{-j\nu}; \quad p_2 = -\delta - j\omega_R = \omega_0 e^{+j\nu}.$$

Для струму:

$$\begin{aligned} i &= \frac{U_0}{L} \frac{e^{p_1 t} - e^{p_2 t}}{p_2 - p_1} = \frac{-U_0}{2j\omega_R L} \left(e^{-\delta t} e^{j\omega_R t} - e^{-\delta t} e^{-j\omega_R t} \right) \\ &= -\frac{U_0}{\omega_R L} e^{-\delta t} \sin \omega_R t \Rightarrow i = -I_m e^{\delta t} \sin \omega_R t; \end{aligned}$$

$$u_L = -U_0 \frac{\omega_0}{\omega_R} e^{-\delta t} \sin(\omega_R t + \psi);$$

$$u_C = -U_0 \frac{\omega_0}{\omega_R} e^{-\delta t} \sin(\omega_R t - \psi);$$

$$u_{L_m} = I_m \omega_0 L; \quad u_{C_m} = I_m \frac{1}{\omega \alpha}.$$

Процес коливальний. Струм і напруги на всіх ділянках періодично змінюють знак. Амплітуда коливань убуває за показовим законом – *загасаючі коливання* з кутовою частотою $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ та періодом $T_R = \frac{2\pi}{\omega_R}$.

При $R = 0 \Rightarrow \delta = 0$; $\omega_R = \omega_0$; $T_R = T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ – формула Томпсона – незатухаючі коливання з періодом T_0 ; ω_0 – резонансна (власна) частота контуру. При цьому $\psi = \frac{\pi}{2}$ й у колі встановлюється режим, що повністю відповідає сталому процесу в ньому при резонансі.

Розглянемо енергетичні процеси (рис. 7.19).

Від 0 до $t_1 = t_m$ струм зростає та режим відповідає аперіодичному, тобто L накопичує енергію, R розсіює, C віддає.

Від t_1 до t_2 :

$p_C < 0$ – C віддає;

$p_L < 0$ – L віддає;

$p_R > 0$ – R розсіює.

Від t_2 до t_3 конденсатор C повністю розрядився, струм, підтримуваний ЕРС самоіндукції, продовжує проходити у тому ж напрямку та заряджає конденсатор ($\phi_L < 0$, $p_C > 0$, $p_R > 0$). Енергія магнітного поля частково переходить в енергію електричного поля конденсатора та частково перетворюється в теплоту на опорі R. До часу t_3 конденсатор Cз заряджається максимально. У цей момент $i = 0$.

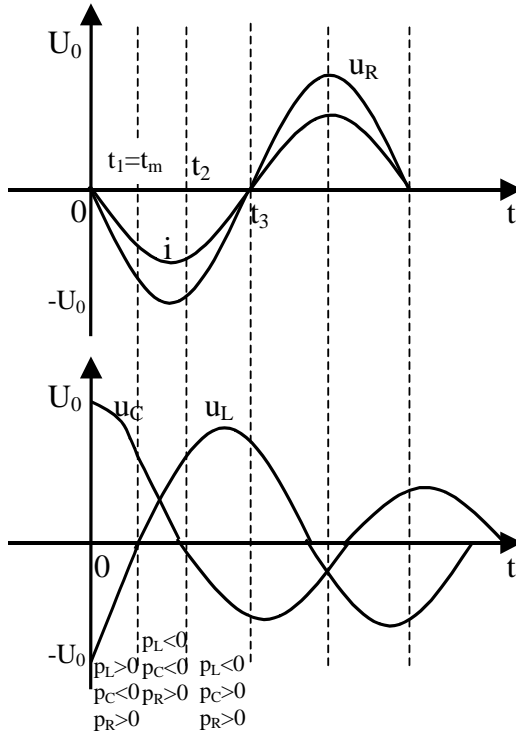


Рисунок 7.19

У наступну половину періоду процеси повторюються, але знаки напруг і струми зміняться на протилежні. Таким чином, залежно від співвідношення параметрів можливі такі режими розряду конденсатора (рис. 7.20).

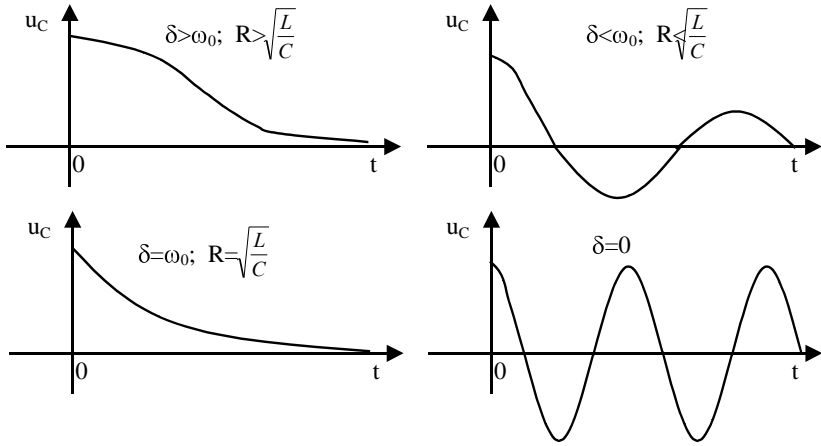


Рисунок 7.20

7.11 Підключення RLC-кола до джерела постійної напруги

Розглянемо коло, зображене на рис. 7.21.

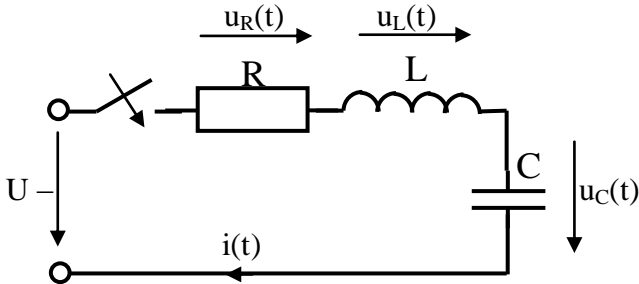


Рисунок 7.21

1. Складемо диференціальне рівняння для схеми

$$u_R + u_L + u_C = U,$$

$$iR + L \frac{di}{dt} + u_C = U,$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\delta \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0.$$

2. Запишемо загальний розв'язок диференціального рівняння $i = i_{\text{вим}} + i_e$.

3. Запишемо вираз для вимушеної складової $i_{\text{вим}} = 0$.

4. Складемо характеристичне рівняння $p^2 + 2\delta p + \omega_0^2 = 0$.

Запишемо корені характеристичного рівняння $p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$; $p_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$; $p_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$.

5. Запишемо загальний вираз для вільної складової $i = i_e = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$.

6. На основі першого закону комутації $i_{\text{L}} = i_{\text{C}} = 0$.

Запишемо рівняння для пошуку констант інтегрування

$$i_{\text{C}} = A_1 + A_2 = 0;$$

$$i_{\text{L}} = R i + L \frac{di}{dt} + u_C = U \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{U}{L};$$

$$\frac{di}{dt} = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t} \Rightarrow \frac{di}{dt} = A_1 p_1 + A_2 p_2 = \frac{U}{L}.$$

Одержали ту ж систему рівнянь для визначення констант інтегрування, що й у попередньому підрозділі. Змінився тільки знак (-) на (+) перед $\frac{U}{L}$. Причина - замість розряду конденсатора має місце його заряд від джерела постійної напруги.

Запишемо вирази для констант інтегрування:

$$A_1 = L \frac{-U}{L(p_1 - p_2)}; \quad A_2 = \frac{+U}{L(p_1 + p_2)}.$$

7. Запишемо загальні вирази для шуканих величин:

$$i = \frac{U}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t});$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{U}{C(p_1 - p_2)} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}) + U;$$

$$u_L = \frac{U}{C(p_1 - p_2)} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}).$$

Порівнюючи отримані вирази для i , u_c з аналогічними виразами для цих величин, отриманими в попередньому розділі для випадку розрядження конденсатора, бачимо, що закон зміни струму в обох випадках той самий і струми відрізняються тільки знаками, тому що тепер розглядається процес заряджання конденсатора. Напруга ж на конденсаторі при розряджанні змінюється від початкового значення до 0, а при заряджанні - від 0 до напруги живлення.

Характер перехідного процесу, які при розряджанні конденсатора, залежить від параметрів кола, від співвідношення коефіцієнта загасання δ і власної частоти контуру ω_0 , від того, будуть корені характеристичного рівняння дійсними (аперіодичний процес) чи комплексними (коливальний процес).

7.12 Розрахунок перехідних процесів у складному колі

Алгоритм розрахунку звичайний, особливість - складання характеристичного рівняння.

1. Для визначення коренів:

а) знайти головний визначник системи диференціальних рівнянь, складеної:

- 1) за законами Кірхгофа;
- 2) за методом контурних струмів;
- 3) за методом вузлових напруг;

та прирівняти його нулю;

б) скласти комплексний вхідний опір кола для джерела синусоїдальної ЕРС, включене в будь-якій гілці кола, замінити $j\omega$ на p та прирівняти до нуля.

Приклад 7.2. Розглянемо схему, зображену на рис. 7.22. Одержати характеристичні рівняння.

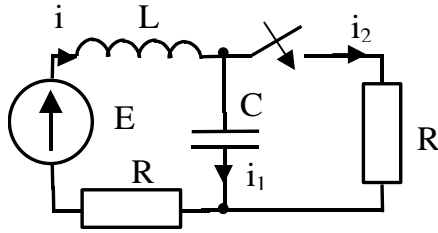


Рисунок 7.22

Запишемо визначники:

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ Rp + Lp^2 & 1/C & 0 \\ 0 & -1/C & Rp \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta^{(\kappa)}(p) = \begin{vmatrix} R + Lp + \frac{1}{pC} & -\frac{1}{pC} \\ -\frac{1}{pC} & R + \frac{1}{pC} \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta^{(y)}(p) = \frac{1}{R + Lp} + pC + \frac{1}{R} = 0.$$

Запишемо вирази для вхідних опорів:

$$Z_{\text{вх}}(p) = R + Lp + \frac{R}{R + pC} = 0;$$

$$Z_{1\text{вх}}(p) = \frac{1}{pC} + \frac{R + pL}{R + pL + R} = 0;$$

$$Z_{2\text{вх}}(p) = R + \frac{R + pL}{R + pL + \frac{1}{pC}} = 0.$$

Корені характеристичного рівняння визначаються тільки топологією кола після комутації та значенням її параметрів.

Число коренів характеристичного рівняння дорівнює числу накопичувачів енергії.

1. Наявність особливого контуру, що складається тільки з ємнісних елементів і джерел ЕРС, зменшує число коренів на 1 порівняно із числом ємнісних накопичувачів (рис. 7.23).

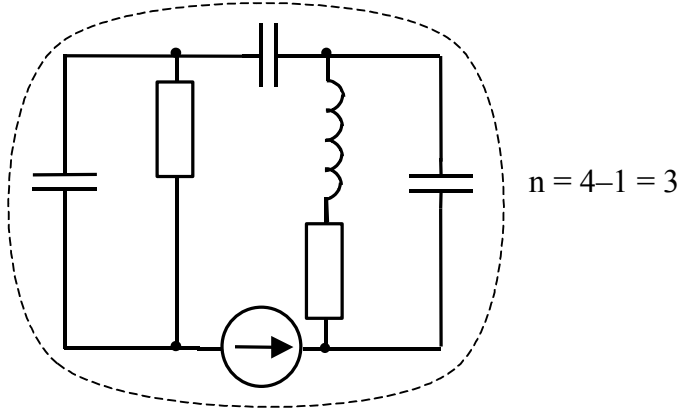


Рисунок 7.23

2. Наявність особливого перетину, в якому в кожній гілці є індуктивний елемент або джерело струму зменшує число коренів на 1 порівняно із числом індуктивних накопичувачів (рис. 7.24).

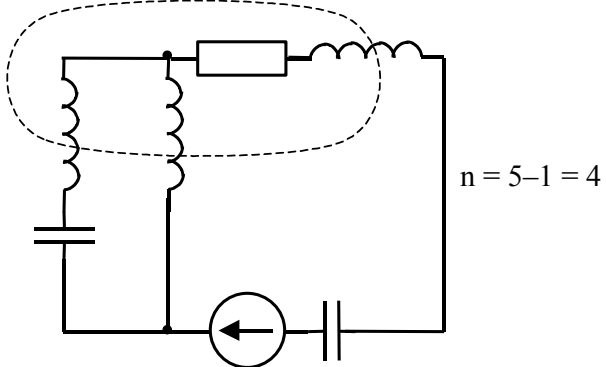


Рисунок 7.24

3. В особливих випадках, коли коло після комутації розпадається на окремі гілки, загальне правило не виконується (рис. 7.25).

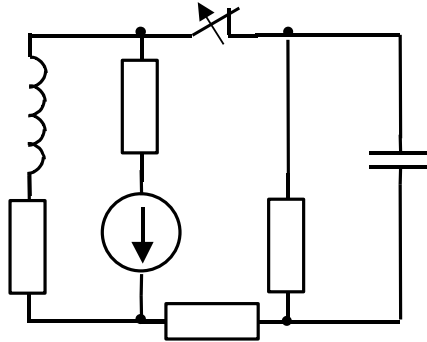


Рисунок 7.25

Розрахунок перехідного процесу в колах із взаємною індуктивністю здійснюється звичайним шляхом.

Урахування індуктивних зв'язків не збільшує числа коренів характеристичного рівняння.

7.13 Метод змінних стану

Ідея методу полягає у виділенні таких шуканих величин, які визначають енергетичний стан електричного кола, тому що перехідний процес є процесом переходу від одного сталого енергетичного стану до іншого. А оскільки що енергетичний стан у лінійних електричних колах повністю визначається струмами індуктивних котушок і напругами конденсаторів, то, мабуть, що як шукані величини, що визначають стан кола, вибирають саме їх.

Отже, ідея методу полягає у виділенні як шуканих величини струмів індуктивних котушок і напруг конденсаторів.

Струми індуктивних котушок і напруги конденсаторів називають змінними стану.

Струми та напруги резистивних елементів схеми, що називаються *вихідними величинами*, завжди можуть бути виражені через змінні стани за допомогою законів Кірхгофа.

Очевидно, що у систему диференціальних рівнянь для електричного кола будь-якої конфігурації, складеної за законами Кірхгофа, входять тільки перші похідні змінних станів.

Це дозволяє для схеми після комутації замість одного неоднорідного диференціального рівняння n -го порядку одержати n диференціальних рівнянь першого порядку щодо обраних змінних стану (рівняння стану). Метод найбільш універсальний для аналізу електричних кіл і може бути легко пристосований для розрахунку на ЕОМ.

Тому, склавши вихідну систему диференціальних рівнянь, складену за законами Кірхгофа, щодо змінних стану, одержують систему диференціальних рівнянь 1-го порядку щодо змінних стану, для числового розв'язання якої можна використати стандартне математичне забезпечення ЕЦОМ (або аналогових обчислювальних машин.)

Під числовими методами розв'язання диференціальних рівнянь розуміють методи, що дають наближене розв'язання у вигляді дискретного набору значень функції при деяких значеннях аргумента (Метод Рунге-Куты, метод Пікара, метод Мілна, екстраполяційний метод Адамса, метод із використанням ряду Тейлора).

З теорії диференціальних рівнянь відомо, що всяке рівняння або система рівнянь, одержана щодо старших похідних всіх шуканих функцій $\left[\tilde{y} = f(\tilde{y}, y, y^1, \dots, y^{\tilde{n}-1}) \right]$, може бути наведена шляхом введення нових невідомих функцій до нормальної форми Коші:

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_2' &= f_2(y_1, y_2, \dots, y_n), \\ &\vdots \\ y_n^1 &= f_n(y_1, y_2, \dots, y_n). \end{aligned}$$

Завдання знаходження розв'язання рівнянь при заданих початкових даних називається завданням Коші.

Алгоритм розрахунку

1. Складаємо диференціальні рівняння для похідних від змінних стану (рівняння стану).

Для цього складаємо рівняння за законами Кірхгофа для схеми після комутації та розв'язуємо їх відносно похідних змінних станів залежно від самих змінних стану u_C та i_L , джерел ЕРС і струмів.

Одержуємо систему диференціальних рівнянь першого порядку щодо змінних станів.

2. Рівняння стану записуємо у матричній формі та розв'язуємо аналітично або числовими методами з використанням стандартного математичного забезпечення ЕЦВМ (Метод Рунге-Кутта, Ейлера, трапеції, Пікара, Мілна, екстраполяційний метод Адамса, метод з використанням ряду Тейлора).

$$\begin{pmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \\ \vdots \\ u_{C_k} \\ \vdots \\ u_{C_{k+1}} \\ \vdots \\ u_{C_n} \end{pmatrix} = \|A_1\| \times \begin{pmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \\ \vdots \\ u_{C_k} \\ \vdots \\ u_{C_{k+1}} \\ \vdots \\ u_{C_n} \end{pmatrix} + \|B_1\| \times \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ J_k \\ \vdots \\ J_q \end{pmatrix}$$

де A_1 – квадратна матриця порядку n ; B_1 – матриця розміру $n \times q$, де q - загальне число джерел ЕРС і струму; X – стовпцеві матриці розміру $n \times 1$ змінних стану i і їх похідних $\|x\| = \|A_1\| \times \|x\| + \|B_1\| \times \|V\|$; V – стовпцева матриця розміру $q \times 1$ напруг джерел ЕРС і струмів джерел струму.

Елементи A_1 та B_1 визначаються тільки параметрами схеми і її топологією.

3. Струми та напруги резистивних елементів схеми, називані вихідними параметрами, завжди можуть бути виражені та розраховані через змінні стани за допомогою законів Кірхгофа.

У результаті одержимо систему алгебраїчних рівнянь, що встановлює зв'язок між шуканими вихідними параметрами, змінних стану та джерелами енергії (рівняння вихідних параметрів).

4. Записуємо рівняння для вихідних параметрів у матричній формі та розв'язуємо їх аналітично або за допомогою ЕЦОМ:

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ u_k \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = \|A_2\| \times \begin{pmatrix} i_{L_1} \\ \vdots \\ u_{Ck} \\ \vdots \\ u_{Cn} \end{pmatrix} + \|B_2\| \times \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ J_k \\ \vdots \\ J_q \end{pmatrix} \quad \text{або} \quad \|Y\| = \|A_2\| \times \|x\| + \|B_2\| \times \|V\|$$

де Y – стовпцева матриця розміру $m \times 1$ вихідних параметрів; m - число вихідних параметрів; A_2, B_2 – матриці розміру $m \times n$ та $m \times q$, елементи яких визначаються параметрами та топологією схеми.

Приклад 7.3. Для схеми, що зображена на рис. 7.26, одержати рівняння змінних стану.

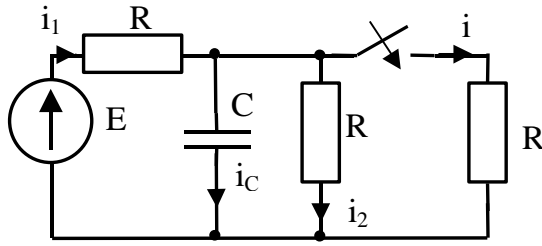


Рисунок 7.26

Розв'язання

Складемо систему рівнянь для схеми після комутації на основі законів Кірхгофа:

$$\begin{cases} -i_1 + i_c + i_2 + i = 0, \\ Ri + u_c = E, \\ u_c - Ri_2 = 0, \\ u_c - Ri = 0. \end{cases}$$

Урахуємо, що $u_L = L \frac{di_L}{dt}$; $i_c = C \frac{du_c}{dt}$.

Тоді одержимо $\frac{du_c}{dt} = -\frac{3}{RC}u_c + \frac{1}{RC}E$.

Приклад 7.4. Для схеми, зображеної на рис. 7.27, одержати рівняння змінних стану.

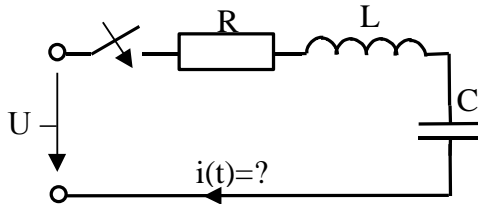


Рисунок 7.27

Розв'язання

Складемо рівняння на основі другого закону Кірхгофа:

$$iR + L \frac{di}{dt} + u_C = U.$$

Урахуємо, що $u_L = L \frac{di_L}{dt}$; $i_c = C \frac{du_c}{dt}$.

Тоді одержимо рівняння змінних стану

$$\begin{cases} \frac{du_c}{dt} = 0 \cdot u_c + \frac{1}{C} i + 0 \cdot U, \\ \frac{di}{dt} = -\frac{1}{L} u_c - \frac{R}{L} i + \frac{1}{L} \cdot U. \end{cases}$$

Приклад 7.5. Для схеми, зображеної на рис. 7.28, одержати рівняння змінних стану.

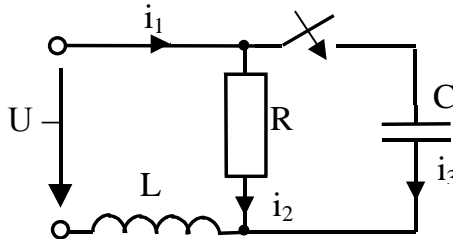


Рисунок 7.28

Розв'язання

Складемо систему рівнянь на основі другого закону Кірхгофа

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_3, \\ Ri_2 + L \frac{di_1}{dt} = U, \\ Ri_2 - u_c = 0. \end{cases}$$

Урахуємо, що $u_L = L \frac{di_L}{dt}$; $i_c = C \frac{du_c}{dt}$.

Тоді

$$\begin{cases} \frac{du_c}{dt} = -\frac{1}{RC} \cdot u_c + \frac{1}{C} i_L + 0 \cdot U, \\ \frac{di}{dt} = -\frac{1}{L} u_c + 0 \cdot i_L + \frac{1}{L} \cdot U. \end{cases}$$

7.14 Розрахунок кола при впливі ЕРС довільної форми. Інтеграл Дюамеля

Аналіз перехідних процесів у колах (рис. 7.29) показав, що струм на вході кола $i(t)$ пропорційний вхідній напрузі, що викликала цей струм:

$$i \stackrel{\text{в}}{\leftarrow} \equiv \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}} \right),$$

Оскільки $Y \stackrel{\text{в}}{\leftarrow} \equiv \frac{1}{R} \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}} \right)$ – перехідна провідність кола.

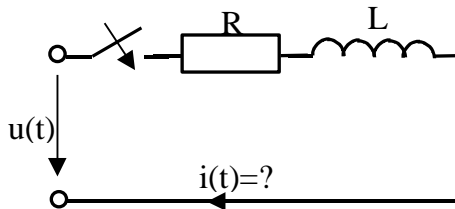


Рисунок 7.29

Таким чином, коло у загальному випадку може розглядатися як пасивний двополюсник з перехідною провідністю $Y(t)$.

Замінімо дійсну криву $u(t)$ наближено східчастою з інтервалами за віссю t , що дорівнюють Δx . Тоді струм у будь-який момент часу t можна розглядати як результат впливу серії стрибкоподібних постійних напруг, що йдуть один за одним через проміжки Δx в інтервалі від 0 до t .

Зміна напруги: $\Delta u \approx \frac{du}{dx} \Delta x$; $du = u' \llcorner dx$.

Складова струму, викликана окремим стрибком напруги, що діє в момент x , дорівнює

$$\Delta i = \Delta u \cdot Y \llcorner -x - \Delta x \llcorner,$$

де $Y \llcorner -x - \Delta x \llcorner$ – перехідна провідність від моменту $\llcorner + \Delta x \llcorner$ виникнення даного стрибка напруги до моменту t відліку значення струму (рис. 7.30).

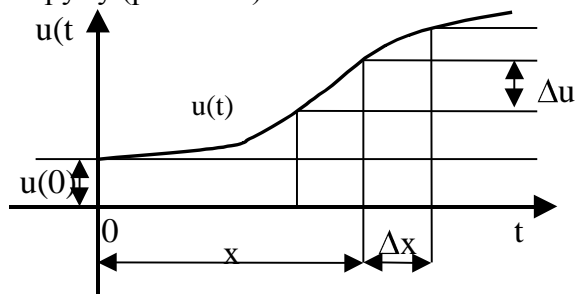


Рисунок 7.30

Весь струм $i(t)$ є сумою складових струмів, викликаних окремими стрибками напруг:

$$i \llcorner \approx u \llcorner \cdot Y \llcorner + \sum_{x=0}^{x=t} Y \llcorner -x - \Delta x \llcorner u' \llcorner \Delta x,$$

або $i \llcorner = u \llcorner \cdot Y \llcorner + \int_0^t Y \llcorner -x \llcorner u' \llcorner dx$ – інтеграл Дюамеля,

де $u' \llcorner = \left(\frac{du}{dt} \right)_{t=x}$.

Інтеграл Дюамеля дозволяє розв'язати завдання про включення кола під дією напруги $u(t)$ довільної форми, причому $Y(t)$ визначається в результаті розв'язання більш простого завдання – включення того ж кола під дією постійної напруги.

Приклад 7.6. На коло, зображене на рис. 7.31, діє напруга, що зображена на рис. 7.32. Коло має такі параметри R, C . Аналітичний вираз напруги $u \llcorner \Rightarrow U \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$. Знайти струм $i(t)$ у колі.

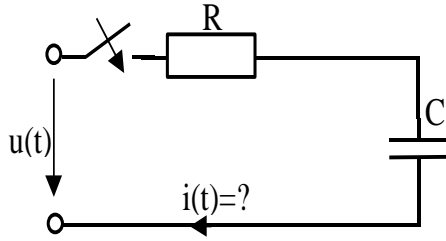


Рисунок 7.31

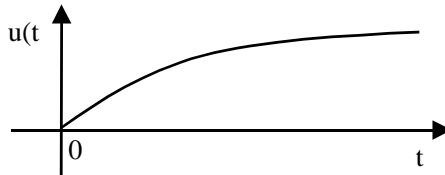


Рисунок 7.32

Розв'язання

1. Визначаємо $Y(t)$ при включенні кола на постійну напругу. Тоді $Y \llcorner \Rightarrow \frac{i \llcorner}{U}$,

$$i \llcorner \Rightarrow \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow Y \llcorner \Rightarrow \frac{i \llcorner}{U} = \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

2. Запишемо вираз для провідності

$$Y \llcorner -x \Rightarrow \frac{1}{R} e^{-\frac{-x}{\tau}} = \frac{1}{R} e^{-\frac{x}{\tau}} e^{\frac{x}{\tau}}.$$

3. Знайдемо значення струму:

$$u \llcorner \Rightarrow 0; \quad u' \llcorner \Rightarrow \frac{U}{T} e^{-\frac{t}{T}}; \quad u' \llcorner \Rightarrow \frac{U}{T} e^{-\frac{x}{T}}$$

4. Запишемо вираз для струму

$$i(t) = u(t) \cdot Y(s) + \int_0^t Y(s) (-x) u'(t-x) dx.$$

5. Запишемо повний вираз для струму

$$\begin{aligned} \int_0^t Y(s) (-x) u'(t-x) dx &= \\ &= \int_0^t \frac{1}{R} e^{-\frac{t-x}{\tau}} e^{\frac{x}{\tau}} \frac{U}{T} e^{-\frac{x}{T}} dx = \frac{U}{RT} e^{-\frac{t}{\tau}} \int_0^t e^{\frac{x}{\tau}} e^{-\frac{x}{T}} dx = \\ &= \frac{U}{R T - \tau} \left(e^{\frac{t}{T}} - e^{\frac{t}{\tau}} \right). \end{aligned}$$

7.15 Основні положення операторного методу аналізу перехідних процесів

Операторний метод як математичний метод інтегрування лінійних диференціальних рівнянь створений у 1862 р. М. Ващенко-Захарченко. Хевісайд наприкінці XIX століття застосував для розрахунку перехідних процесів перетворення Лапласа

$$F(p) = Z \{ f(t) \}.$$

При використанні операторного методу дійсні функції часу, названі оригіналами, замінюють їх операторними зображеннями. Відповідність між оригіналом і зображенням встановлюється за допомогою інтеграла Лапласа (перетворення Лапласа)

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt,$$

де $p = a + jb$ - комплексне число, тобто операторне зображення дійсної функції, є функцією комплексного числа p .

У результаті операції диференціювання та інтегрування оригіналів замінюються алгебраїчними операціями над їх зображеннями - відбувається алгебраїзація диференціальних рівнянь, тобто диференціальні рівняння для оригіналів переходять в ал-

гебраїчні рівняння для їх зображень. Розв'язавши отримані алгебраїчні рівняння у операторній формі щодо шуканих величин і зробивши зворотне перетворення операторного зображення в оригінал, одержуємо розв'язання (інтеграл) вихідних диференціальних рівнянь.

Відповідність між оригіналом і зображенням записують так

$$F \langle \phi \rangle = f \langle \cdot \rangle.$$

Розмірність зображення дорівнює розмірності оригіналу, помноженої на розмірність часу.

За визначенням перетворення Лапласа застосовується, починаючи з моменту часу $t = 0_+$. Тому під $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ і т.д. будемо розуміти початкові значення функції і її похідних при $t = 0_+$.

Зворотне перетворення Лапласа

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F \langle \phi \rangle e^{pt} dt = f \langle \cdot \rangle,$$

$$f \langle \cdot \rangle = Z^{-1} [F \langle \phi \rangle].$$

Подано зображення деяких функцій:

$$\int_0^{\infty} A e^{-pt} dt = -\frac{A}{p}, \quad A \Leftrightarrow \frac{A}{p}, \quad e^{\alpha t} \Leftrightarrow \frac{1}{p - \alpha}.$$

Диференціювання функції

$$f' \langle \cdot \rangle = \frac{df}{dt} \Leftrightarrow p F \langle \phi \rangle - f \langle \cdot \rangle.$$

Інтегрування функції

$$\int_0^t f \langle \cdot \rangle dt \Leftrightarrow \frac{F \langle \phi \rangle}{p}.$$

Зображення похідної другого порядку

$$f'' \langle \cdot \rangle \Leftrightarrow p^2 \left[F \langle \phi \rangle - \frac{f \langle \cdot \rangle}{p} - \frac{f' \langle \cdot \rangle}{p^2} \right].$$

Зображення похідної n-го порядку

$$f^n \overset{\sim}{\leftarrow} \Leftrightarrow p^n \left[F \overset{\sim}{\leftarrow} - \frac{f \overset{\sim}{\leftarrow}}{p} - \frac{f' \overset{\sim}{\leftarrow}}{p^2} - \dots - \frac{f^{n-1} \overset{\sim}{\leftarrow}}{p^n} \right].$$

Для електричних кіл:

а) зображення напруги на котушці індуктивності

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = LpI \overset{\sim}{\leftarrow} - Li \overset{\sim}{\leftarrow} = U_L \overset{\sim}{\leftarrow};$$

б) зображення напруги на резисторі

$$u_R = iR = I \overset{\sim}{\leftarrow} R = U_R \overset{\sim}{\leftarrow};$$

в) зображення напруги на конденсаторі

$$u_C = \frac{1}{c} \int_0^t i dt + u_C \overset{\sim}{\leftarrow} = \frac{I \overset{\sim}{\leftarrow}}{pc} + \frac{u_C}{p} = U_C \overset{\sim}{\leftarrow};$$

г) зображення змінної напруги

$$E_m e^{j\omega t} = E_m \frac{1}{p - j\omega t}.$$

При нульових початкових умовах

$$f^n \overset{\sim}{\leftarrow} = p^n F \overset{\sim}{\leftarrow}.$$

7.16 Закони Ома та Кірхгофа у операторній формі

Отже, з урахуванням вище викладеного коло, що зображене на рис. 7.33 у операторній формі, має вигляд, що зображений на рис. 7.34.

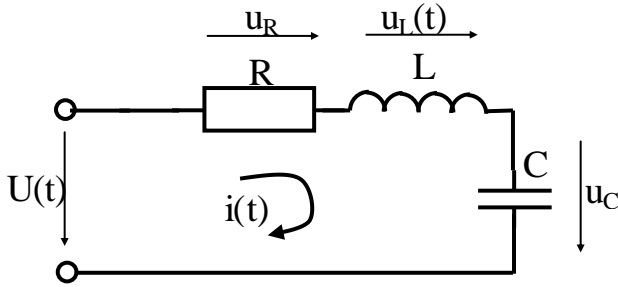


Рисунок 7.33

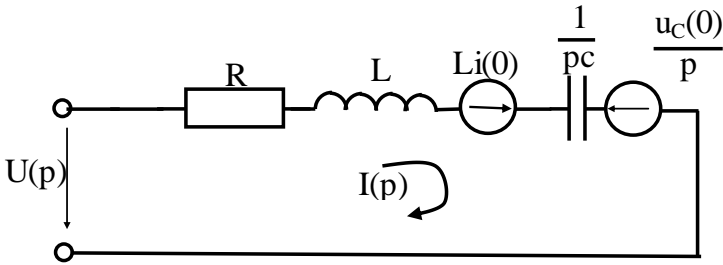


Рисунок 7.34

Запишемо систему рівнянь на основі другого закону Кірхгофа для кола, що зображене на рис. 7.33:

$$u_R + u_L + u_C = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = u$$

Запишемо рівняння на основі другого закону Кірхгофа для кола, що зображене на рис. 7.35:

$$I \overline{R} + I \overline{pL} - Li \overline{+} + \frac{I \overline{+}}{pc} + \frac{u_C \overline{+}}{p} = U \overline{+}$$

З одержаного рівняння виразимо струм:

$$I \overline{+} = \frac{U \overline{+} + Li \overline{+} - \frac{u_C \overline{+}}{p}}{R + Lp + \frac{1}{pc}} = \frac{U \overline{+} + Li \overline{+} - \frac{u_C \overline{+}}{p}}{Z \overline{+}}$$

де $Z \llcorner = R + pL + \frac{1}{pC}$ - операторний опір кола, $Li \llcorner$ і $\frac{u_C \llcorner}{p}$ - внутрішні ЕРС, обумовлені законом енергії в магнітно-

му полі котушки та електричному полі конденсатора.

Закон Ома при ненульових початкових умовах

$$I \llcorner = \frac{U \llcorner + Li \llcorner - \frac{u_C \llcorner}{p}}{Z \llcorner}$$

Запишемо другий закон Кірхгофа у операторній формі

$$\sum I_K \llcorner Z_K \llcorner = \sum E_K \llcorner + \sum L_K i_K \llcorner = \sum \frac{u_{C_K} \llcorner}{p}$$

При нульових початкових умовах

$$I \llcorner = \frac{U \llcorner}{Z \llcorner}$$

Очевидно, що отримані вирази тотожні за структурою виразам, написаним для тих самих електричних кіл при їх розрахунку символічним методом. А це означає, що всі відомі методи розрахунку, що ґрунтуються на законах Кірхгофа (метод контурних струмів, вузлових потенціалів і т.п.), можуть бути використані для розрахунку перехідних процесів операторним методом. Необхідно тільки враховувати початкові умови $u_C(0+)$ і $i(0+)$.

Для цього досить розглядати члени як ЕРС додаткових джерел енергії в контурах.

7.17 Алгоритм розрахунку перехідних процесів операторним методом

У загальному випадку розрахунку перехідних процесів операторним методом алгоритм розрахунку струмів:

1. Записуються інтегрально-диференціальні рівняння для схеми після комутації на підставі законів Кірхгофа для миттєвих значень. Залежно від конфігурації схеми можна застосувати один з відомих методів розрахунку кіл (контурних струмів, вузлових потенціалів і т.д.).

1.1. Визначають внутрішні ЕРС $Li \overset{\sim}{\square}$ та $\frac{u_c \overset{\sim}{\square}}{p}$ розраховують кола до комутації, визначають незалежні початкові умови $u_c(0+)$ і $i(0+)$, при цьому напрямок внутрішньої ЕРС індуктивності $Li \overset{\sim}{\square}$ збігається зі струмом, а напрямок внутрішньої ЕРС ємності протилежний напрямку струму гілки з конденсатором.

1.2. Користуючись перетвореннями Лапласа або готовими таблицями перетворення, знаходять зображення заданих вхідних напруг, ЕРС, струмів джерел струму.

2. В отриманих рівняннях роблять заміну оригіналів функцій часу на їх операторне зображення з урахуванням незалежних початкових умов - струмів через індуктивні елементи та напруг на ємнісних елементах, розрахованих для схеми до комутації.

3. Отримані алгебраїчні рівняння для операторних зображень розв'язують щодо зображення шуканої функції.

4. На основі отриманого зображення знаходять оригінал шуканої функції.

Практично при розрахунку перехідних процесів операторним методом можна обійтися без запису інтегрально-диференціальних рівнянь.

Алгоритм розрахунку в такому випадку такий:

1. Заміняють вихідну схему після комутації на операторну схему (або схему для зображень). При цьому варто керуватися положеннями, поданими на рис. 7.35.

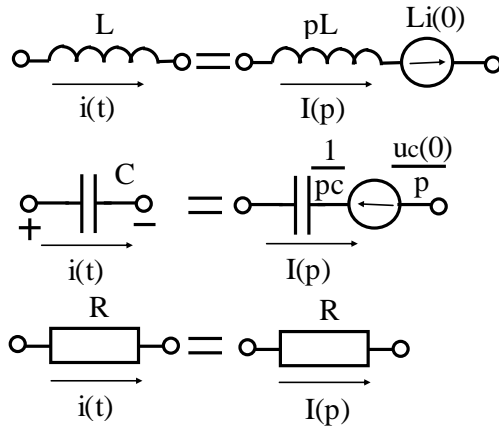


Рисунок 7.35

Тут так називані внутрішні ЕДС ураховують незалежні початкові умови - струми через індуктивні котушки та напругу на конденсаторах, розраховані для схеми після комутації.

1. Завжди $Li(0)$ збігається з $I\phi$, а $\frac{u_c}{p}$ - протилежно до напрямку $I\phi$.

Схеми, зображені на рис. 7.36, подамо у операторній формі (рис. 7.37).

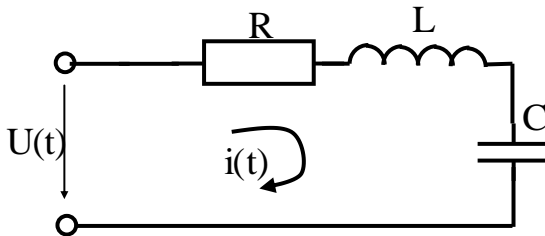


Рисунок 7.36

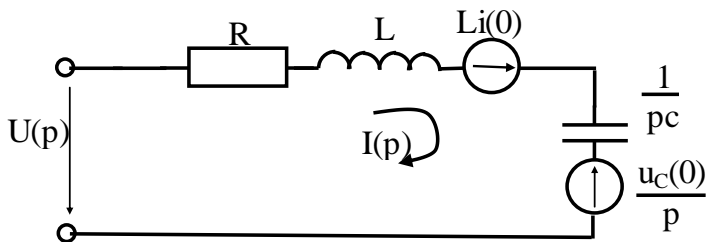


Рисунок 7.37

2. Очевидно, що операторна схема може бути отримана з вихідної, призначеної для сталого гармонічного режиму шляхом заміни $j\omega$ на p і з урахуванням ненульових початкових умов.

2. Для отриманої операторної схеми розраховуємо зображення шуканих струмів і напруг одним із відомих методів (безпосереднього застосування законів Кірхгофа, контурних струмів і т.д.).

3. На основі отриманих зображень знаходимо оригінал шуканої функції.

7.18 Знаходження оригіналу за зображенням

1. Табличний метод

Існують таблиці, що містять зображення різних функцій та їх оригінали (наприклад, Діткін В.А. і Кузнецов П.И. Довідник по операційному численню містить приблизно 1518 зображень та їх оригіналів).

2. Теорема розкладання.

З курсу математики відомо, що дріб вигляду

$$\frac{M \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \right)}{N \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \right)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}, \text{ де } m < n,$$

може бути розкладена на суму простих дробів

$$\frac{M \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \right)}{N \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \right)} = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \dots + \frac{A_K}{p - p_K} + \frac{A_m}{p - p_n} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{p - p_k}$$

де p_k – корінь рівняння $N(p)=0$, $A_k = \frac{M(p_k)}{N'(p_k)}$ – коефіцієнти розкладання.

Цю рівність і називають теоремою розкладання. Порівняння операторного та класичного методів показує, що коефіцієнти розкладання являють собою сталі інтегрування.

1. Якщо серед коренів рівняння $N(p)=0$ є $p=0$, то одержимо вираз, що являє собою сталий струм або напругу у колі від джерела постійної ЕРС.

2. Якщо корені комплексно спряжені, то

$$f(t) = \sum_{k=1}^n 2 \operatorname{Re} \left[\frac{M(p_k)}{N'(p_k)} e^{p_k t} \right]$$

Приклад 7.7. Для кола, що зображене на рис. 7.38, знайти вираз для струму, якщо на вхід діє постійна напруга, номінали елементів кола відомі та позначити через R та L.

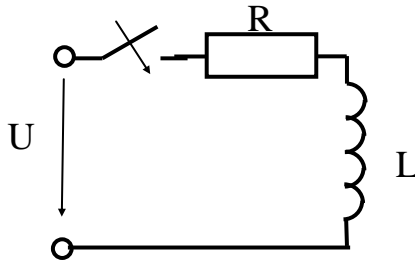


Рисунок 7.38

Розв'язання

Подамо схему у операторній формі (рис. 7.39).

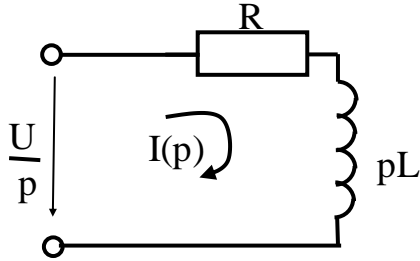


Рисунок 7.39

Нехай $L(i) = 0$.

Запишемо зображення вхідної напруги

$$U = \frac{U}{p}.$$

Знайдемо операторний струм

$$I(p) = \frac{U}{p(R + pL)} = \frac{U}{pL(\frac{R}{L} + p)} = \frac{U/L}{p(p + \frac{R}{L})} = \frac{U}{R} \frac{\frac{R}{L}}{p(p + \frac{R}{L})}.$$

За допомогою таблиць перетворення Лапласа перейдемо від зображення до оригіналу

$$i(t) = \frac{U}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}).$$

РОЗДІЛ 8 ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛОЛА ІЗ РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

8.1 Основні поняття

У принципі параметри будь-якого електричного кола (R , L , C , M , g) тією чи іншою мірою розподілені вздовж ділянок кола. Відповідно струми та напруги у такому колі для того самого моменту часу змінюються при переході від однієї точки кола до сусідньої (у будь-який момент часу струм і напруга у різних точках мають різні значення).

У більшості практичних випадків розподіл параметрів уздовж електричного кола можна не враховувати та в аналізі кіл припускати, що параметри кола зосереджені на її ділянках.

Критерієм застосовності такого підходу є співвідношення між швидкістю зміни у часі напруг і струмів у колі та швидкістю поширення електромагнітної енергії вздовж електричного кола.

Якщо це співвідношення мале, то електричне коло розглядають як коло із зосередженими параметрами.

Якщо ж ці швидкості порівнянні, то електричне коло необхідно розглядати як коло з розподіленими параметрами.

Прикладами кіл з розподіленими параметрами є електричні лінії з розподіленими параметрами (довгі лінії):

- лінії передачі електричної енергії на більші відстані;
- повітряні та кабельні лінії телефонного та телеграфного зв'язку;
- високочастотні коаксіальні лінії радіотехнічних і телевізійних пристроїв.

Очевидно, що струми та напруги в довгих лініях (лінії з розподіленими параметрами) є функціями двох незалежних змінних: часу t і координати x , відлічуваних як відстань від розглянутої точки лінії до її початку (кінця).

Відповідно процеси у довгих лініях описуються диференціальними рівняннями у частинних похідних.

Якщо параметри лінії розподілені рівномірно, то ця лінія однорідна (наприклад, лінія передачі електричної енергії, у якій перетин проводів, їх взаємне розміщення та характеристика середовища не змінюються за довжиною лінії).

Якщо параметри лінії не залежать від величини струмів, що проходять через лінію, то ця лінія лінійна.

8.2. Рівняння однорідної лінії

Розглянемо елементарну ділянку довгої лінії (рис. 8.1).

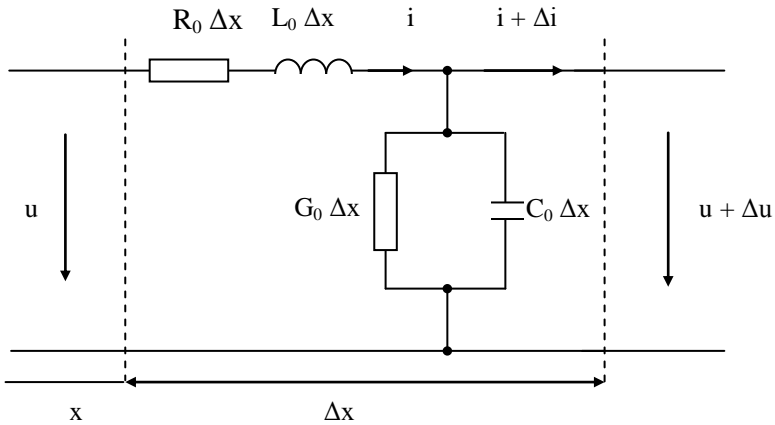


Рисунок 8.1

Нехай

- $R_0, \frac{Om}{км}$ - поздовжній активний опір одиниці довжини лінії;
- $L_0, \frac{Гн}{км}$ - індуктивність одиниці довжини лінії;
- $G_0, \frac{См}{км}$ - провідність витікання між проводами через недосконалість ізоляції на одиницю довжини;

- $C_0, \frac{\Phi}{\text{км}}$ - ємність між проводами лінії на одиницю довжини;
- I – струм на початку ділянки dx ;
- $i + \frac{\partial i}{\partial x} dx$ - струм у кінці ділянки; приріст $\frac{\partial i}{\partial x} dx$ обумовлений витіканням через поперечний елемент;
- u – напруга на початку ділянки dx ;
- $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ - напруга в кінці ділянки.

На підставі рівнянь за I та II законами Кірхгофа для ділянки лінії dx після перетворень одержимо.

За II законом Кірхгофа:

$$-u + R_0 dx i + L_0 dx \frac{\partial i}{\partial t} + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx = 0.$$

Розділимо на dx і перетворимо до вигляду

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}. \quad (1)$$

За I законом Кірхгофа:

$$i = di + i + \frac{\partial i}{\partial x} dx.$$

З урахуванням на те, що:

$$di = G_0 dx \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) + C_0 dx \frac{\partial}{\partial t} \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right),$$

і не враховуючи похідних другого порядку, одержуємо після перетворення

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2)$$

У результаті одержали основні диференціальні рівняння для двопровідної лінії з розподіленими параметрами (телеграфні рівняння):

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}, \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \end{cases}$$

8.3 Рівняння однорідної лінії при сталому синусоїдальному режимі

Якщо струм і напруга в лінії змінюються за синусоїдальним законом, то їх можна виразити у вигляді комплексних чисел

$$\dot{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_u} \quad \text{та} \quad \dot{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_i}.$$

Комплексні \dot{U} й \dot{I} залежать тільки від x , а тому рівняння в частинних похідних для миттєвих значень u та i переходять у звичайні диференціальні рівняння для \dot{U} та \dot{I}

$$\begin{cases} -\frac{d\dot{U}}{dx} = R_0 \dot{I} + j\omega L_0 \dot{I} = \underline{Z}_0 \dot{I}, \\ -\frac{d\dot{I}}{dx} = G_0 \dot{U} + j\omega C_0 \dot{U} = \underline{Y}_0 \dot{U}. \end{cases} \quad (1 \text{ й } 2)$$

Перше рівняння є повним поздовжнім опором одиниці довжини, друге рівняння є повною поперечною провідністю одиниці довжини.

Розв'яжемо отриману систему рівнянь відносно \dot{U} та одержимо

$$\frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} = \underline{R}_0 + j\omega L_0 \underline{G}_0 + j\omega C_0 \underline{U} = \underline{\gamma}^2 \dot{U} \quad (3)$$

або

$$\frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} = \underline{Z}_0 \underline{Y}_0 \dot{U} = \underline{\gamma}^2 \dot{U},$$

$$\text{де} \quad \underline{\gamma} = \sqrt{\underline{R}_0 + j\omega L_0 \underline{G}_0 + j\omega C_0} = \alpha + j\beta;$$

γ - стала поширення (1/км);

α - коефіцієнт загасання, що характеризує загасання падаючої хвилі на одиницю довжини лінії (*Нп/км*);

β - коефіцієнт фази, що характеризує зміни фази падаючої хвилі на одиницю довжини лінії (*радий/км*).

Розв'язання лінійного диференціального рівняння (3) другого порядку

$$\dot{U} = \dot{A}_2 e^{-\gamma x} + \dot{A}_1 e^{\gamma x} = \dot{U}_{\text{опр}} + \dot{U}_{\text{над}}, \quad (4)$$

де $A1$ та $A2$ – сталі інтегрування.

З першого рівняння системи

$$\dot{I} = \frac{\dot{A}_2}{\underline{Z}_e} e^{-\gamma x} - \frac{\dot{A}_1}{\underline{Z}_e} e^{\gamma x} = \dot{I}_{\text{пр}} - \dot{I}_{\text{обр}}, \quad (5)$$

де

$$\underline{Z}_e = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = Z_e e^{j\varphi_e} - \text{хвильовий опір (Ом).}$$

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0}$$

Для постійного струму ($\omega=0$):

$$\underline{\gamma} = \sqrt{R_0 G_0}; \quad \underline{Z}_e = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}} \quad \left(\begin{array}{l} \alpha = \sqrt{R_0 G_0} \\ \beta = 0 \end{array} \right).$$

Для лінійного синусоїдального струму без втрат ($R_0=G_0=0$)

$$\underline{\gamma} = j\omega\sqrt{L_0 C_0}; \quad \underline{Z}_e = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \quad \left(\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = \omega\sqrt{L_0 C_0} \end{array} \right).$$

8.4 Біжучі хвилі

Вираз для напруги в будь-якій точці лінії (як і для струму) містить дві складові

$$\dot{U} = \dot{U}_n + \dot{U}_0 \quad \text{або} \quad u = u_n + u_0.$$

Отже,

$$\dot{U} = \dot{A}_2 e^{-\gamma x} + \dot{A}_1 e^{\gamma x} =$$

$$= A_2 e^{j\psi_n} e^{-\alpha + j\beta x} + A_1 e^{j\psi_0} e^{\alpha + j\beta x} = A_2 e^{-\alpha} e^{j(\omega t - \beta x + \psi_n)} + A_1 e^{\alpha} e^{j(\omega t + \beta x + \psi_0)}$$

Для переходу від комплексу напруги до функції часу необхідно помножити праві частини формул на $\sqrt{2}e^{j\omega t}$ та від добутків взяти уявну частину

$$u = A_2 \sqrt{2} e^{-\alpha} \sin(\omega t + \psi_n - \beta x) + A_1 \sqrt{2} e^{\alpha} \sin(\omega t + \psi_0 + \beta x)$$

Перша складова являє собою синусоїдальну, амплітуда якої у міру просування вздовж лінії від її початку (лінії) зменшується (загасає) за експонентним законом ($A_2 e^{-\alpha}$), а аргумент цієї синусоїди (фази) є функцією часу та координати:

$$u_n = A_2 \sqrt{2} e^{-\alpha} \sin(\omega t + \psi_n - \beta x)$$

Інакше кажучи, з одного боку, у даній точці лінії напруга u_n є синусоїдальною функцією часу ($x = \text{const}$, $t = \text{var}$).

З іншого боку, у цей момент часу напруга u_n буде розподілена вздовж лінії також за синусоїдальним законом.

У цілому ж це дасть переміщення вздовж лінії незмінного фазового стану напруги (біжучої хвилі напруги) від її початку до кінця з постійною швидкістю, названою фазовою швидкістю U_ϕ (рис. 8.2).

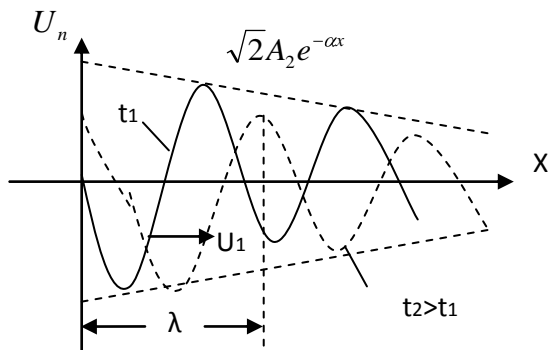


Рисунок 8.8

Аналогічно утвориться біжуча хвиля струму:

$$\begin{aligned}
 i &= \frac{\dot{A}_2}{z_g} e^{-\gamma x} - \frac{\dot{A}_1}{z_g} e^{\gamma x} = \\
 &= \frac{A_2}{z_g} e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta x - \varphi_n)} - \frac{A_1}{z_g} e^{\alpha x} e^{j(\omega t + \beta x - \varphi_0)}.
 \end{aligned}$$

Звідки

$$\begin{aligned}
 i &= \frac{A_2 \sqrt{2}}{z_g} e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \psi_n - \beta x - \varphi_n) - \\
 &- \frac{A_1 \sqrt{2}}{z_g} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \psi_0 + \beta x - \varphi_0).
 \end{aligned}$$

Електромагнітний стан у будь-якій точці лінії визначається сукупністю електричного (хвиля напруги) і магнітного (хвиля струму) полів.

Процес переміщення електромагнітного стану (електромагнітної хвилі) від джерела енергії до приймача, тобто в нашому випадку вбік (напрямок) збільшення координати x , від початку до кінця лінії називають падаючою електромагнітною хвилею (пряма).

Зменшення амплітуд падаючих хвиль напруги та струму в міру їх просування вздовж лінії розуміють як наявність втрат у лінії ($x \neq 0$).

Мінімальна відстань між двома точками лінії (що мають ту саму фазу), фази напруги (струму), які відрізняються на 2π , називається довжиною хвилі λ :

$$\lambda \beta = 2\pi \Rightarrow \dot{\lambda} = \frac{2\pi}{\beta}.$$

Фазова швидкість визначається так:

$$U_\phi = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi}{T\beta} = \frac{\omega}{\beta},$$

$$U_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\lambda}{T}.$$

З іншого боку, для лінії без втрат у вакуумі довжина хвилі λ дорівнює відстані, на яку поширюється біжуча хвиля за період $\lambda = UT$, де $U=300000$ км/с,

$$\lambda = UT = 300000 \times 20 \times 10^{-3} = 6000 \text{ км}.$$

Друга складова напруги

$$u_0 = \sqrt{2} A_1 e^{\alpha x} \sin(\omega t + \psi_0 + \beta x)$$

являє собою синусоїду, амплітуда якої зростає за експонентним законом при переміщенні від її початку або, інакше кажучи, загасає в міру просування від кінця до початку.

Процес переміщення електромагнітного стану (електромагнітної хвилі) від приймача до джерела енергії називається відбитою (зворотною) електромагнітною хвилею.

Появу відбитих хвиль можна розглядати як результат відбиття падаючих хвиль від кінця лінії.

Коефіцієнт відбиття за напругою q_u – відношення напруги відбитої хвилі на кінці лінії до напруги падаючої хвилі у кінці лінії

$$q_u = \frac{\dot{A}_1 e^{\gamma_e l}}{\dot{A}_2 e^{-\gamma_e l}} = \frac{\underline{Z}_n - \underline{Z}_e}{\underline{Z}_n + \underline{Z}_e}.$$

$$\text{За струмом } q_i = -q_u = \frac{\underline{Z}_e - \underline{Z}_n}{\underline{Z}_e + \underline{Z}_n}.$$

Якщо лінія замкнута на кінці на опір, що дорівнює хвильовому ($\underline{Z}_n = \underline{Z}_e$), то $q_u = q_i = 0$, тобто в лінії будуть відсутні відбиті (зворотні) хвилі. Це узгоджений режим роботи лінії.

Якщо лінія на кінці розімкнута, тобто $\underline{Z}_n = \infty$, то $q_u = 1$ та $q_i = -1$. Отже, на кінці лінії падаючі та відбита хвилі напруги рівні, у результаті напруга на кінці лінії у два рази більше падаючої хвилі. Оскільки $q_i = -1$, то результуючий струм дорівнює 0.

Якщо лінія закорочена на кінці, тобто $\underline{Z}_n = 0$, то $q_u = -1$ та $q_i = 1$. У результаті струм у кінці лінії дорівнює подвоєному значенню струму падаючої хвилі, а напруга дорівнює 0.

8.5 Однорідна лінія без спотворень

Основні характеристики лінії:

$$\underline{Z}_e = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} - \text{хвильовий опір};$$

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} - \text{коефіцієнт поширення.}$$

Коефіцієнт поширення визначається виразом

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta.$$

Коефіцієнт поширення залежить від частоти, а отже, умови проходження хвиль струму та напруги для різних частот різні (несинусоїдальний сигнал на вході, наприклад, телефонної лінії, спотворюється на вході).

Лінія, форми хвиль напруги та струму у якій у кінці та на початку лінії подібні, називається лінією без спотворень.

Перша умова роботи лінії без спотворень $\frac{R_0}{L_0} = \frac{G_0}{C_0}$.

Хвильовий опір такої лінії

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_c = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{\frac{R_0}{L_0} + j\omega}{\frac{G_0}{C_0} + j\omega}} \cdot \frac{L_0}{C_0}.$$

Якщо $\frac{R_0}{L_0} = \frac{G_0}{C_0}$, то при будь-якій зміні ω $\underline{Z}_e = \underline{Z}_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$ -

величина дійсна, не залежить від частоти.

Аналогічно

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{L_0} \frac{G_0 + j\omega C_0}{C_0}} = \sqrt{L_0 C_0 \left(\frac{R_0}{L_0} + j\omega \right) \left(\frac{G_0}{C_0} + j\omega \right)}.$$

Якщо $\frac{R_0}{L_0} = \frac{G_0}{C_0}$, то при зміні ω буде змінюватися тільки β .

$$\underline{\gamma} = \sqrt{L_0 C_0} \left(\frac{R_0}{L_0} + j\omega \right) = \sqrt{R_0 G_0} + j\omega \sqrt{L_0 C_0},$$

де $\alpha = \sqrt{R_0 G_0}$, $\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}$.

У результаті

$$\left. \begin{aligned} \underline{Z}_e &= \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \\ \alpha &= \sqrt{R_0 G_0} \\ U_\phi &= \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \end{aligned} \right\}.$$

Хвилі всіх частот поширюються з однаковою фазовою швидкістю та загасають однаковою мірою:

$$\underline{\gamma} = \sqrt{L_0 C_0} \left(\frac{R_0}{L_0} + j\omega \right), \quad \beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}.$$

Як правило, в лініях $\frac{R_0}{L_0} > \frac{G_0}{C_0}$ (провідність витікання через

ізоляцію незначна). Для досягнення $\frac{R_0}{L_0} = \frac{G_0}{C_0}$ штучно збільшують індуктивність, включаючи на лінії через певні відстані особливі реактивні котушки або застосовуючи кабелі, жили яких обмотані тонкою стрічкою з феромагнітного матеріалу.

Другою умовою передачі сигналу без спотворення є відсутність відбитого сигналу від кінця лінії, тобто погоджений режим роботи лінії - $\underline{Z}_n = \underline{Z}_e$.

За необхідності узгодження навантаження включають її через трансформатор з відповідно обраним коефіцієнтом трансформації.

8.6 Розподіл струму та напруги

Нехай \dot{U}_1 та \dot{I}_1 - напруга та струм на початку лінії;
 \dot{U}_2 і \dot{I}_2 - напруга та струм у кінці лінії.

На початку лінії $x=0$:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{A}_2 + \dot{A}_1, \\ \dot{I}_1 = \dot{A}_2 - \dot{A}_1. \end{cases}$$

Визначимо з одержаної системи сталі інтегрування

$$\dot{A}_1 = \frac{1}{2} (\dot{U}_1 - \dot{I}_1 \underline{Z}_e) \doteq A_1 e^{j\psi_0},$$

$$\dot{A}_2 = \frac{1}{2} (\dot{U}_1 + \dot{I}_1 \underline{Z}_e) \doteq A_2 e^{j\psi_n}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \frac{\dot{U}_1 - \dot{I}_1 \underline{Z}_e}{2} e^{\gamma x} + \frac{\dot{U}_1 + \dot{I}_1 \underline{Z}_e}{2} e^{-\gamma x} = \\ &= \dot{U}_1 \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} - \dot{I}_1 \underline{Z}_e \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} = \dot{U}_1 ch \gamma x - \dot{I}_1 \underline{Z}_e sh \gamma x. \end{aligned}$$

Аналогічно для струму \dot{I} .

Підставивши $x=0$ у рівняння, визначимо, що:

$$\dot{A}_1 = \frac{1}{2} (\dot{U}_1 - \dot{I}_1 \underline{Z}_e) \doteq A_1 e^{j\psi_0},$$

$$\dot{A}_2 = \frac{1}{2} (\dot{U}_1 + \dot{I}_1 \underline{Z}_e) \doteq A_2 e^{j\psi_n}.$$

Підставивши отримані вирази в рівняння та скориставшись відомими співвідношеннями

$$\frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} = sh \gamma x, \quad \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} = ch \gamma x.$$

одержимо

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_1 ch \gamma x - \dot{I}_1 \underline{Z}_e sh \gamma x, \\ \dot{I} = \dot{I}_1 ch \gamma x - \frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_e} sh \gamma x. \end{cases}$$

У кінці лінії $x=l$:

$$\begin{cases} \dot{U}_2 = \dot{A}_2 e^{-\gamma l} + \dot{A}_1 e^{\gamma l}, \\ \dot{I}_2 \underline{Z}_e = \dot{A}_2 e^{-\gamma l} - \dot{A}_1 e^{\gamma l}. \end{cases}$$

Виразимо з одержаної системи сталі інтегрування:

$$\dot{A}_1 = \frac{1}{2} (\dot{U}_2 - \dot{I}_2 \underline{Z}_e) e^{-\gamma l},$$

$$\dot{A}_2 = \frac{1}{2} (\dot{U}_2 + \dot{I}_2 \underline{Z}_e) e^{\gamma l}.$$

Підставивши $x=l$ у рівняння, одержимо, що:

$$\dot{A}_1 = \frac{1}{2} (\dot{U}_2 - \dot{I}_2 \underline{Z}_e) e^{j\psi_0},$$

$$\dot{A}_2 = \frac{1}{2} (\dot{U}_2 + \dot{I}_2 \underline{Z}_e) e^{j\psi_n}.$$

Підставивши \dot{A}_1 та \dot{A}_2 одержимо

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 \underline{ch} \gamma y + \dot{I}_2 \underline{Z}_e \underline{sh} \gamma y, \\ \dot{I} = \frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_e} \underline{sh} \gamma y + \dot{I}_2 \underline{ch} \gamma y, \end{cases}$$

де $y = l - x$.

Якщо $x=0$, то $y=l$, $\dot{U} = \dot{U}_1$, $\dot{I} = \dot{I}_1$, то

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2 \underline{ch} \gamma l + \dot{I}_2 \underline{Z}_e \underline{sh} \gamma l, \\ \dot{I}_1 = \dot{U}_2 \frac{\underline{sh} \gamma l}{\underline{Z}_e} + \dot{I}_2 \underline{ch} \gamma l. \end{cases}$$

Рівняння являють собою рівняння чотириполюсника у А-параметрах.

Його сталі:

$$\dot{A} = \underline{ch} \gamma l = \dot{D} ; \dot{B} = \underline{Z}_e \underline{sh} \gamma l ; \dot{C} = \frac{\underline{sh} \gamma l}{\underline{Z}_e}.$$

При цьому $\underline{AD} - \underline{BC} = 1$

Для порівняння рівняння чотириполюсника в гіперболічній формі

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2 \underline{ch} \underline{g} + \dot{I}_2 \underline{Z}_c \underline{sh} \underline{g}, \\ \dot{I}_1 = \dot{U}_2 \frac{\underline{sh} \underline{g}}{\underline{Z}_c} + \dot{I}_2 \underline{ch} \underline{g}. \end{cases}$$

8.7 Однорідні лінії без втрат при різних режимах роботи

У звичайній лінії сигнал загасає в міру просування вздовж лінії.

Коли $R_0 = G_0 = 0$, одержуємо лінію без втрат ($\alpha=0$). На-

приклад, при високих частотах $\omega L_0 \gg R_0$,
 $\omega C_0 \gg G_0$.

Тоді $\alpha = 0$; $\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}$; $\underline{\gamma} = j \omega \sqrt{L_0 C_0} = j \beta$; $\underline{Z}_s = z_s = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$

Рівняння лінії через напругу та струм у кінці лінії для лінії із втратами (рис. 8.3):

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 \underline{ch} \underline{\gamma} y + \dot{I}_2 \underline{Z}_s \underline{sh} \underline{\gamma} y, \\ \dot{I} = \frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_s} \underline{sh} \underline{\gamma} y + \dot{I}_2 \underline{ch} \underline{\gamma} y. \end{cases}$$

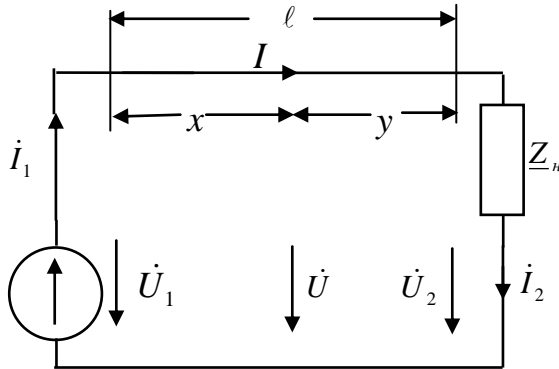


Рисунок 8.3

Лінія без втрат одночасно є лінією без спотворень, її частковим випадком є $\frac{R_0}{L_0} = \frac{G_0}{C_0} = 0$. Тому для цих обох ліній

$$\underline{Z}_c = Z = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}; \beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}; U_\phi = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}.$$

$$\text{Для лінії без втрат} \quad \underline{\gamma} = j\beta \Rightarrow ch\underline{\gamma}y = chj\beta y = \cos \beta y, \\ sh\underline{\gamma}y = shj\beta y = j \sin \beta y,$$

де

$$chjx = \frac{1}{2} (e^{jx} + e^{-jx}) = \frac{1}{2} (\cos x + j \sin x + \cos x - j \sin x) = \cos x,$$

$$shjx = \frac{1}{2} (e^{jx} - e^{-jx}) = \frac{1}{2} (\cos x + j \sin x - \cos x + j \sin x) = j \sin x.$$

Тоді рівняння лінії без втрат $\underline{Z}_e = Z_e$:

$$\begin{cases} \underline{U} = \underline{U}_2 \cos \beta y + j \underline{I}_2 \underline{Z}_e \sin \beta y, \\ \underline{I} = j \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_e} \sin \beta y + \underline{I}_2 \cos \beta y. \end{cases}$$

Режим холостого ходу $\underline{Z}_n = \infty; I_2 = 0$:

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_{2x} \cos \beta y, \\ \dot{i} = j \frac{\dot{U}_{2x}}{\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}} \sin \beta y. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \sqrt{2} U_{2x} \cos \beta y \sin \omega t, \\ i = \frac{\sqrt{2} U_{2x}}{\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}} \sin \beta y \sin(\omega t + 90^\circ) \end{cases}$$

Хвиля напруги (і струму) описується добутком двох періодичних функцій – функції координати поточної точки на лінії (βy) і функції часу (ωt) – це стоячі хвилі.

Стояча хвиля – процес накладення прямої і зворотної хвиль із однаковими амплітудами.

Зокрема, у точках $\beta y = k\pi$, де $k=0,1,2,\dots$ ($\beta y = 0, \pi, 2\pi$), хвиля напруги набуває максимальних значень (пучності напруги), а в точках $\beta y = k + 1 \frac{\pi}{2}$, де $k=1,2,3,\dots$ ($\beta y = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \dots$) хвиля напруги дорівнює нулю (вузол напруги) - утворилася стояча хвиля напруги.

Аналогічно утвориться стояча хвиля струму, зрушаться стосовно стоячої хвилі напруги в часі на $\lambda/2$, а в просторі – на чверть довжини хвилі (рис. 8.4).

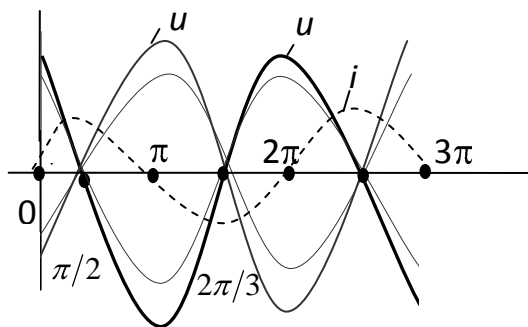


Рисунок 8.4

Вхідний опір лінії без втрат у режимі холостого ходу

$$\underline{Z}_{\text{вх.хх}} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{\dot{U}_{2x} \cos \beta y}{j \frac{\dot{U}_{2x}}{\sqrt{L_0/C_0}} \sin \beta y} = -j \frac{\sqrt{L_0/C_0}}{\operatorname{tg} \beta y} = -j Z_0 \operatorname{ctg} \beta y.$$

Зобразимо вхідний опір у режимі холостого ходу на графіку (рис. 8.5).

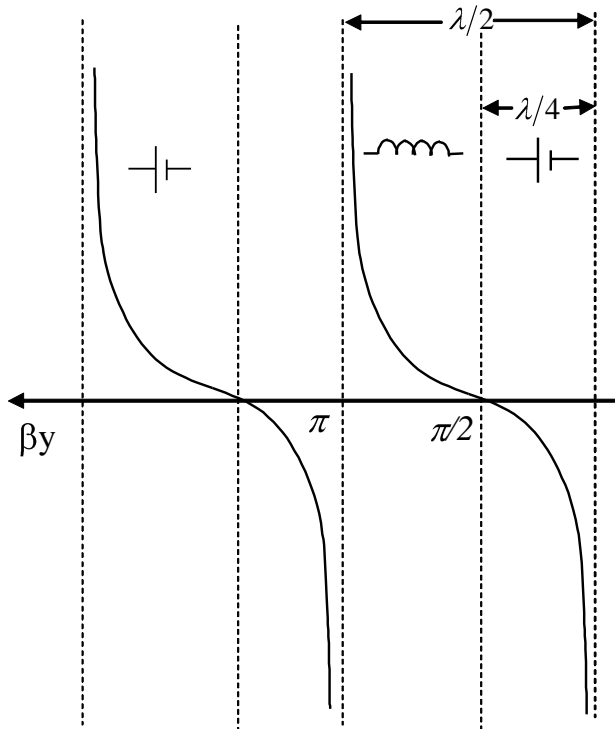


Рисунок 8.5

Запишемо вираз для вхідного опору

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = Z_0 \frac{\underline{Z}_n + jZ_0 \operatorname{tg} \beta y}{Z_0 + j\underline{Z}_n \operatorname{tg} \beta y}.$$

При $0 < \beta y < \frac{\pi}{2}$ - ємнісної характер $\left(0 < \ell < \frac{\lambda}{4}\right)$.

При $\frac{\pi}{2} < \beta y < \pi$ - індуктивний характер $\left(\frac{\lambda}{4} < \ell < \frac{\lambda}{2}\right)$.

При $\beta y = \frac{\pi}{2}$ - вхідний опір дорівнює нулю (резонанс напруг) $\left(\ell = \frac{\lambda}{4}\right)$.

При $\beta y = \pi$ - вхідний опір дорівнює ∞ (резонанс струмів).

Отже, змінюючи довжину відрізка лінії без втрат, можна імітувати ємнісний або індуктивний опір будь-якої величини.

Режим короткого замикання $\underline{Z}_n = 0; U_2 = 0$

$$\begin{cases} \dot{U} = j\dot{I}_{2k} \underline{Z}_0 \sin \beta y = jI_{2k} \sqrt{L_0/C_0} \sin \beta y, \\ \dot{I} = \dot{I}_2 \cos \beta y. \end{cases}$$

Спростимо

$$\begin{cases} u = \sqrt{2} I_{2k} \sqrt{L_0/C_0} \sin \beta y \sin(\omega t + 90^\circ), \\ i = \sqrt{2} I_{2k} \cos \beta y \sin \omega t. \end{cases}$$

Отже, утворюються стоячі хвилі.

Картина аналогічна до режиму холостого ходу, але поміняються місцями вузли і пучності напруги та струми і характер вхідного опору на протилежний βy (λl).

Відрізок лінії без втрат у режимі короткого замикання довжиною у чверть хвилі $\lambda/4$ має вхідний опір, що дорівнює ∞ . Це дозволяє застосовувати його як ізолятор.

У режимі короткого замикання

$$\dot{U} = jZ_0 \sin \beta y I_2, \dot{I} = \cos \beta y I_2, \underline{Z}_{ex} = jZ_0 \operatorname{tg} \beta y.$$

При реактивному навантаженні на лінії також утворяться стоячі хвилі.

У вузлах напруги та струму в будь-який момент часу потужність дорівнює нулю. Отже, енергія через ці струми не передається. Це означає, що при виникненні стоячих хвиль електромагнітна енергія від початку до кінця лінії не передається.

Проте на кожному відрізку лінії, що дорівнює чверті довжини хвилі, запасена деяка електромагнітна енергія. Ця енергія періодично переходить із одного виду енергії (енергія електричного поля) в інший (енергія магнітного поля).

Процес передачі енергії вздовж лінії пов'язаний з існуванням біжучих хвиль напруги та струму, що виникають за наявності витрати енергії або в лінії, або в приймачі.

РОЗДІЛ 9 НЕЛІНІЙНІ КОЛА

9.1 Основні поняття

Нелінійні електричні кола – кола, що містять хоча б один нелінійний елемент, тобто елемент, параметри якого (R , L або C) залежать від значень або від напрямку струму та напруги цього елемента кола.

Залежно від здатності розсіювати електричну енергію у вигляді тепла (необхідно перетворювати в інші види енергії) або накопичувати магнітну або електричну енергію (або накопичувати у вигляді енергії магнітного або електричного полів) розрізняють:

RHE – резистивний нелінійний елемент (рис. 9.1).

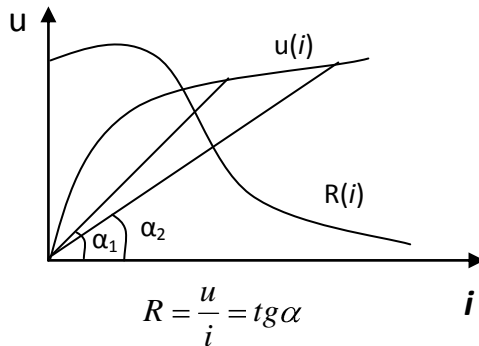
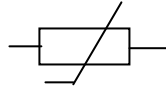


Рисунок 9.1

IHE – індуктивний нелінійний елемент (рис. 9.2).

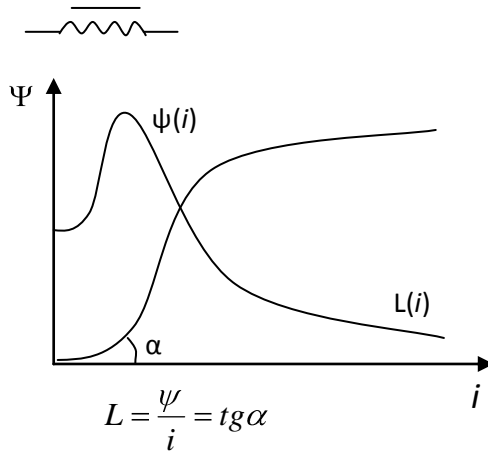


Рисунок 9.2

EHE – ємнісний нелінійний елемент.

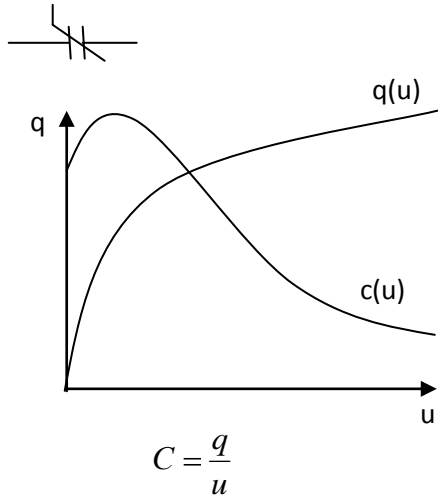


Рисунок 9.3

PHE, IHE, EHE – нелінійні накопичувачі енергії.

Характеристиками цих елементів, одержуваними експериментальними й заданими графіками, таблицями або наближеними аналітичними виразами, є:

- вольт-амперна характеристика (ВАХ) $PHE - u(i)$;
- вебер-амперна характеристика $IHE - \Psi(i)$ – магнітна характеристика нелінійних індуктивних елементів;
- кулон-вольтна характеристика $EHE - q(u)$ електрична характеристика ємнісних нелінійних елементів.

Причиною нелінійності характеристик елементів є нелінійність параметрів цих елементів - R, L, C .

Параметри цих нелінійних елементів (НЕ) - опір, індуктивність, ємність - залежать від величин і напрямків струму та напруги цих елементів. Причиною цього є залежність:

– питомої провідності питомого опору від режиму кола

$$R = \rho \frac{l}{S} = \frac{l}{\gamma S}, \quad R \curvearrowright = \rho \curvearrowright \frac{l}{S} \quad \text{або} \quad R \curvearrowright = \rho \curvearrowright \frac{l}{S};$$

– магнітної проникності середовища, у якому замикаються силові лінії магнітного поля від струму, що збудив це поле (від напруженості поля)

$$L = \omega^2 \frac{\mu_a S}{l}, \quad L \curvearrowright = \omega^2 \frac{\mu_a \curvearrowright S}{l}.$$

– діелектричної проникності речовини, що заповнює простір між обкладками конденсатора, від напруги між обкладками (від напруги електричного поля):

$$C = \frac{\varepsilon_a S}{\alpha}, \quad C \curvearrowright = \varepsilon_a \frac{S}{\alpha}.$$

Для оцінки характеру зміни НЕ вводять поняття статичного та диференціального опорів.

Статичний опір $R_{ст}$ характеризує поведінку НРЕ при незмінному режимі. У розглянутій точці ВАХ чисельно дорівнює тангенсу кута нахилу між віссю ординат (віссю струмів) і прямий, що з'єднує початок координат і розглянуту точку ВАХ, помножених на масштаб (рис. 9.4):

$$R_{cm} = \frac{U_A}{I_A} = tg \alpha \frac{m_u}{m_i}.$$

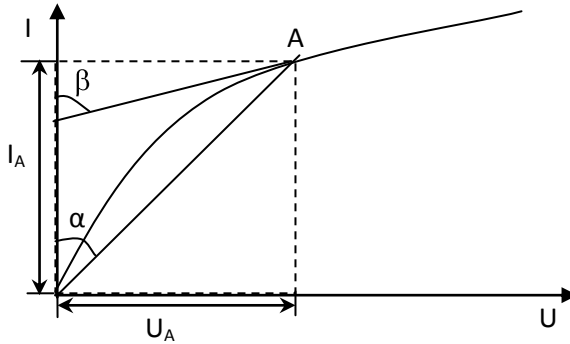


Рисунок 9.4

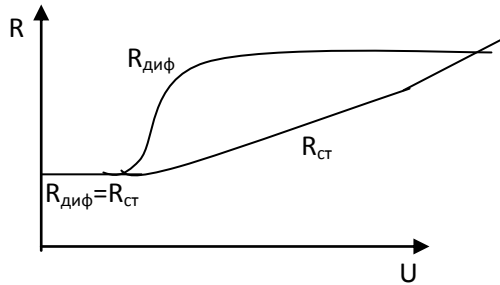


Рисунок 9.5

Диференціальний опір $R_{\text{диф}}$ визначає крутість ВАХ у розглянутій точці та характеризує поведінку НРЕ при малих відхиленнях від режиму в розглянутій точці ВАХ. $R_{\text{диф}}$ чисельно дорівнює тангенсу кута нахилу між віссю ординат та дотичної до ВАХ у розглянутій точці, помноженому на масштаб:

$$R_{\text{диф}} = \lim_{\Delta I_A \rightarrow 0} \frac{\Delta U_A}{\Delta I_A} = \frac{dU}{dI} = \text{tg} \beta \frac{m_u}{m_I} .$$

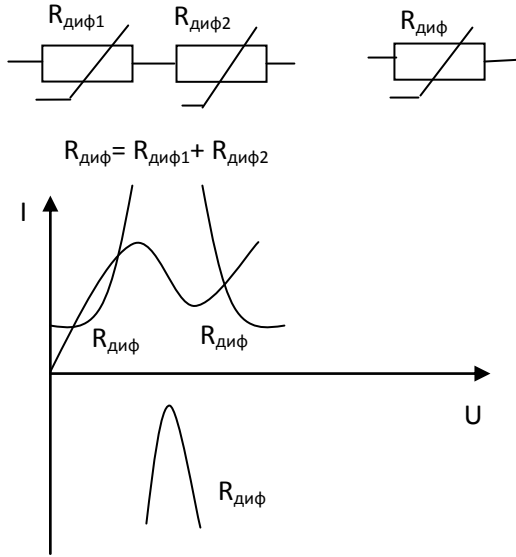


Рисунок 9.6

а) при послідовному сполученні декількох НРЕ $R_{\text{диф}}$ результуюча характеристика при будь-якому струмі дорівнює сумі $R_{\text{диф}}$ цих НРЕ при цьому ж струмі (тому що похідна суми дорівнює сумі похідних, рис. 9.6)

б) якщо ВАХ НРЕ має падаючу ділянку, то $R_{\text{диф}}$ на цій ділянці негативне.

Приклади нелінійних елементів та їх характеристик

Некеровані

До некерованих РНЕ належать

– лампа накаливання - з підвищенням температури зростає росте, характеристика симетрична (рис. 9.7);

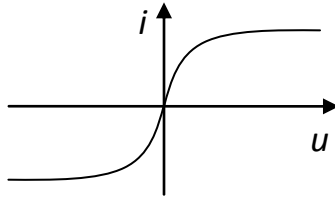


Рисунок 9.7

- тиритові опори (з керамічного матеріалу - тириту) - тиритові руйнуються від високої напруги;
- терфери́стори - для компенсації зміни опору приладів від температури (рис. 9.8);

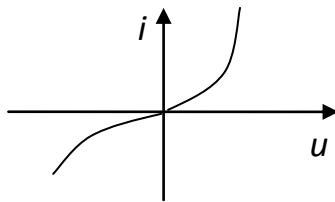


Рисунок 9.8

- баретер - сталевий дріт у водні (80мм рт. ст.) - для стабілізації струму (рис. 9.9);

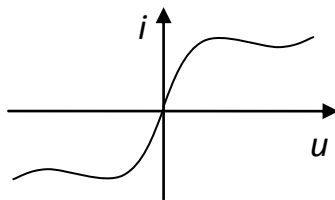


Рисунок 9.9

– діод (несиметрична характеристика, рис. 9.10), стабілітрон.

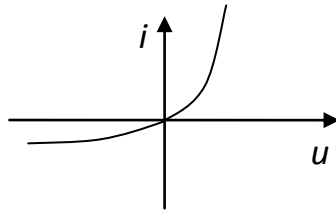


Рисунок 9.10

Керовані

- ✓ транзистор - характеризується сімейством характеристик;
- ✓ ІНЕ - дросель - котушка індуктивності з обмоткою, намотаною на замкнуте осердя із феромагнітного матеріалу;
- ✓ ЕНЕ - конденсатор, між обкладинками якого сегнетодіелектрик (уперше ці властивості виявлені у сегнетовій солі).

Особливості аналізу кіл з НЕ

1. Електричний стан кіл із НЕ описується системою нелінійних алгебраїчних рівнянь для кіл постійного струму і нелінійних диференціальних рівнянь для кіл змінного струму, і рівняння що не мають точного аналітичного розв'язання.

2. До кіл з НЕ не застосуємо принцип накладення (при накладенні процесів режим у колі змінюється, а отже, змінюються параметри кола).

3. Для аналізу нелінійних кіл використовуються власні методи розв'язання нелінійних рівнянь, які діляться на графічні та аналітичні.

Графічні методи ґрунтуються на графічних побудовах із використанням ВАХ НЕ, поданого у вигляді графіка або таблиці, і найпростіших розрахунках (рис. 9.11).

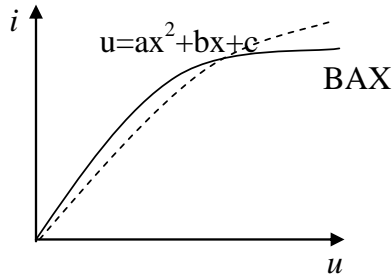


Рисунок 9.11

Аналітичні методи ґрунтуються:

- на наближеній заміні (апроксимації) ВАХ НЕ в межах робочої ділянки аналітичним вираженням із подальшими аналітичним розрахунком шуканих величин; зокрема заміна прямою лінією - лінеаризація;
- чисельні методи розв'язання нелінійних рівнянь (наприклад, ітерація);
- кусково-лінійній апроксимації - заміні ВАХ НЕ на ряд прямолінійних ділянок із «дотинанням» розв'язань на межі ділянки.

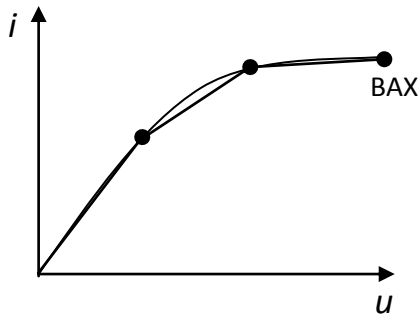


Рисунок 9.12

Переваги графічних методів - простота, наочність, легкість врахування особливостей ВАХ (наприклад гістерезисних явищ).

Недолік - дає власне розв'язання завдання при певних параметрах кола.

Переваги аналітичних методів - можливість одержання розв'язання в загальному вигляді, що дозволяє досліджувати отримане розв'язання при зміні кожного з параметрів кола.

Недолік - аналітична апроксимація ВАХ пов'язана з деякою похибкою, що виникає в результаті розв'язання з відомим ступенем наближення.

Описаний підхід до аналізу нелінійних кіл однаковою мірою справедливий як для кіл постійного, так і для кіл змінного струму.

9.2 Нелінійні електричні кола постійного струму

Очевидно, що в цьому випадку мова йде про кола постійного струму з нелійними резистивними елементами (НРЕ).

При аналізі режимів нелінійних кіл із НРЕ варто врахувати:

1. Електричний стан нелінійного електричного кола постійного струму описується системою нелінійних алгебраїчних рівнянь, що не мають загального аналітичного розв'язання. Для аналізу нелінійних електричних кіл використовуються власні методи розв'язання - графічний та аналітичний з апроксимацією ВАХ НРЕ.

2. До нелінійних кіл не застосуємо принцип накладення, тому що при накладенні процесів режим у колі змінюється, а, отже, змінюються параметри кола.

У колах постійного струму ємнісний НЕ являє собою обрив кола, а індуктивний НЕ - коротке замикання, а тому мова йде тільки про резистивні нелінійні елементи.

Графічний метод

Графічний метод ґрунтується на графічних побудовах із використанням ВАХ НЕ, поданих у вигляді графіка або таблиці, а також пов'язаних із цими побудовами розрахунках з використанням законів Кірхгофа.

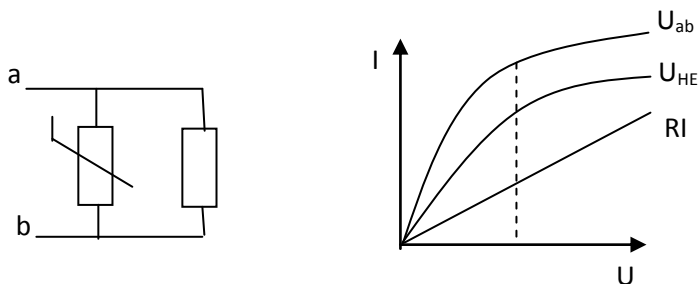


Рисунок 9.13

1. ВАХ двополюсника

Важливе місце при цьому займає побудова ВАХ пасивних та активних двополюсників, що містять лінійні та нелінійні елементи.

ВАХ двополюсників будують відповідно до рівнянь, складених за законами Кірхгофа, шляхом графічного додавання ВАХ елементів, що входять у двополюсник. Це графічний аналог методу еквівалентних перетворень (рис. 9.13 та 9.14).

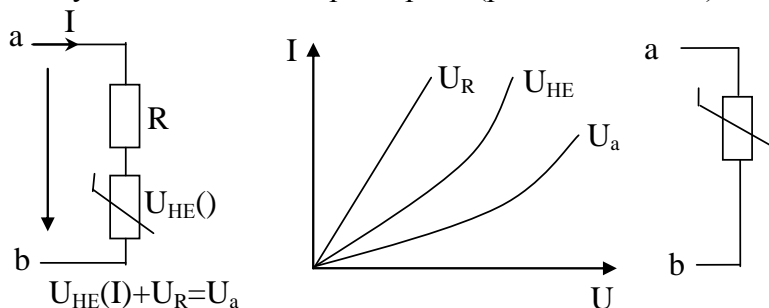


Рисунок 9.14

2. Схеми зі змішаним з'єднанням

Знаючи ВАХ активних і пасивних двополюсників, будь-яке коло можна звести до одноконтурної схеми або схеми із двома вузлами.

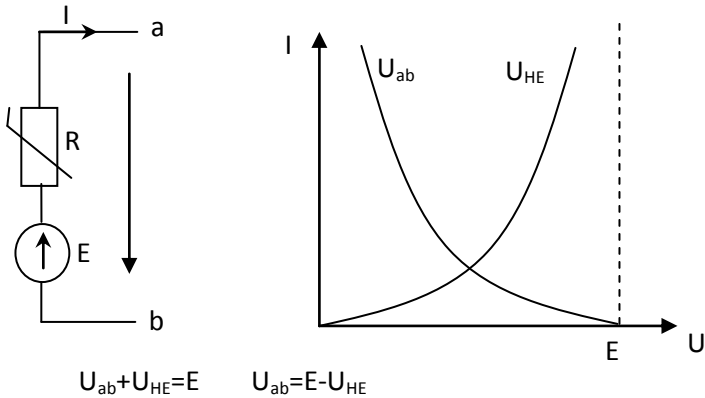


Рисунок 9.15

Для цього, записавши рівняння на підставі I закону Кірхгофа для схеми із двома вузлами, та II закону Кірхгофа для одноконтурного кола, розв'язавши його графічним шляхом знаходження точки перетинання еквівалентних ВАХ, що відповідають лівій і правій частинам рівняння (рис. 9.15 та рис. 9.16).

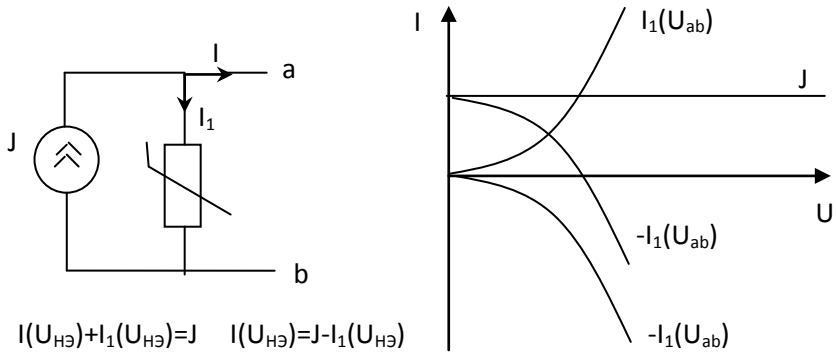


Рисунок 9.16

3. Складнорозгалужені кола

Метод еквівалентного генератора ефективний при розглянутому колі будь-якої складності, що містить один НРЕ. У цьому випадку лінійну частину заміщують еквівалентним генератором, а потім визначають режим у НЕ шляхом графічного розв'язання рівняння, складеного за II законом Кірхгофа.

Метод активного чотириполюсника

Метод активного чотириполюсника ефективний при 2-х НРЕ. Тоді лінійну частину подаємо як Т-подібну еквівалентну схему, а на вході та виході ЕРС з нелінійними елементами. Розраховуємо як коло із двома вузлами шляхом графічного розв'язання рівняння, складеного за I законом Кірхгофа.

Алгоритм

1) Розглядати схему як лінійний активний чотириполюсник з підключенням до його затискачів НЕ.

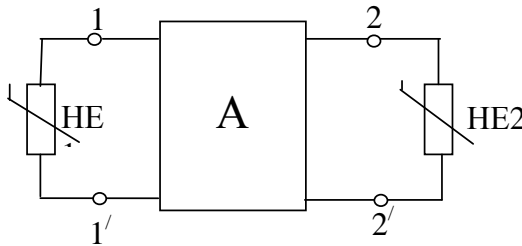


Рисунок 9.17

2) Відключити НЕ (рис. 9.18) та розрахувати напруги холостого ходу на затискачах чотириполюсника одним із відомих методів (МВН).

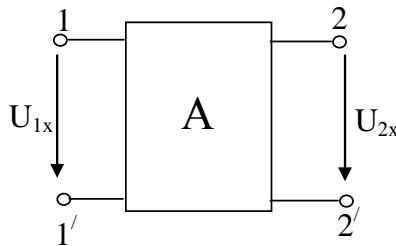


Рисунок 9.18

3) У теорії кіл доведене, що якщо у дві гілки одночасно ввести дві ЕРС, рівні і протилежно спрямовані напругам холостого ходу на цих гілках ($E_1 = U_{1x}$; $E_2 = U_{2x}$), то струми в цих гілках знаходяться зі схеми, тобто заданий активний чотириполіусник замінюється пасивним і двома ЕРС, рівними і протилежно спрямованими напругами холостого ходу на застискачах цього чотириполіусника (рис. 9.19).

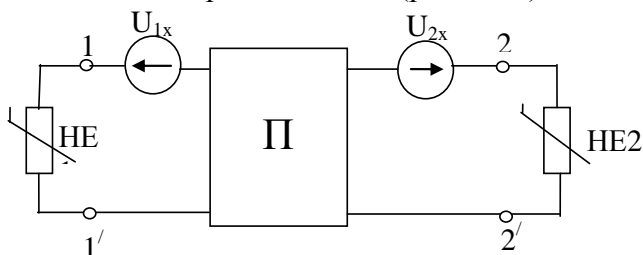


Рисунок 9.19

4) Замінивши пасивний чотириполіусник Т-подібною схемою заміщення, одержуємо нелінійне коло із двома вузлами, розв'язання якої можна здійснити (рис. 9.20):

- а) графічним методом;
- б) методом аналітичної апроксимації:

- складання рівнянь, підстановка апроксимуючої функції, розв'язання трансцендентного або алгебраїчного рівняння;
- складання рівнянь, розв'язання числовими (ітераційним) методом.

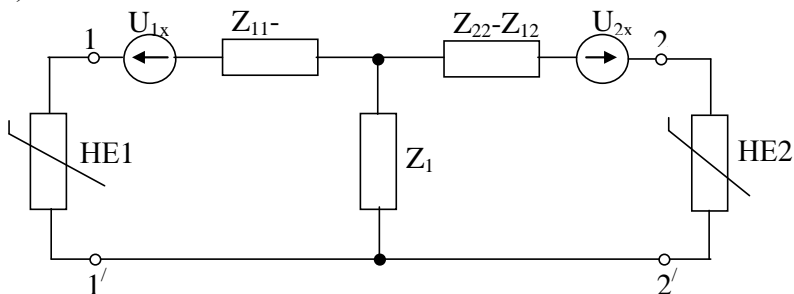


Рисунок 9.20

Аналітичний метод

1. Метод аналітичної апроксимації.

ВАХ НРЕ замінюють аналітичною функцією, що приблизно описує ВАХ (поліном, тригонометричний вираз і т.д.). Потім застосовують один з відомих методів розрахунку з теорії лінійних кіл. У результаті одержують алгебраїчні або трансцендентні рівняння, які розв'язують аналітично щодо шуканої величини.

2. Методи лінеаризації.

При малих відхиленнях режиму від вихідного невелику ділянку ВАХ приблизно можна замінити відрізком прямої, дотичної до характеристики. При цьому ВАХ заміняється на ламану, яку можна подати як ЕРС і лінійний опір, що дорівнює диференціальному (рис. 9.21).

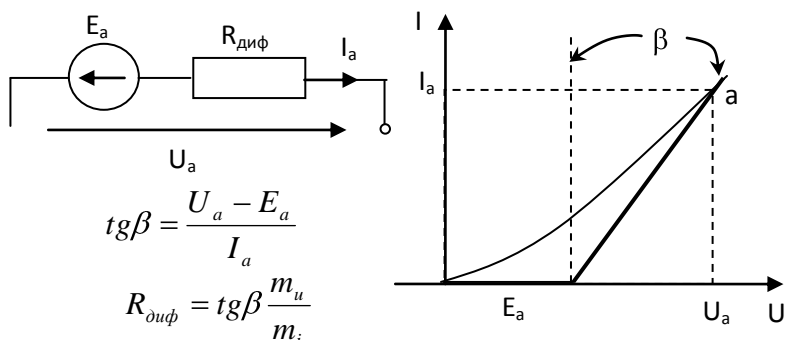


Рисунок 9.21

3. Кусково-лінійна апроксимація (рис. 9.22):

- джерело струму, шунтоване діодом;
- напруга на діоді U_d ;
- діод відкритий постійно.

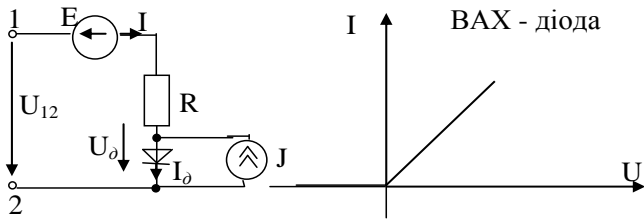
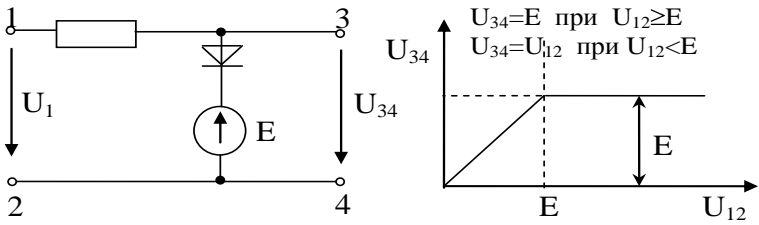
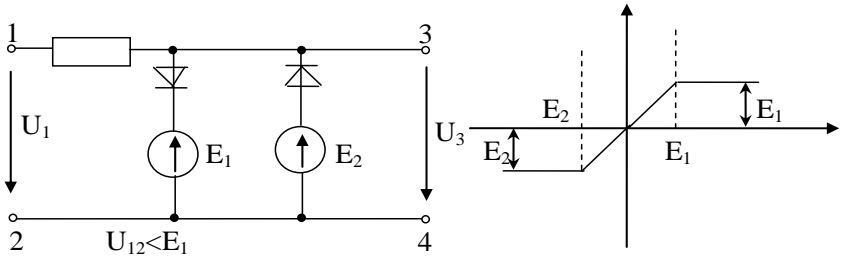
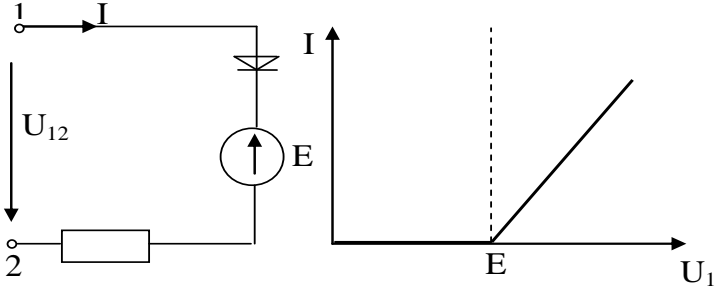


Рисунок 9.22

4. Числові методи (ітерації).

Розрахунок ведеться в табличній формі.

Задаємося U_{ab} $U_1(I_1) = U_{ab} - E_1$, I_1 (за ВАХ),
 $U_2(I_2) = U_{ab} - E_2$, I_2 (за ВАХ), ΣI
 $U_3(I_3) = U_{ab} - E_3$, I_3 (за ВАХ).

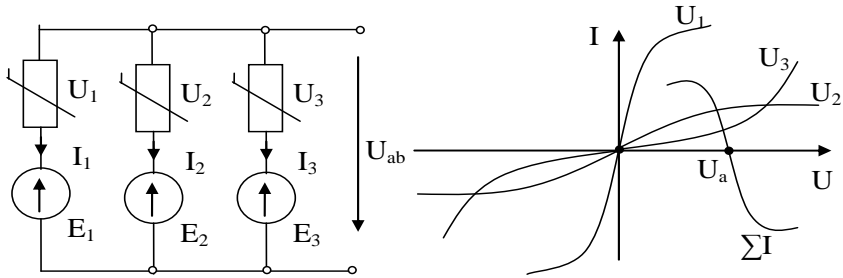


Рисунок 9.33

Задаючись іншими значеннями U_{ab} , продовжують цю операцію доти, поки ΣI не змінить знак. Потім у великому масштабі будують ділянку $\Sigma I = f(U_{ab})$ поблизу нуля. Шукане значення U_{ab} відповідає $\Sigma I = 0$.

Звести до рівнянь із невідомими струмами через НЕ (рис. 9.34). Для цього:

- 1) 2-ге рівняння за участю нелінійних елементів (I_{11}, I_{22});
- 2) 1-ше рівняння лінійне (I_{33});
- 3) виразити за допомогою лінійного рівняння через I_{33} $I_1 = I_{11}$ та $I_2 = I_{22}$ і підставити в рівняння.

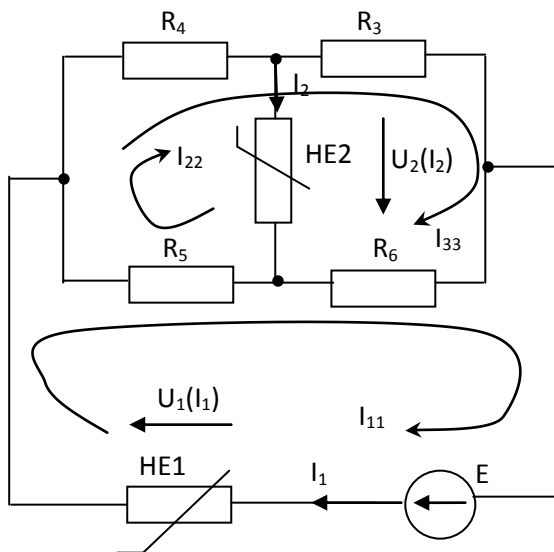


Рисунок 9.34

Розв'язання

1. Метод контурних струмів. Контурні струми вибрати так, щоб хоча б частина з них була шуканими струмами через нелінійні елементи.

2. За другим законом Кірхгофа

$$\begin{cases} R_5 + R_6 \vec{I}_1 - R_5 I_2 - R_5 + R_6 \vec{I}_{33} = E - U_1(I_1) \\ -R_5 I_1 + R_5 + R_4 \vec{I}_2 + R_5 + R_4 \vec{I}_{33} = -U_2(I_2) \\ -R_5 + R_6 \vec{I}_1 + R_4 + R_5 \vec{I}_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6 \vec{I}_{33} = 0; \end{cases}$$

3. Одне з рівнянь (3) лінійне, й отриманий з нього вираз для I_{33} підставляється в рівняння (1) і (2):

$$\begin{cases} AI_1 - BI_2 = E - U_1(I_1) \\ -CI_1 + DI_2 = -U_2(I_2) \end{cases}$$

4. Ітерація:

- задаємося I_1 і I_2 ;
- визначаємо U_1 і U_2 за ВАХ HE₁ і HE₂;
- одержуємо перше наближення I_1^1 і I_2^1 з рівнянь;

- визначаємо U_1^1 і U_2^1 за ВАХ HE_1 і HE_2 ;
 - одержуємо друге наближення I_1^2 і I_2^2 .
- Закінчення $I_1^{K+1} = I_1^K$; $I_2^{K+1} = I_2^K$.

9.3 Магнітні кола при постійних магнітних потоках

Магнітні кола – частина електротехнічного пристрою, що складається із джерел, які збуджують магнітне поле (постійні магніти, котушки), і магнітопроводів, що використовуються для концентрації (зосередження) магнітного поля у певній частині простору та надання йому бажаної конфігурації.

Магнітопроводи виробляють з феромагнітних матеріалів із високою магнітною проникністю. Оскільки $\mu=f(H)$, то магнітні кола нелінійні.

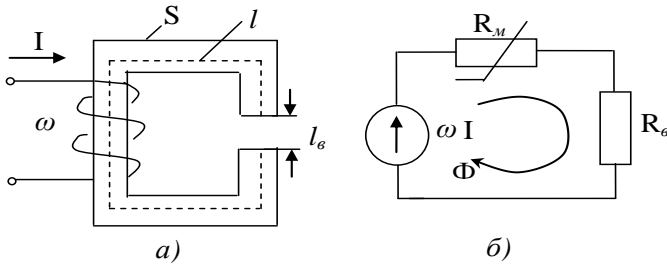


Рисунок 9.34

На рис. 9.34 а зображене магнітне коло, а на рис. 9.34 б – еквівалентне коло.

Характеристики котушки з феромагнітного матеріалу подані на рис. 9.35.

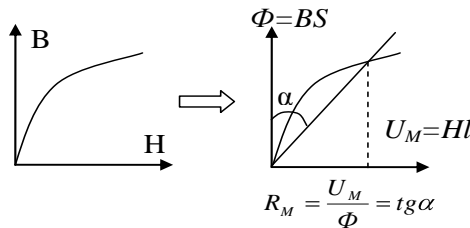


Рисунок 9.35

За аналогією з електричними колами наведемо вирази для законів Кірхгофа та закона Ома для магнітних кіл:

$$\sum_{i=1}^n \Phi_i = 0 \text{ - I закон Кірхгофа для магнітних кіл;}$$

$$U_M + U_{Mb} = I_{\omega} \text{ - II закон Кірхгофа для магнітних кіл;}$$

$$\Phi = \frac{I_{\omega}}{R_M + R_{Mb}} \text{ - закон Ома для магнітних кіл.}$$

$$R_M = \frac{R}{\mu\mu_0 S} \left[\frac{l}{\text{Ом} \cdot \text{с}} \right].$$

Отже, існує аналогія між електричними та магнітними величинами:

$$I, \text{ А} - \Phi, \text{ Вб}; E, \text{ В} - \omega I, \text{ А}; R, \text{ Ом} - R_M = \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{с}}; U=RI, \text{ В} -$$

$$U_M=R_M \Phi, \text{ А.}$$

Вольт-амперними характеристикам НРЕ є аналогічні вебер-амперні характеристики ділянок феромагнітних магнітопроводів. ВАХ будується на підставі кривої намагнічування матеріалу магнітопровода. Якщо дано криву намагнічування матеріалу, то для одержання вебер-амперної характеристики множать $B \times S$ та $H \times l$.

Аналогія між електричними та магнітними колами при постійних струмах і потоках дозволяє поширити всі методи й техніку розрахунку нелінійних електричних кіл із НРЕ на магнітні кола.

Розглянемо розгалужене магнітне коло (рис. 9.36).

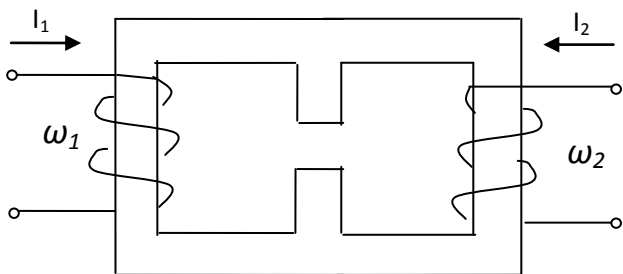


Рисунок 9.36

На рис. 9.37 наведемо еквівалентну схему магнітного кола, що зображене на рис. 9.37.

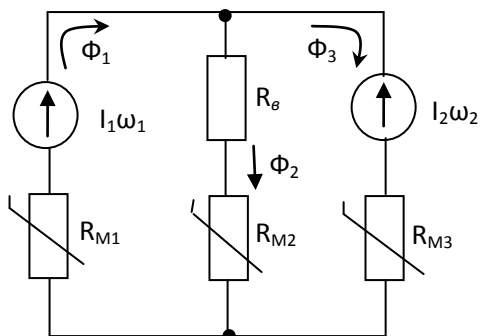


Рисунок 9.37

Запишемо для кола, що зображене на рис. 9.37, закони Кірхгофа:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_2 + \Phi_3, \\ R_{M1}\Phi_1 + R_{M2}\Phi_2 + R_a\Phi_2 &= I_1\omega_1, \\ R_{M3}\Phi_3 - R_{M2}\Phi_2 - R_a\Phi_2 &= -I_2\omega_2. \end{aligned}$$

Для розрахунку розгалужених магнітних кіл використовують такі ж самі методи, як і для електричних кіл.

9.4 Нелінійні кола змінного струму

9.4.1 Основні поняття

Особливістю нелінійних кіл змінного струму є залежність параметрів нелінійного елемента від частоти прикладеної напруги та струму, що проходить (на додаток до залежності від їх величини та напрямку).

Приклад:

- крива перемагнічування дроселя (рис. 9.38);
- поверхневий ефект у резистивних колах.

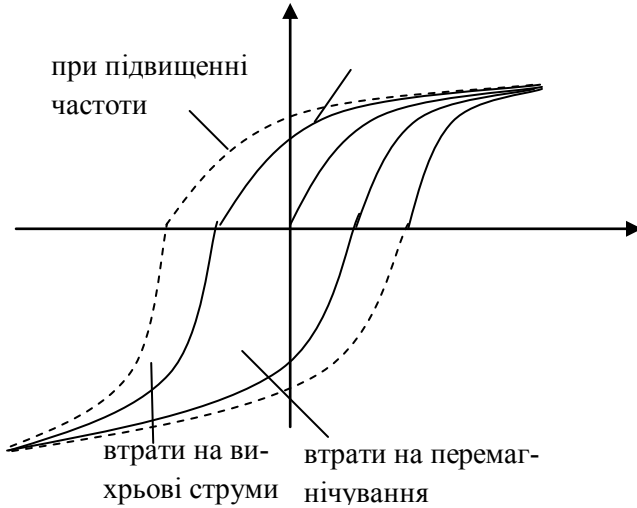


Рисунок 9.38

Однак у колах змінного струму, на відміну від кіл постійного струму, нелінійний елемент може бути описаний трьома видами характеристик:

- вольт - амперні характеристики для миттєвих значень;
- вебер - амперні характеристики за першими гармоніками;
- кулон - вольтні характеристики для діючих значень.

Якщо напруга, що впливає на нелінійний елемент (струм), містить постійну складову, то вольт - амперні, вебер- амперні

або кулон - вольтні характеристики зображують сімействами кривих, на яких постійна складова величини, що впливає, є параметром (рис. 9.39).

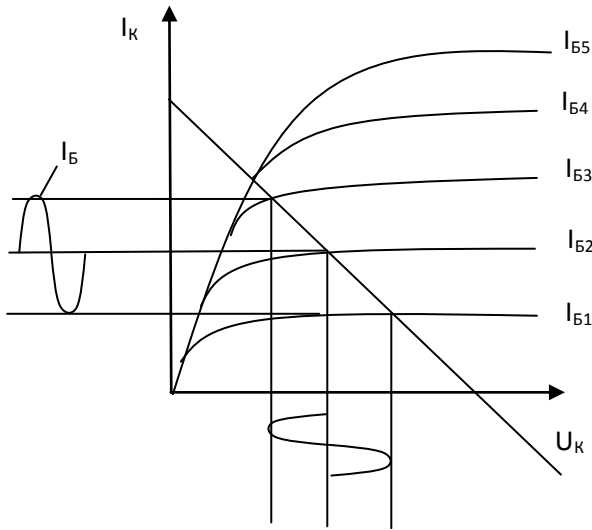


Рисунок 9.39

Характеристики для миттєвих значень зв'язують миттєві значення основних визначальних величин – U й i , Ψ і i , q й U .

ВАХ за першими гармоніками - зв'язок між амплітудними (діючими) значеннями перших гармонік струму і напруга на нелінійному елементі.

ВАХ для діючих значень - залежність між діючими значеннями струму та напруги на нелінійному елементі.

ВАХ за першими гармоніками і діючими значеннями одержують графічним або аналітичним шляхом з характеристик для миттєвих значень або знімають досвідченим шляхом, експериментально.

9.4.2 Кола з інерційними нелінійними елементами

Будемо вважати інерційними нелінійними елементами, стали часу яких, що характеризує їх інерційні властивості, набагато більші від періоду напруги та струму джерела живлення.

Наприклад, нелінійність характеристик деяких нелінійних опорів обумовлена зміною температури в результаті нагрівання їхнім струмом (електричні лампи накалювання, баретери, напівпровідникові термоопори – термістори й ін.)

Оскільки теплові процеси (нагрівання, охолодження) є інерційними процесами, то навіть при порівняно низькій частоті (наприклад, 50 Гц.) температура таких НЕ та відповідно їх опір протягом періоду практично не змінюються.

Це означає, що при сталому періодичному режимі параметри інерційного елемента залишаються незмінними протягом періоду зміни струмів і напруг, тобто інерційний нелінійний елемент діє як лінійний.

Аналіз кіл із інерційним нелінійним елементом

Отже, при сталих періодичних режимах інерційні нелінійні елементи діють як лінійні.

Отже, при синусоїдальній напрузі струми та напруги у всіх галузях також синусоїдальні та для опису сталого режиму можна скористатися комплексною формою запису і векторних діаграм.

Однак при різних діючих значеннях струму (напруги) сталого режиму параметри НЕ різні, тобто залежність між діючими значеннями струму та напруги буде лінійною.

Таким чином, для кіл з інерційними НЕ не можна користуватися методом накладення та всіма методами розрахунку кіл, що ґрунтуються на принципі накладання.

Розрахунок однорідних нелінійних кіл з інерційними елементами одного типу (L, R, C) за діючим значенням синусоїдальних струмів і напруг нічим не відрізняється від розрахунку нелінійних кіл при постійних струмах (магнітних потоках, зарядах).

У загальному випадку неоднорідних кіл доводиться враховувати нелінійність активної та реактивної частин опору елемента, а також складати струми та напруги, що перебувають у квадратурі.

9.4.3 Кола з безінерційними елементами

Елементи, у яких залежність між миттєвими значеннями напруги та струму (Ψ і i , q і U) нелінійна, називаються безінерційними. Практично ця переважна більшість всіх НЕ (діодів, тріоди, дроселі і т.д.), за винятком НЕ. Завдяки нелінійності характеристик безінерційні нелінійні елементи здатні перетворювати спектр коливань, що впливають на них. У результаті в струмі з'являються гармонічні складові, які в прикладеній напрузі відсутні.

Наприклад, при подачі синусоїдальної напруги струм через НЕ буде несинусоїдальним.

Аналіз кіл із безінерційними НЕ

Для аналізу нелінійних електричних кіл змінного струму з безінерційними елементами застосовують:

1. Графоаналітичний (графічний) метод.
2. Аналітичний.

Графічний метод

Графоаналітичний метод ґрунтується на використанні характеристик нелінійних елементів для миттєвих значень і рівнянь Кірхгофа.

1. Записують рівняння Кірхгофа для миттєвих значень.
2. Користуючись вольт-амперною характеристикою (вебер-амперною, кулон-вольтною), НЕ будують графічні залежності $u(t)$ і $i(t)$, тобто графічні залежності зміни шуканих величин у часі.

Розглянемо практично НЕ - дросель (катушка з феромагнітним осердям), що живить від мережі синусоїдальної напруги (рис. 9.40).

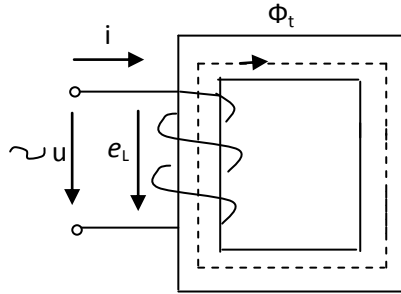


Рисунок 9.40

Вважатимемо для полегшення аналізу, що:

- опір обмотки дорівнює нулю;
- потік розсіювання дорівнює нулю.

Згідно з II законом Кірхгофа

$$u + e_L = 0 \Rightarrow u = -e_L \Rightarrow U_m \sin \omega t = \frac{d\psi}{dt},$$

$$W \frac{d\Phi_t}{dt} = U_m \sin \omega t,$$

$$\Phi_t = \int \frac{U_m}{W} \sin \omega t dt = \frac{U_m}{\omega W} \left[-\cos \omega t \right] + C = \frac{U \sqrt{2}}{2\pi f w} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right),$$

$$\Phi_t = \frac{U}{4.44 W f} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right).$$

$C=0$, тому що напруга синусоїдальна.

Висновки:

1. Магнітний потік у осерді повністю визначається напругою на обвитці і не залежить від параметрів магнітного кола.
2. При синусоїдальній напрузі живлення потік у осерді також синусоїдальний.
3. Потік відстає від прикладеної напруги на $\pi/2$.
4. Амплітуда потоку в осерді дроселя залежить тільки від величини прикладеної напруги (при $f_{\text{мережі}} = \text{const}$ та $W_{\text{дроселя}} = \text{const}$).

З'ясуємо тепер характер зміни струму. Скористаємося вебер-амперною характеристикою.

У результаті графічних побудов одержуємо криву струму i (рис. 9.41).

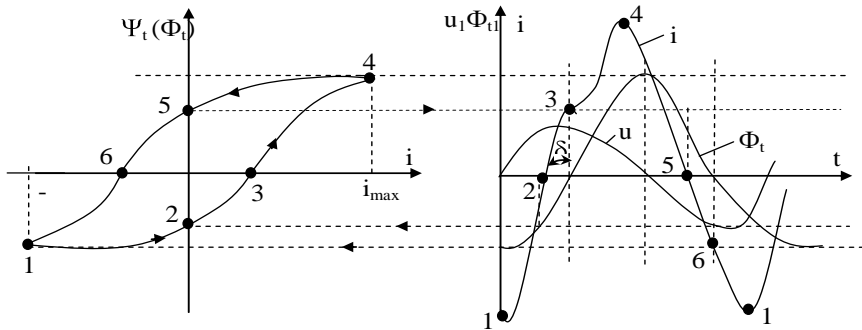


Рисунок 9.41

Висновки:

1. Струм несинусоїдальний. Причому внаслідок симетричності кривої струму щодо осі абсцис при розрізненні будуть відсутні парні гармоніки (присутні 3-тя, 5-та, 7-ма). Крива струму i має загострену форму.

2. Струм досягає max одночасно з потоком. Причому чим більше насичене осердя, тим більше max струму.

3. Струм відстає від напруги на $\varphi = 90^\circ - \delta$, де δ - кут втрат магнітних, обумовлений явищем гістерезису й пропорційний втратам енергії в одиниці об'єму осердя за 1 цикл перемагнічування.

Одним з прикладів нелінійного елемента є діод. Діод пропускає струм в одному з напрямків, а в іншому – не пропускає. Схема підключення діода до навантаження подана на рис. 9.42. Діоди використовуються для випрямлення, посилення, обмеження.

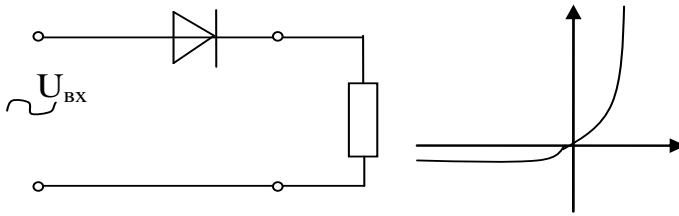


Рисунок 9.42

На рис. 9.43 проілюстрований процес обмеження від'ємних напівперіодів змінної напруги.

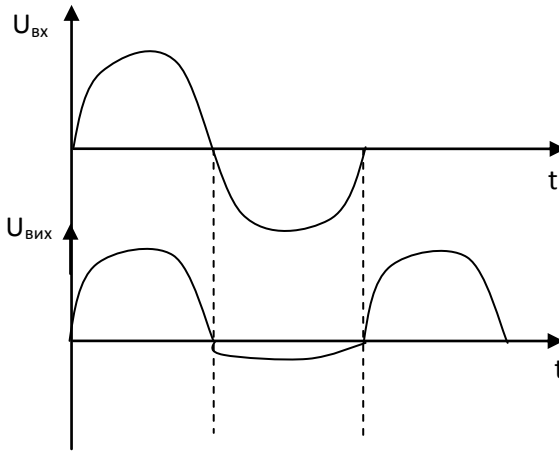


Рисунок 9.43

На рис. 9.44 подана схема включення діода обмеження напруги змінної (рис. 9.43).

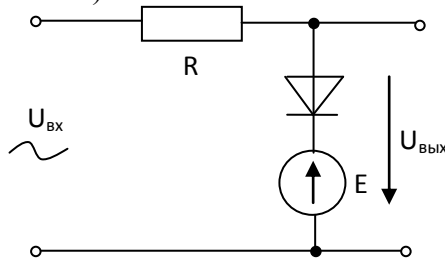


Рисунок 9.44

На рис. 9.45 поданий обмежувач струму.

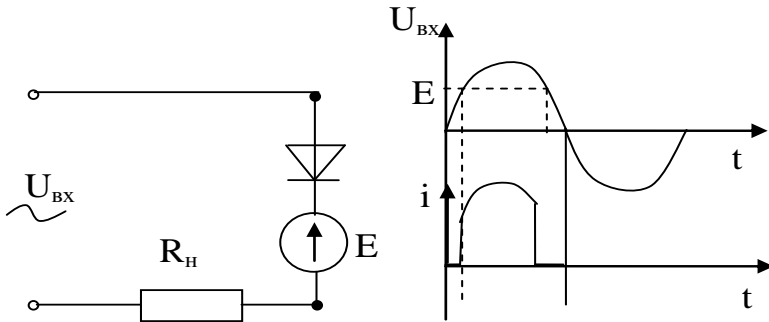


Рисунок 9.45

Переваги методу: простота, наочність, легкість врахування особливостей ВАХ.

Недолік методу: графічна побудова не дозволяє проводити аналіз у загальному вигляді, а дає розв'язання тільки для власних значень параметрів.

Якщо $i = I_m \sin \omega t$, то крива потоку відмінна від синусоїди та має спрощену форму. Крива ж напруги (ЕРС $e = -\frac{d\psi_t}{dt}$)

$u = \frac{d\psi_t}{dt}$ при цьому має досить загострену форму. Побудова кривої потоку за вебер-амперною характеристикою та заданій кривої струму виконується графічно. Криву $u(t)$ одержують диференціюванням кривої $\psi(t)$.

Отримані періодичні несинусоїдальні криві зміни шуканих величин можуть бути розкладені у ряд Фур'є (аналітично або графічно), що дозволить визначити їх діюче значення.

Неврахування вищих гармонік та розрахунок діючого значення першої гармоніки приводить до погіршення в кілька відсотків.

Приклад. Нехай у колі діє струм $i = I_{1m} \sin \omega t + I_{3m} \sin 3\omega t$,
 $I_{3m} = 0,4I_{1m}$.

Визначимо діюче значення струму

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_3^2} = 1,075I_1.$$

Отже, наявність 3-ї гармоніки становить 40% від 1-ї, збільшує діюче значення на 7,5%.

Аналітичний метод

Метод апроксимації ґрунтується на розв'язанні рівнянь стану кіл при наближеній заміні (апроксимації) характеристик нелінійних елементів у межах робочої ділянки аналітичними виразами.

При використанні методу лінеаризації апроксимація здійснюється прямою лінією.

При використанні методу кусково-лінійної апроксимації апроксимація здійснюється відрізками прямої лінії.

При використанні числових методів користується метод ітерації, Ньютона, а апроксимація здійснюється сплайнами.

9.5 Метод еквівалентних синусоїд

При багаторазовому повторенні розрахунків за характеристиками для миттєвих значень при різних значеннях струму (напруги) на нелінійному елементі можна одержати ВАХ НЕ для діючих значень струмів і напруг або діючих значень їх перших гармонік (переважніше перше).

У результаті для кожного конкретного режиму можна використати заміну несинусоїдальних струмів і напруг еквівалентними їм у змісті діючого значення синусоїдальними величинами (еквівалентними синусоїдами) і подальшими застосуванням для розрахунку комплексних чисел, векторних діаграм і т.п.

Графічний метод

При використанні графічного методу ВАХ для діючих значень НЕ задана у вигляді графіка.

Розрахунок графічним методом ведеться аналогічно до графічного розрахунку нелінійних кіл постійного струму (розрахунок нелінійних кіл з інерційними елементами).

Якщо коло містить активні та реактивні елементи, то струми і напруги складаються у квадратурі.

Аналітичний метод

У цьому випадку ВАХ апроксимується аналітичною функцією кусково-лінійною або лінійною апроксимацією, сплайнами.

Розрахунок ведеться аналогічно до кіл постійного струму з урахуванням квадратури співвідношень струмів і напруг.

У тих випадках, коли питання про форму несинусоїдальних кривих струмів і напруг не становить особливого інтересу (з погляду експлуатації, можливості ушкодження, небезпечних перенапруг і т.д.) можна скористатися наближеним аналітичним методом, що ґрунтується на заміні дійсних несинусоїдальних кривих струмів та напруг еквівалентними синусоїдами. Метод аналізу, що ґрунтується на такій заміні, називається *методом еквівалентних синусоїд*.

Зміст цього методу полягає у можливості запису рівнянь у комплексній формі, а також у побудові векторних діаграм, хоча комплексні опори залишаються залежними від струму, а отже, алгебраїчні рівняння, записані в комплексній формі, залишаються нелінійними.

Вибір еквівалентних синусоїд струму і напруги, тобто їхніх амплітуд і початкових фаз, може бути здійснений тим або іншим способом. Цікавлячись енергетичною стороною процесу, цей вибір доцільно здійснити так, щоб активна потужність у колі залишалася без зміни.

У електричних провідниках

$$\gamma_{\text{меді}} = 5,8 \cdot 10^7 \text{ 1/Ом} \cdot \text{м}, \quad \gamma_{\text{ізоляції}} = 10^{-3} \text{ 1/Ом} \cdot \text{м},$$

$$\frac{\gamma_{\text{М}}}{\gamma_{\text{ізоляція}}} = 5,8 \cdot 10^{10}.$$

У магнітних колах $\frac{\mu_{\text{фер}}}{\mu_0} \approx 10^3 \div 10^4$.

Тому виникає потік розсіювання! Це лінії з розподіленими параметрами.

Нехай струм у колі містить:

$$i = I_{1m} \sin \omega t + I_{3m} \sin 3\omega t,$$

$$I_{3m} = 0,4 I_{1m} \quad \left(I_3 = 0,4 I_1 \right)$$

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_3^2} = 1,075 I_1,$$

тобто наявність 3-ї гармоніки, що становить 40% від 1-й, збільшує діюче значення несинусоїдального струму порівняно з діючим значенням 1-ї гармоніки на 7,5%.

Нехай u – синусоїдальна, i – несинусоїдальний.

Еквівалентною синусоїдою повинна бути перша гармоніка струму, тому що

$$P = U_1 I \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + \dots = U_1 I_1 = U I_1 \cos \varphi_1$$

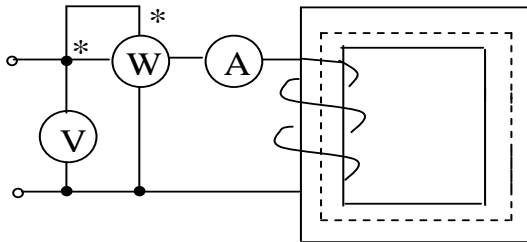


Рисунок 9.46

Нехай u – синусоїдальна, i – несинусоїдальний.

Щоб активна потужність кола залишилася незмінною $p = I^2 r$ необхідно, щоб діюче значення струму залишилося незмінним, тобто замінити несинусоїдальний струм синусоїдою, еквівалентною йому за діючим значенням.

9.5.1 Рівняння стану котушки з феромагнітним осердям

Замінюємо несинусоїдальний струм еквівалентним синусоїдальним, зрівнявши їх діючі значення.

З теорії відомо, що

$$I_{екв} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad \text{або} \quad I_{екв} = \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2 + \dots}$$

Виміряємо експериментально діюче значення несинусоїдального струму.

Тоді еквівалентна синусоїда $i_{екв} = I\sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi)$.

Виходячи з вибору умови еквівалентності за активною потужністю, маємо, $P_w = P = UvI \cos \varphi$.

Звідки $\varphi = \arccos \frac{P_w}{U_v I}$. Втрати визначаємо або теоретично,

або шляхом вимірів.

Можна також подати, що

$$\left. \begin{array}{l} I_\mu = I \cos \delta \\ I_a = I \sin \delta \end{array} \right\} \begin{array}{l} g_0 = \frac{I}{U} \sin \delta, \\ \epsilon_0 = \frac{I}{U} \cos \delta, \end{array} \quad \text{де } \delta = \arcsin \frac{P}{UI}$$

Це все для ідеальної котушки.

Для реального дроселя необхідно врахувати опір міді обвитки та потік розсіювання.

Рівняння стану $\dot{U} = \dot{I}R + jx_{L\sigma}\dot{I} - \dot{E} \quad -\dot{E} = \dot{U}_0$.

Векторні діаграми подані нижче (рис. 9.47 та рис. 9.48).

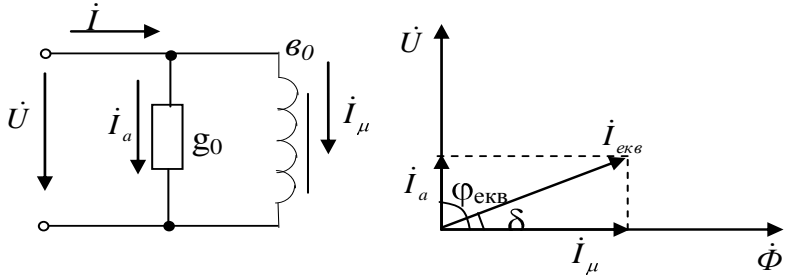


Рисунок 9.47

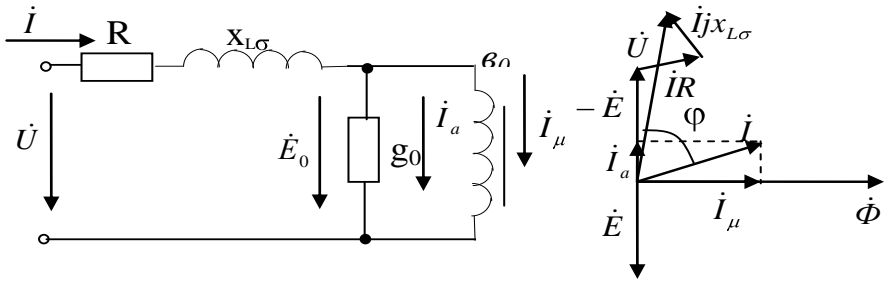


Рисунок 9.48

9.6 Ферорезонанс у нелінійних колах

У нелінійних колах явище резонансу може спостерігатися при послідовному та паралельному з'єднанні індуктивного і ємнісного елементів.

При цьому нелінійним може бути індуктивний або ємнісний елемент. Частіше на практиці спостерігається нелінійний індуктивний елемент, і резонанс називається *ферорезонансом*.

При послідовному з'єднанні L і C – ферорезонанс напруг (рис. 9.49).

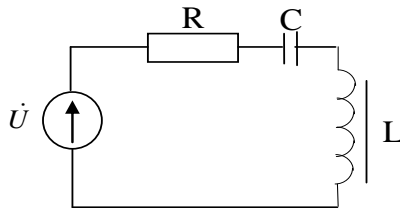


Рисунок 9.49

Вхідна ВАХ кола виходить шляхом послідовного додавання ВАХ елементів, якщо $R=0$ (рис. 9.50).

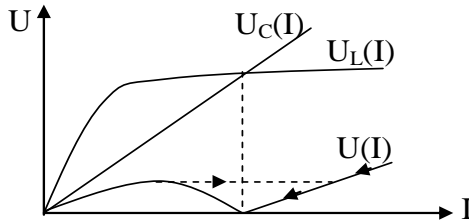


Рисунок 9.50

З ВАХ видно, що явище послідовного ферорезонансу характеризується стрибкоподібною зміною вхідного струму при зміні $U_{вх}$ і зміні фази струму.

У колах, що містять лінійний елемент C та нелінійний елемент L , має місце ферорезонанс напруги.

У випадку, коли R набуває ненульових значень одержуємо N – подібну характеристику (рис. 9.51).

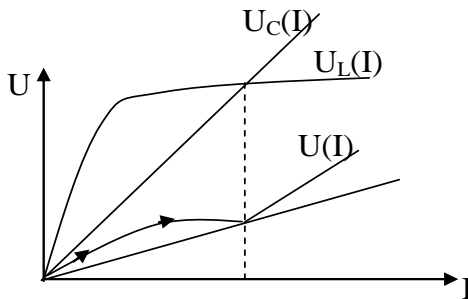


Рисунок 9.51

Тригерний ефект - явище різкої зміни струму при незначній зміні U . N – подібна характеристика зображена на рис. 9.52.

Зв'язок між U та I визначається ВАХ, що подібна до кривої намагнічування. Це означає, що зі збільшенням струму в обитці повний опір котушки Z зменшується. Активний опір R стано-

вить значну частку повного опору Z , тому наближено можна вважати, що повний опір має тільки індуктивний характер.

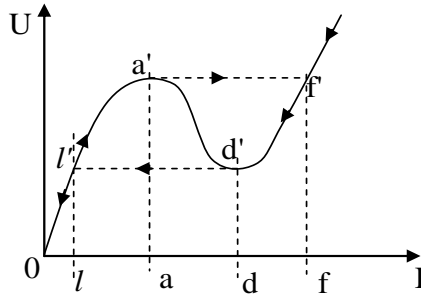


Рисунок 9.52

З рис. 9.52 видно, що при постійному збільшенні прикладеної до кола напруги (починаючи з нуля) струм спочатку поступово збільшується до деякого значення $0a$, а потім відбувається стрибок до нового значення $0f$, після чого знову планово збільшується. Якщо зменшити напругу на затискачах кола, починаючи зі значення, що більше ff' , то зміна вирівнюючого падіння напруги відбувається спочатку поступово на ділянці $f'd'$, а потім відбувається стрибок до нового значення $0l$, після чого напруга на ділянці $l'0$ зменшується.

Точка d' відповідає режиму ферорезонансу, який досягається зміною напруги живлення. При цьому змінюється еквівалентна індуктивність котушки

$$L=U/\omega I,$$

за рахунок чого досягається настроювання кола у резонанс.

Ділянка характеристики $a'd'$ є неробочою. Спадаюча ділянка $a'd'$ відповідає нестійкому режиму роботи кола. Цю ділянку не вдається експериментально зняти при живленні кола від джерела напруги. Якщо ж живити коло від джерела струму, то можуть бути експериментально зняті всі точки характеристики, оскільки кожному заданому значенню струму буде відповідати тільки одне значення напруги.

Ферорезонанс струмів виникає при паралельному з'єднанні нелінійної котушки та ємності (рис. 9.53).

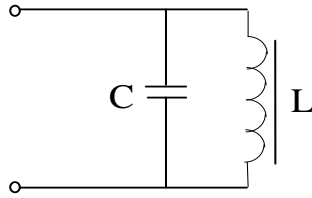


Рисунок 9.53

Вхідна ВАХ кола виходить шляхом послідовного додавання ВАХ елементів (рис. 9.54).

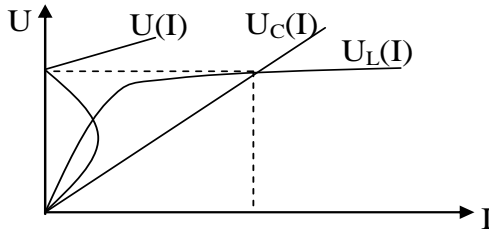


Рисунок 9.54

З урахуванням втрат та несинусоїдальності кривих $U(I)$ графік зображений на рис. 9.55.

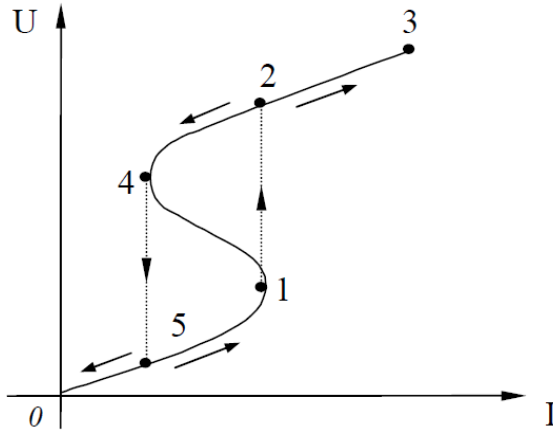


Рисунок 9.55

Стрибки напруги виникають при живленні кола від джерела регульованого струму. Зона 1-4 є нестійкою.

При резонансі реактивна складова першої гармоніки струму в індуктивності дорівнює струму у ємності. Загальний струм містить тільки активну складову першої гармоніки струму в індуктивності та вищі гармоніки. Як правило, амплітуда активної складової значно менша від амплітуди третьої гармоніки. Тому при ферорезонансі струмів загальний струм змінюється з потрібною частотою.

Усю характеристику експериментально знімають, коли коло живиться від джерела регульованої напруги.

9.7 Трансформатор з феромагнітним осердям

Наявність феромагнітного осердя дає можливість значно збільшити магнітний потік і завдяки цьому збільшити потужність, передану з одного кола в інше. Однак при цьому трансформатор стає нелінійним елементом кола і у осерді виникають втрати.

У більшості випадків прагнуть сконструювати трансформатор таким чином, щоб нелінійність по можливості мало впливала на його роботу. При аналізі роботи трансформатора часто нехтують його нелінійністю та подають напруги, струми і магнітний потік у вигляді еквівалентних синусоїд.

Залежно від призначення трансформатори діляться на: а) силові; б) вимірювальні; в) спеціального призначення (розділові, пік-трансформатори тощо). Процеси, що визначають роботу трансформаторів різних типів, по суті, ті самі та можуть бути вивчені на прикладі роботи двохобвиткового силового трансформатора, схема включення якого показана на рис. 9.56. На схемі вибраний зустрічний напрямок струмів (точками позначені од- нойменні затискачі обвитки).

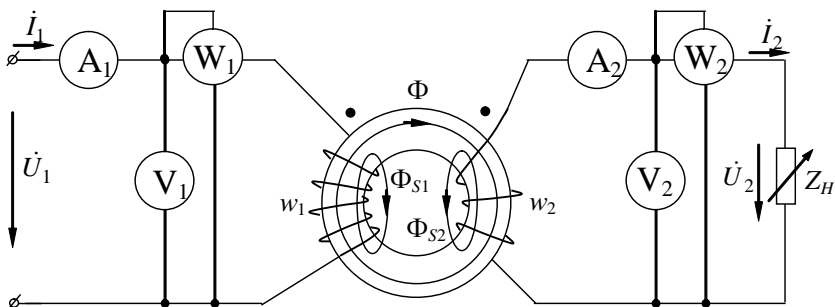


Рисунок 9.56

Для вивчення роботи такого трансформатора користуються схемою заміщення, що зображена на рис. 9.57. Основна відмінність цієї схеми від аналогічної схеми, розглянутої в першій частині курсу, полягає в наявності галузей втрат у сталі g_0 , включеної паралельно галузі намагнічування b_0 , як це було показано для котушки зі сталевим осердям.

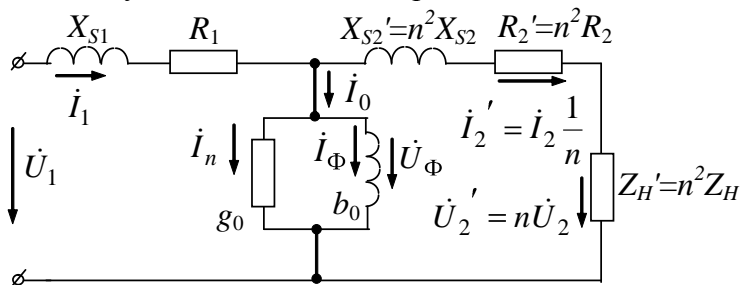


Рисунок 9.56

Цій схемі заміщення відповідає векторна діаграма, що зображена на рис. 2.24, а при опорі навантаження $Z_H = zh \angle \varphi_H$, де $\varphi_H > 0$.

Струм, що намагнічує I_Φ , створює магнітний потік Φ , що замикається за осердям. Цей потік наводить ЕРС $\dot{E}_1 = \dot{E}_2$, яка відстає на 90° від вектора $\dot{\Phi}_m$.

Напруга у гілці намагнічування, додатний напрямок якої збігається з дотаними напрямками струму \dot{I}_Φ та ЕРС \dot{E}_1 , дорівнює $\dot{U}_\Phi = -\dot{E}_1$. Напруга \dot{U}_1 дорівнює геометричній сумі спадання напруг у активних і індуктивних опорах обмоток і напруги \dot{U}'_2 на навантаженні. У свою чергу, первинний струм дорівнює $\dot{I}_1 = \dot{I}'_2 + \dot{I}_0$, звідки МРС $\dot{I}_0 w_1 = \dot{I}_1 w_1 - \dot{I}_2 w_2$ (складову $I_2 w_2$ іноді називають розмагнічувальною). Тут штрихами позначені величини, наведені до первинної обвитки.

Векторна діаграма, що зображена на рис. 2.24 а відповідає зустрічному напрямку струмів \dot{I}_1 та \dot{I}_2 . Якщо струми спрямовані узгоджено, то векторна діаграма трансформатора може бути отримана поворотом на 180° векторів, у які входить струм \dot{I}'_2 , у тому числі й вектора \dot{U}'_2 , що дорівнює спаду напруги від струму \dot{I}'_2 у опорі $Z_{H'}$. Векторна діаграма, показана на рис. 9.57, б для узгодженого напрямку струмів, наведена не для зазначених величин. При цьому МРС $\dot{I}_0 w_1 = \dot{I}_1 w_1 + \dot{I}_2 w_2$.

Режим при $Z_H=0$ називають режимом короткого замикання. Для силових трансформаторів цей режим при нормальній напрузі може існувати лише короткочасно, як аварійний: виділення великої кількості тепла в опорах обмоток R_1 і R_2 може викликати руйнування трансформатора.

На практиці здійснюють так званий режим короткого замикання трансформатора. При цьому режимі напругу $U_1=U_{1k}$ підбирають таким чином, щоб струм $I_2=I_{2k}$ дорівнював номінальному (нормальному) вторинному струму. Як правило, при цьому U_{1k} у кілька разів менша від номінальної напруги U_1 . Відповідно зменшуються E_1 , E_2 та Φ . Струм I_0 при цьому зменшується у значно більше разів внаслідок роботи осердя у ненасиченому режимі.

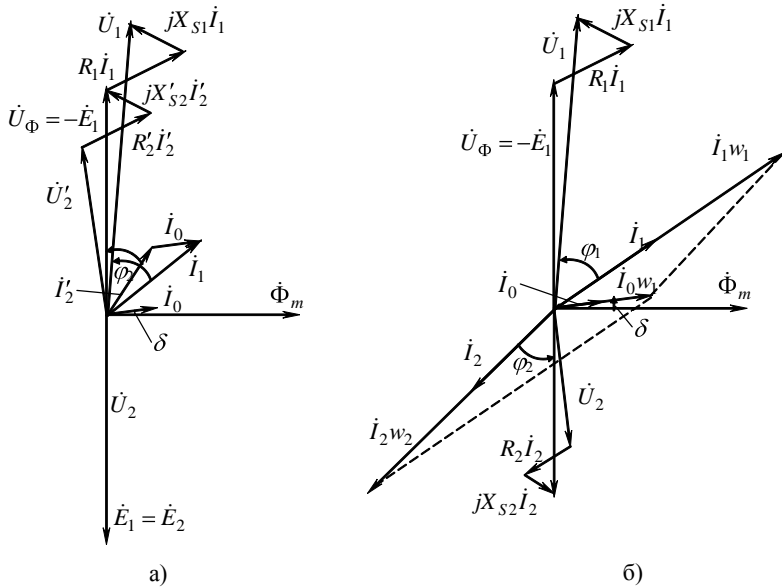


Рисунок 9.57

За результатами режиму короткого замикання визначають опори R_1 , X_{S1} , R_2 , X_{S2} , для чого вважають, що $g_0 \approx 0$, $b_0 \approx 0$, $R_1 \approx R_2$ і $X_{S1} \approx X_{S2}$. Одержувана при цьому точність цілком прийнятна для більшості практичних випадків.

Режим при $Z_H = \infty$ називають режимом неробочого ходу, або просто неробочим ходом трансформатора. При цьому $I_2 = 0$ та $I_1 = I_0$. Тому струм I_0 називають струмом неробочого ходу. У дійсності струм I_0 при неробочому ході ненабагато більше від струму I_0 при нормальному значенні Z_H , тому що внаслідок зменшення спадання напруги в первинній обмотці збільшується E_1 , що, у свою чергу, викликає збільшення Φ_T , а отже, I_0 . Виміри U_1 , I_1 і P_1 , зроблені при неробочому ході, який у цьому випадку називають режимом неробочого ходу, дозволяють легко визначити g_0 і b_0 , якщо відомі (з режиму короткого замикання) R_1 і X_{S1} .

9.8 Магнітний підсилювач

Найпростіший магнітний підсилювач (МП) називається також дроселем насичення, що показаний на рис. 9.58. Керуюча обвитка із числом витків w_y підключена через регульований опір R до джерела постійної напруги; робоча котушка із числом витків w_p і послідовно з'єднана з нею навантаження Z_H підключені до допоміжного джерела живлення із синусоїдальною напругою u .

Коло обмотки w_y для стислості будемо називати вхідним колом, а коло обмотки w_p та навантаження Z_H – вихідним.

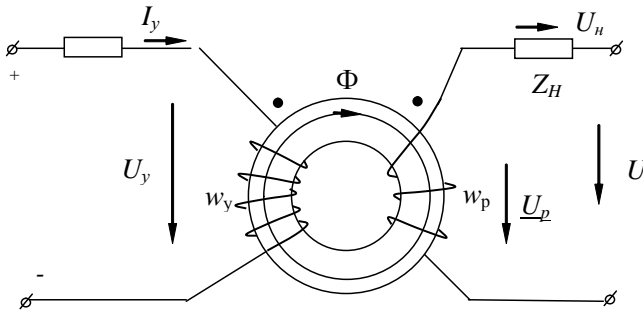


Рисунок 9.58

Магнітний потік, створений струмом I_y у обвитці w_y , називають потоком підмагнічування. Параметри вихідного кола підібрані таким чином, що за відсутності струму у вхідному колі, тобто за відсутності підмагнічування, осердя не насичене; вихідне коло є, по суті, послідовною сполукою навантаження та котушки зі сталевим осердям. Індуктивність цієї котушки (тобто обмотки w_p), пропорційна магнітній проникності, велика. За наявності струму у вхідному колі, тобто при підмагнічуванні осердя, магнітна проникність зменшується та індуктивність обмотки w_p знижується, у результаті цього зменшується напруга U_K , збільшуються струм у вихідному колі I_B та напруга у навантаженні U_H .

Спрощена схема, що зображена на рис 9.58, наведена тут тільки для з'ясування принципу роботи підсилювача. Практичному її застосуванню перешкоджають такі недоліки:

- змінний магнітний потік, створений струмом у обвитці w_p , наводить змінну ЕРС у обвитці w_y , внаслідок чого у колі керування виникає змінний струм, що викликає додаткові втрати потужності та погіршення роботи підсилювача;
- через те що змінна складова магнітного потоку у осерді не-синусоїдальна, причому друга гармоніка, що міститься у ній, відносно великі (рис. 9.58), у кривих напруги u_n та струму i_n з'являються небажані другі гармоніки.

Зазначені недоліки усуваються в підсилювачах із двома однаковими осердями (рис. 9.59), робочі обвитки яких із числами витків $w_p/2$ намотані в протилежних напрямках при однако- вому напрямку намотування керуючих обвиток із числами витків $w_y/2$. При такій схемі з'єднання перші гармоніки ЕРС, індуковані у керуючих обвитках, взаємно компенсуються, другі ж гармоніки – додаються. Поява парних гармонік у струмі керуючої обвитки не викликає істотної втрати потужності (через значну індуктивність вхідного кола). Створювана струмом парних гармонік у обвитці w_y , внаслідок закону Ленца зменшує амплітуди парних гармонік змінної складової магнітного потоку.

Що стосується парних гармонік ЕРС, що наводяться у робочих обвитках, то вони взаємно компенсуються.

Важливими характеристиками магнітного підсилювача є коефіцієнти підсилення за напругою, струмом та потужністю.

Коефіцієнт підсилення за напругою K_U – відношення збільшення вихідної напруги до збільшення напруги на вході:

$$K_U = \frac{\Delta U_n}{\Delta U_y}$$

Коефіцієнт підсилення за струмом K_I – відношення збільшення вихідного струму до збільшення вхідного струму:

$$K_I = \frac{\Delta I_n}{\Delta I_y}$$

Коефіцієнт підсилення за потужністю K_p – відношення збільшення вихідної потужності до відповідного до збільшення потужності на вході, відповідно:

$$K_p = \frac{\Delta P_n}{\Delta P_y}$$

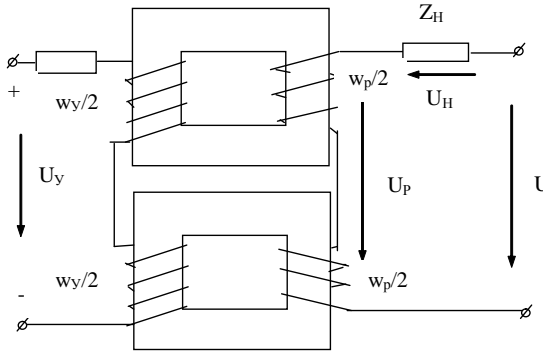


Рисунок 9.59

9.9 Феромагнітні стабілізатори напруги

Феромагнітні стабілізатори напруги використовуються для живлення багатьох пристроїв автоматики та вимірвальних приладів та характеризуються коефіцієнтом стабілізації

$$k_c = \frac{\Delta U_1 / U_1}{\Delta U_2 / U_2},$$

де U_1 – напруга на вході стабілізатора; U_2 – напруга на виході стабілізатора; ΔU_1 та ΔU_2 – зміна напруги на вході та виході.

Чим більший коефіцієнт стабілізації k_c , тим вищі стабілізуючі властивості кола. Стабілізація можлива тільки у нелінійних колах, оскільки у лінійних колах між напругами на вході та виході завжди існує пряма пропорційність ($k_c = 1$).

Фізичний зміст явища стабілізації полягає у такій зміні параметрів послідовно ввімкнених елементів нелінійного кола зі зміною напруги живлення, за якої відносна зміна напруги на одній із ділянок кола виявляється значно нижчою, ніж на вихідних клеммах.

Стабілізатори, основною частиною яких є нелінійні котушки зі сталлю та конденсатор, називаються ферорезонансними. Найпростіший стабілізатор може бути побудований всього з двох елементів (рис. 9.60).

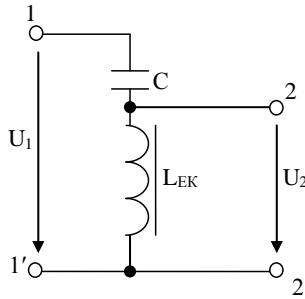


Рисунок 9.60

Побудуємо характеристики кола у координатах $U_2(U_1)$ на основі графіків ферорезонансу напруг (рис. 9.61).

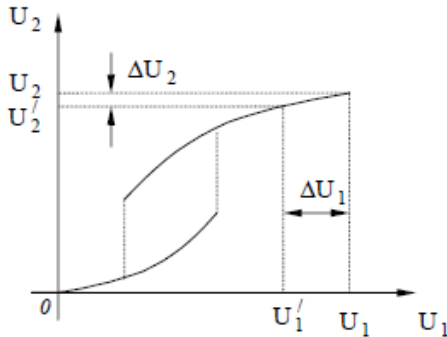


Рисунок 9.61

Котушка у схемі працює при досить глибокому насиченні. При збільшенні напруги U_1 струм зростає, що приводить до

зменшення еквівалентної індуктивності. Тому напруга на котушці змінюється меншою мірою. Ввімкнення навантаження погіршує стабілізацію, оскільки робить ділянку 2 – 2' меншою смірою нелінійною.

Замість конденсатора С у коло можна ввімкнути лінійний резистор чи котушку з лінійною характеристикою, але ефект стабілізації буде меншим, оскільки зміна струму у котушці зі стальним магнітопроводом, а відповідно і в її еквівалентній індуктивності при зміні напруги живлення у цих випадках, менше.

Існують і складніші схеми, що забезпечують більш високі стабілізуючі властивості та меншу залежність від навантаження (рис. 9.62).

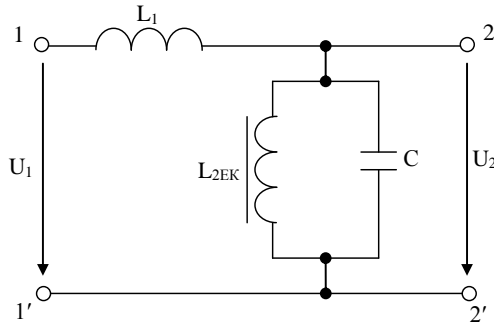


Рисунок 9.62

На рис. 9.62 L_1 - лінійна індуктивність з ненасиченим стальним осердям, L_{2EK} - нелінійна індуктивність.

На характеристиках схеми (рис. 9.62) до ферорезонансної характеристики $U_2(I_1)$ додано U_{L1} , що дає $U_1(I_1)$. При зміні U_1 на ΔU_1 напруга змінюється значно менше ΔU_2 (рис. 9.63).

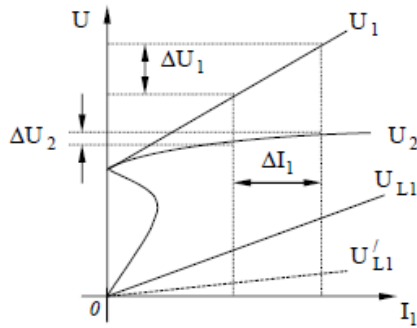


Рисунок 9.63

Якість стабілізації може бути більш покращена, якщо на виході ввімкнути L'_1 , що індуктивно пов'язана з L_1 (рис. 9.64). При цьому з напруги на контурі $L_{2.E} - C_2$ віднімається напруга U'_{L1} , що є частиною напруги U_{L1} на L_1 .

Необхідно зазначити, що за рахунок нелінійності кола криві струму та напруги виявляються несинусоїдальними та містять вищі гармоніки.

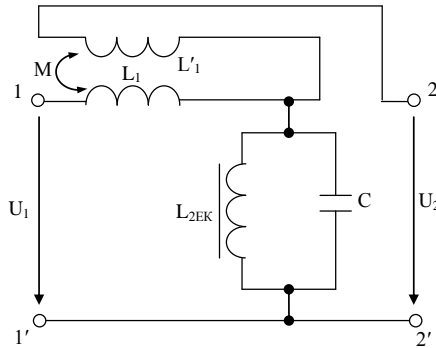


Рисунок 9.64

РОЗДІЛ 10 СТІЙКІСТЬ ТА СИНТЕЗ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

10.1 Частотні характеристики схемних функцій

10.1.1 Поняття про схемні функції

Схемна функція – відношення зображення реакції кола до зображення дії, що викликала цю реакцію (дія тільки одна – струм або напруга). Схемні функції застосовуються для лінійних кіл.

Оскільки схема може містити реактивні елементи, опори яких залежать від частоти, значення струмів та напруг у гілках теж у загальному випадку будуть залежати від частоти. Якщо дія є гармонічною функцією, зручно користуватися поданням дії та реакції у комплексному вигляді. При цьому залежність амплітуди реакції від частоти називається амплітудно-частотною характеристикою (АЧХ), а залежність аргумента – фазо-частотною характеристикою (ФЧХ). Наприклад: АЧХ (ФЧХ) вхідного опору, коефіцієнта передачі (рис. 10.1) та інше. Схемні функції використовуються, щоб не прив'язуватися до вхідного рівня сигналу. Якщо відоме значення схемної функції на будь-якій частоті: $\dot{F}(\omega) = F(\omega)$, то реакція знаходиться так: $\dot{X}(\omega) = \dot{Q}(\omega) \cdot \dot{F}(\omega)$, де Q – зображення дії. Наведемо приклад.

Нехай вхідний сигнал визначається виразом

$$u_{BX} = u'_{BX} + u''_{BX} + u'''_{BX} = 10 + 5 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + 60^\circ) + 42 \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + 30^\circ)$$

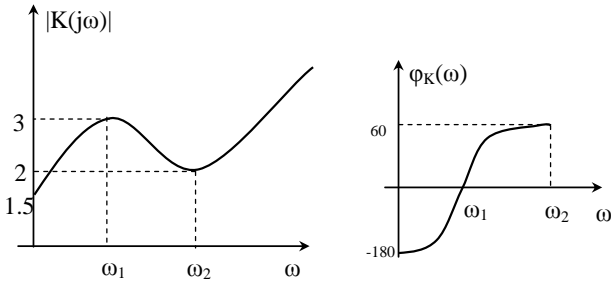


Рисунок 10.1 – АЧХ та ФЧХ коефіцієнта передачі

У загальному випадку для кожної комплексної амплітуди $\dot{U}_{BIX} = \dot{K} \cdot \dot{U}_{BX}$. На основі принципу суперпозиції можна знайти реакцію на кожний доданок U_{BX} та одержати U_{BIX} , що дорівнює сумі цих реакцій.

Запишемо реакцію для кожної складової окремо:

$$\dot{u}'_{BIX} = u'_{BX} \cdot K \angle 180^\circ = 15 \cdot 10 \cdot e^{j180^\circ} = -15, \text{ де } \dot{K} = \frac{\dot{U}_{BIX}}{\dot{U}_{BX}},$$

$$\begin{aligned} \dot{u}''_{BIX} &\rightarrow 5 \cdot e^{j60^\circ} \cdot K \angle \varphi_1 = 5 \cdot e^{j60^\circ} \cdot 3 \cdot e^{j0^\circ} = \\ &= 15 \cdot e^{j60^\circ} \rightarrow 15 \cdot \cos(\varphi_1 \cdot t + 60^\circ), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{u}'''_{BIX} &\rightarrow 42 \cdot e^{j30^\circ} \cdot K \angle \varphi_2 = 42 \cdot e^{j30^\circ} \cdot 2 \cdot e^{j60^\circ} = \\ &= 84 \cdot e^{j90^\circ} \rightarrow 84 \cdot \cos(\varphi_2 \cdot t + 90^\circ). \end{aligned}$$

Запишемо загальний вираз вихідного сигналу

$$u_{BIX} \angle = -15 + 15 \cdot \cos(\varphi_1 \cdot t + 60^\circ) + 84 \cdot \cos(\varphi_2 \cdot t + 90^\circ).$$

У загальному випадку, якщо вхідна напруга – періодична (але не гармонічна) функція, її можна подати рядом Фур'є

$$u_{BX}(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n \cdot \cos(\varphi_n \cdot \Omega \cdot t + \varphi_n), \text{ где } \Omega = 2 \cdot \pi \cdot f = \frac{2 \cdot \pi}{T}.$$

Якщо дано $\dot{K} \angle \varphi$, то

$$u_{BIX} \angle = U_0 \cdot \dot{K} \angle \varphi + \sum_{n=1}^{\infty} |\dot{K} \angle \varphi \cdot \Omega| \cdot U_n \cdot \cos(\varphi_n \cdot \Omega \cdot t + \varphi_n + \varphi_k \angle \varphi \cdot \Omega).$$

Значимо, що при $\omega=0$ маємо справу з постійним струмом та ФЧХ 0 чи 180 градусів просто визначить знак доданка. Якщо вхідний сигнал – неперіодична функція (рис. 10.2), то для неї використовують поняття спектральної густини, і тоді спектральна густина на виході буде дорівнювати спектральній густині на вході, помноженій на коефіцієнт передачі. На основі частотної характеристики можна оцінити, які зміни відбудуться у спектральних складових вхідного сигналу. Наприклад, якщо АЧХ на верхніх частотах має завал, то амплітуди з верхніми частотами на виході будуть зменшуватися. Якщо подати на вхід імпульс із

крутим фронтом, то на виході такого різкого фронту не буде (очевидно, що різкій зміні функції відповідають високі частоти).

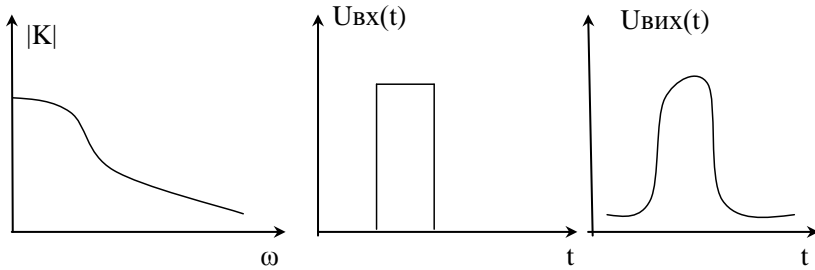


Рисунок 10.2

На основі спектрального підходу можна визначитись, яким повинен бути коефіцієнт передачі, щоб схема не спотворювала вхідний сигнал. З точки зору ряду Фур'є необхідно, щоб амплітуди всіх спектральних складових змінилися в одній пропорції. При цьому АЧХ буде мати вигляд прямої, але одного тільки цього мало. Кожна спектральна складова повинна одержати однаковий зсув у часі (затримка). $n \cdot \Omega \cdot (-t_3) = n \cdot \Omega \cdot t - n \cdot t_3 \cdot \Omega$. У цьому виразі другий доданок (зі знаком «мінус») – доданок до початкової фази. При цьому ФЧХ має вигляд прямої з від'ємним нахилом. Причому чим більший цей нахил, тим більше час затримки.

10.1.2 Частотні характеристики

1 Чисельний підхід

Вмикаємо джерело дії конкретної частоти. На цій частоті знаходимо всі опори (провідності) реактивних елементів. Потім будь-яким відомим способом знаходимо потрібну реакцію. Після цього ділимо комплексну амплітуду реакції на комплексну амплітуду дії та одержуємо одну точку. Аналогічно здійснюємо розрахунки на конкретних частотах та будуємо за точками криву АЧХ чи ФЧХ.

2 Аналітичний підхід

Частоту ω задаємо символом (літерою) та одержуємо аналітичний вираз для схемної функції у вигляді відношення поліномів (зручніше користуватися цим способом для простих схем). Тут слід зазначити, що оскільки мова йде у загальному випадку про схемну функцію $F(p)$, де $p = \sigma + j \cdot \omega$, то можемо прийняти $\sigma = 0$ та перейти до $F(j \cdot \omega)$. У свою чергу, схемна функція подається у вигляді відношення поліномів, тому її можна обчислити за допомогою визначників матриці еквівалентних параметрів $F(p) = \frac{\Delta_i}{\Delta_j}$, а оскільки елементами матриці є доданки

вигляду $a + b \cdot p + \frac{d}{p}$, то визначники у наведеному вище дробі будуть поліномами змінної p :

$$F(p) = \frac{a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_0}{b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \dots + b_0}. \quad (2.1)$$

Якщо $p = j \cdot \omega$, то

$$\begin{aligned} F(j \cdot \omega) &= \frac{a_0 - a_2 \omega^2 + a_4 \omega^4 - \dots + j \cdot (a_1 \omega - a_3 \omega^3 + \dots)}{b_0 - b_2 \omega^2 + b_4 \omega^4 - \dots + j \cdot (b_1 \omega - b_3 \omega^3 + \dots)} \\ &= \frac{F_{1\text{Re}}(j \cdot \omega) + j \cdot F_{1\text{Im}}(j \cdot \omega)}{F_{2\text{Re}}(j \cdot \omega) + j \cdot F_{2\text{Im}}(j \cdot \omega)} \end{aligned}$$

Якщо необхідно обчислити це за допомогою комп'ютера, то рекомендується для конкретної частоти $\omega = \omega_i$ зробити таке:

$$F(j \cdot \omega_i) = \frac{F_{1\text{Re}}(\omega_i) + j \cdot F_{1\text{Im}}(\omega_i)}{F_{2\text{Re}}(\omega_i) + j \cdot F_{2\text{Im}}(\omega_i)} = \frac{A + j \cdot B}{C + j \cdot D} = \frac{|F_1| \cdot e^{j \cdot \varphi_1}}{|F_2| \cdot e^{j \cdot \varphi_2}},$$

$$|F| = \frac{|F_1|}{|F_2|}; \varphi = \varphi_1 - \varphi_2,$$

де A, B, C, D – числа.

Отже,

$$F(j\omega_1) = \frac{|F_1|}{|F_2|} \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \Big|_{\omega = \omega_1}.$$

Зазвичай при формуванні схемної функції застосовується нормування елементів (наприклад, усі ємності – в нФ, індуктивності – в мГн, опір – в кОм, а час – в мкс), що дозволяє значно зменшити розкид значень коефіцієнтів поліномів та підвищити точність обчислень. При розрахунках на ПК поліноми зручно подати у вигляді масиву: адрес комірки масиву відповідає зазначеній степені змінної p , а її вміст – коефіцієнту при цій степені. Обчислення значення полінома для кожної частоти, як правило, здійснюються за схемою Горнера. Наприклад, для полінома п'ятого порядку:

$$a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 + a_4 p^4 + a_5 p^5 = a_0 + p(a_1 + p(a_2 + p(a_3 + p(a_4 + a_5 p))))).$$

Обчислювальний процес за схемою Горнера починають з останнього доданка останнього виразу та розкривають від кінця до початку.

Побудова частотних характеристик за аналітичними виразами зручна в тих випадках, коли необхідно одержувати велику кількість точок ЧХ чи будувати графіки с «плаваючим» кроком (за частотою). Якщо є аналітичний запис, то за похідною можна визначити швидкість зміни функції та на основі цього змінювати крок за частотою.

10.2 Карта нулів та полюсів схемних функцій

Відомо, що будь-яка схемна функція є дробово-раціональною функцією комплексної змінної p :

$$F(p) = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}.$$

Нулями називаються корені полінома чисельника, а полюсами називаються корені полінома знаменника.

На основі теореми Вієта схемну функцію можна подати у такому вигляді:

$$F(p) = \frac{a_n}{b_m} \cdot \frac{(p - p_0)(p - p_n) \dots (p - p_{0n})}{(p - p_{n1})(p - p_{n2}) \dots (p - p_m)}. \quad (10.2)$$

Якщо корені полінома чисельника та знаменника зобразити на комплексній площині, то одержимо так звану, карту нулів та полюсів. На карті нулі зображуються колами, а полюси хрестиками. Коефіцієнт $K_0 = a_n / b_n$ зазначається з краю площини.

Наприклад, нулі та полюси (рис. 10.3) можуть бути комплексні $p_k = \alpha \pm j\omega$. На рис. 10.3 колом позначені нулі, а хрестиком – полюси.

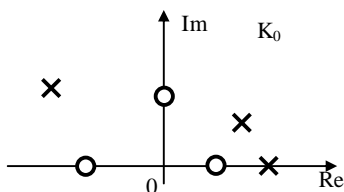


Рисунок 10.3

При побудові частотної характеристики вважають, що $p = j\omega$.

Одержимо, що

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= K_0 \frac{(j\omega - p_{01}) \dots (j\omega - p_{0n})}{(j\omega - p_{n1}) \dots (j\omega - p_{nm})} = \\ &= K_0 \frac{A_1 e^{j\varphi_1} \dots A_n e^{j\varphi_n}}{B_1 e^{j\psi_1} \dots B_n e^{j\psi_n}}. \end{aligned}$$

У кожному доданку необхідно поставити значення ω , для якого потрібно знайти функцію F . У останньому виразі множники подані в алгебраїчній та показниковій формі.

Останнє співвідношення можна подати в іншому вигляді:

$$F(j\omega) = K_0 \frac{\left(\prod_{i=1}^n A_i\right) e^{j \sum_{i=1}^n \varphi_i}}{\left(\prod_{t=1}^m B_t\right) e^{j \sum_{t=1}^m \psi_t}}. \quad (10.3)$$

Дамо геометричну інтерпретацію виразу 10.3 (рис. 10.4). Спочатку покажемо, що являє собою кожний доданок на конкретній частоті. Значення кожного кореня чисельника чи знаменника на комплексній площині можуть бути зображені векторами (показникова форма запису комплексних чисел). Для конкретної i -ї точки частотної характеристики змінна ω - конкретне число ω_i . Величина $j\omega_i$ - чисто уявне число і на комплексній площині зображується вектором, що йде з початку координат перпендикулярно до дійсної осі. Тоді різниця кореня p_{0i} (чи p_{nk}) та конкретної $j\omega_i$ теж може бути зображена вектором, що виходить з координати кореня p_{0i} (чи p_{nk}) та спрямований в точку $j\omega_i$.

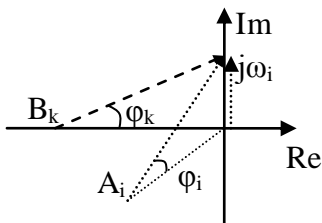


Рисунок 10.4

Якщо змінювати частоту від нуля до нескінченості, то кінці векторів, які відповідають кожному доданку чисельника та знаменника, будуть "рухатися" за уявною віссю. І від того, як швидко будуть змінюватися довжини векторів та їх кути, можна буде судити про хід АЧХ та ФЧХ. Відповідно до останнього виразу АЧХ знаходиться як добуток довжин векторів чисельника, що поділені на добуток довжин векторів знаменника. ФЧХ дорі-

внює сумі кутів векторів чисельника мінус суму кутів векторів знаменника.

Приклад 10.1 Побудувати карту нулів та полюсів для кола (рис. 10.5).

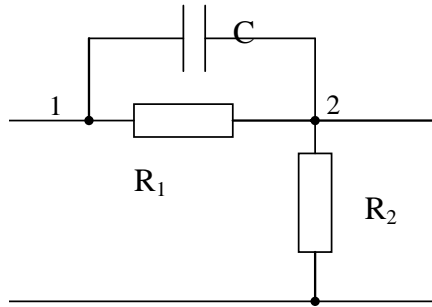


Рисунок 10.5

Скористаємося методом вузлових напруг, щоб записати матрицю провідностей:

$$Y = \begin{bmatrix} g_1 + pC & -g_1 - pC \\ -g_1 - pC & g_1 + pC + g_2 \end{bmatrix}.$$

Використовуючи матрицю провідностей, запишемо коефіцієнт передачі за напругою:

$$K_U = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}} = \frac{pC + g_1}{g_1 + g_2 + pC} = \frac{p + g_1/C}{p + (g_1 + g_2)/C} = \frac{p + \alpha}{p + \beta},$$

$$\beta > \alpha, \quad P_{01} = -\alpha, \quad P_{n2} = -\beta.$$

Побудуємо карту нулів та полюсів (рис. 10.6).

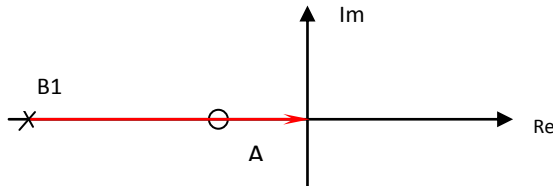


Рисунок 10.6

При постійному струмі $\omega=0$. При цьому вектори чисельника та знаменника Y ($A1$ і $B1$ відповідно) спрямовані до початку координат (рис. 1). Тому

$$K(o) = \frac{A1}{B1} e^{j0}, \quad K(o) = \frac{g_1}{g_1 + g_2} < 1.$$

При невеликих частотах зі збільшенням частоти ω швидкість збільшення довжини та величини кута вектора $A1$ більше, ніж $B1$. Тому АЧХ та ФЧХ спочатку збільшуються (рис. 10.7 а). Потім ці швидкості вирівнюються (рис. 10.7 б): відношення довжини $A1$ до $B1$ прямує до константи, різниця їх кутів прямує до нуля.

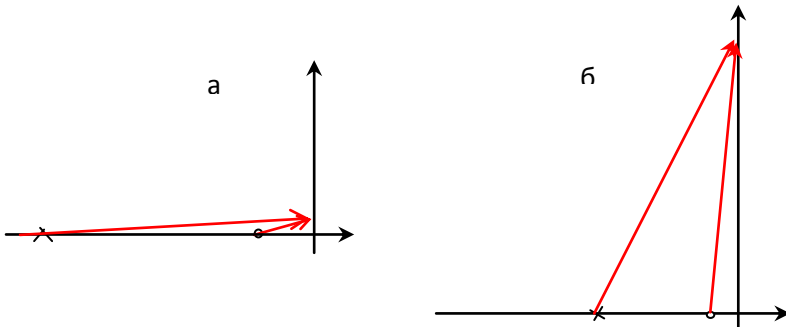


Рисунок 10.7

У результаті для АЧХ та ФЧХ можна одержати графіки, що зображені на рис. 10.8. Наведений спосіб побудови зручний для якісної побудови ЧХ (для оцінки).

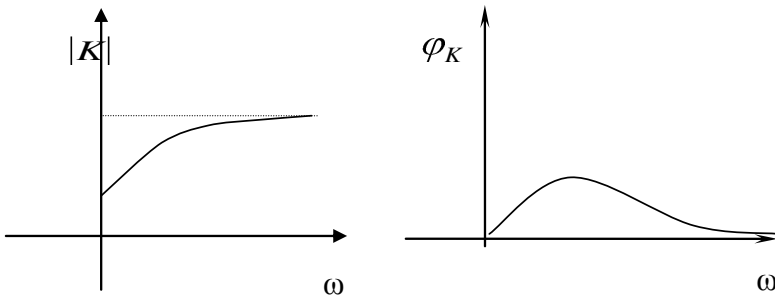


Рисунок 10.8

10.3 Критерії стійкості схемних функцій

10.3.1 Загальні положення

Під стійкістю системи будемо розуміти її здатність прямувати від яких-небудь початкових умов до стану рівноваги або стаціонарного стану. Про стійкість кола можна говорити у широкому та вузькому розумінні. Можна говорити про стійкість кожної схемної функції або про стійкість системи в цілому. Різні схемні функції одного й того ж кола можуть бути стійкими чи нестійкими. Стійкість кола визначається коренями характеристичного полінома диференціального рівняння або коренями полінома знаменника схемної функції. Для стійких систем дійсні частини коренів повинні бути від'ємними, щоб доданки виразів вигляду були загасаючими

$$f \llcorner \llcorner = \sum A_i e^{p_i t} . \quad (10.4)$$

Якщо корені дійсні та від'ємні, то система швидше за все стійка. Надалі будемо розглядати питання щодо стійкості конкретної схемної функції. Але якщо будемо говорити про стійкість кола щодо якого-небудь із входів, то необхідно мати на увазі стійкість вхідної провідності та опору одночасно.

Таким чином, питання про стійкість схемної функції можна звести до питання про визначення місця розміщення коренів її знаменника - полюсів. Через те, що у більшості випадків знаходження коренів полінома більше 2-го степеня складне, то для дослідження стійкості використовують так звані критерії стійкості.

Критерій стійкості - це метод, що дозволяє сказати, чи має поліном корінь у правій напівплощині чи ні, без безпосереднього обчислення цих коренів.

Поліном, у якого всі корені знаходяться у лівій напівплощині, називається поліномом Гурвіца.

Поліном Гурвіца має такі ознаки :

- усі коефіцієнти дійсні та одного знака;

- присутні всі степені (хоча можуть бути або тільки парні або тільки непарні степені).

До критеріїв стійкості схемних функцій відносять

- частотний критерій Михайлова;
- критерій Рауса-Гурвіца;
- критерій Гурвіца;
- критерій Рауса.

Далі розглянемо ці критерії детальніше.

10.3.2 Частотний критерій Михайлова

Схемна функція

$$F(p) = a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n \quad (10.5)$$

є стійкою (тобто не має коренів у правій напівплощині), якщо годограф $F(j\omega)$ послідовно пройде n квадрантів проти годинникової стрілки, починаючи з позитивної дійсної осі при зміні частоти від нуля до нескінченності. Цей прохід повинен бути монотонним, без перетворення $F(j\omega)$ у нуль.

$$F(j\omega) = a_0 + a_2 \omega^2 + a_4 \omega^4 + \dots + j(a_1 \omega + a_3 \omega^3 + \dots). \quad (10.6)$$

Цей метод можна довести, якщо знати, як будується АЧХ і ФЧХ за картою нулів і полюсів.

Розглянемо, що таке годограф. Припустимо, що при частоті $\omega = \omega_1$ схемна функція дорівнює

$$F(j\omega_1) = A_1 e^{j\varphi_1},$$

а при частоті $\omega = \omega_2$

$$F(j\omega_2) = A_2 e^{j\varphi_2}.$$

Крива, що описує рух кінця вектора F при зміні ω , називається годографом (рис. 10.9).

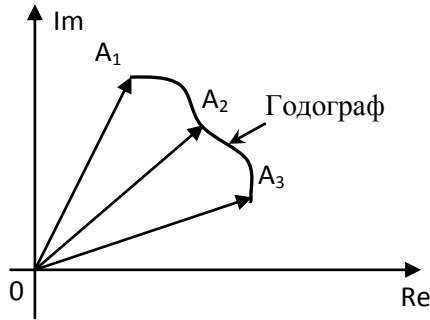


Рисунок 10.9 – Зображення годографа

Припустимо, що всі корені полінома знаходяться у лівій напівплощині, і розташовані, як вказано на рис. 10.10.

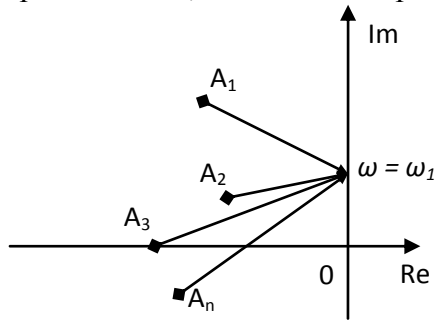


Рисунок 10.10 – Зображення векторів на комплексній площині

Нехай вектори описуються виразом

$$F(\omega) \approx a_n (\omega - p_1) (\omega - p_2) \dots (\omega - p_n), \quad (10.7)$$

де $p = j\omega$.

Кожен доданок можна подати у вигляді вектора

$$F_i(\omega) \approx |F_i| \cdot e^{j\varphi_i}, \quad (10.8)$$

де $\varphi_i \approx \sum \Psi_i$.

Якщо всі корені знаходяться у лівій напівплощині, то, як видно з рис. 2.10, зі збільшенням частоти сума кутів

$\varphi(\omega) = \sum \Psi_i$ буде монотонно зростати до $\frac{\pi}{2} \cdot n$, де n – кількість векторів (коренів полінома). Тобто вектор буде монотонно повертатися проти годинникової стрілки, проходячи n квадрантів при зміні ω від нуля до нескінченності.

10.3.3 Метод Рауса-Гурвіца

Даний критерій полягає у тому, що необхідною і достатньою умовою наявності коренів у лівій напівплощині є той факт, що всі головні мінори матриці Рауса-Гурвіца повинні бути одного знака.

Для полінома

$$F(p) = a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n$$

матриця Рауса-Гурвіца складається таким чином:

- по діагоналі вписуються всі коефіцієнти a_i (у лівому верхньому куті – коефіцієнт при першому степені p , у правому нижньому – при найстаршому);
- праворуч від діагонального елемента записуються коефіцієнти при молодших степенях, аж до вільного члена;
- ліворуч записуються коефіцієнти при старших степенях.

Для полінома п'ятого степеня матриця Рауса-Гурвіца буде мати вигляд:

a_1	a_0	0	0	0
a_3	a_2	a_1	a_0	0
a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
0	0	a_5	a_4	a_3
0	0	0	0	a_5

Приклади головних мінорів:

$$M_1 = a_1, \quad M_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3.$$

Усі мінори для даного прикладу знаходимо як визначники виділеної частини матриці щодо головної діагоналі. Коефіцієнти a_i виражаються через елементи схеми, тому і мінори можна виразити через елементи схеми, тобто судити про вплив останніх на стійкість.

10.3.4 Критерій Гурвіца

Критерій Гурвіца ще по-іншому називають критерієм ланцюгового дробу. Припустимо, що нам відомий поліном знаменника схемної функції

$$F_2(p) = F_{2П}(p) + F_{2Н}(p), \quad (10.9)$$

де $F_{2П}(p)$ складається з парних степенів, а $F_{2Н}(p)$ - непарних степенів.

Критерій полягає у тому, що якщо у процесі ділення з перетворенням полінома парної частини на непарну або, навпаки, всі коефіцієнти розкладання будуть одного знака, то поліном стійкий. Розглянемо приклад.

Приклад 10.2 Перевірити на стійкість такий поліном:

$$F(p) = 12p^5 + 12p^4 + 16p^3 + 10p^2 + 5p + 1.$$

Розв'язання

Розіб'ємо наш поліном на парні та непарні поліноми

$$F_{2П}(p) = 12p^4 + 10p^2 + 1, \quad F_{2Н}(p) = 12p^5 + 16p^3 + 5p.$$

Розділимо поліном старшого степеня на молодший

$$\begin{array}{r}
12p^5 + 16p^3 + 5p \Big| 12p^4 + 10p^2 + 1 \\
\underline{12p^5 + 10p^3 + p} \\
6p^3 + 4p \\
\underline{6p^3 + 3p} \\
2p^2 + 1 \Big| \frac{p}{2p} \\
\underline{2p^2} \\
p \Big| \frac{1}{1p} \\
\underline{p} \\
0
\end{array}$$

Оскільки всі поліноми чисельника одного знака, то поліном стійкий.

10.3.5 Критерій Рауса

Розглянемо суть критерію Рауса. Випишуємо у два рядки парні та непарні коефіцієнти полінома. Рядки коефіцієнтів c , d , f та інші формуються за нижчеподаним правилом (аналогічно до комбінації при розкритті визначника).

Таблиця коефіцієнтів

$$\begin{bmatrix}
a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & a_0 \\
a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & a_1 \\
c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \\
d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_n \\
f_1 & f_2 & f_3 & \dots & f_n
\end{bmatrix},$$

де коефіцієнти визначаються таким чином:

$$c_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}, \quad c_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{c_{n-1}}, \dots$$

$$d_1 = \frac{c_1 a_{n-3} - c_2 a_{n-1}}{c_1}, d_2 = \frac{c_1 a_{n-5} - c_3 a_{n-1}}{c_1}, \dots$$

$$f_1 = \frac{d_1 c_{n-3} - d_2 c_{n-1}}{d_1}, f_2 = \frac{d_1 c_{n-5} - d_3 c_{n-1}}{d_1}, \dots \quad (10.10)$$

Відповідно до цього критерію поліном буде стійкий, якщо елементи 1-го стовпця наведеної таблиці коефіцієнтів одного знака.

У правій напівплощині коренів буде стільки, скільки разів змінюється знак у першому стовпчику.

Приклад 10.3 Перевірити на стійкість заданий поліном

$$p^4 + 6p^3 + 11p^2 + 6p + 30.$$

Розв'язання

Складемо таблицю коефіцієнтів для заданого полінома

$$\begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & a_0 \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & a_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_n \\ f_1 & f_2 & f_3 & \dots & f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 11 & 30 & \dots & 0 \\ 6 & 6 & 0 & \dots & 0 \\ 10 & 30 & 0 & \dots & c_n \\ -12 & 0 & 0 & \dots & d_n \\ 30 & 0 & 0 & \dots & f_n \end{bmatrix}.$$

Коефіцієнти таблиці визначимо таким чином:

$$c_1 = \frac{a_{n-1} a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} = \frac{6 \cdot 11 - 1 \cdot 6}{6} = 10,$$

$$c_2 = \frac{a_{n-1} a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{c_{n-1}} = \frac{6 \cdot 30 - 1 \cdot 0}{6} = 30,$$

$$d_1 = \frac{c_1 a_{n-3} - c_2 a_{n-1}}{c_1} = \frac{10 \cdot 6 - 30 \cdot 6}{10} = -12,$$

$$d_2 = \frac{c_1 a_{n-5} - c_3 a_{n-1}}{c_1} = \frac{10 \cdot 0 - 0 \cdot 6}{10} = 0,$$

$$f_1 = \frac{d_1 c_2 - d_2 c_1}{d_1} = \frac{-12 \cdot 30 - 0 \cdot 10}{-12} = 30.$$

Отже, поліном нестійкий, оскільки два корені у правій площині і перший стовпець матриці два рази змінив знак.

10.4 Синтез електричних кіл

10.4.1 Основні положення

При проектуванні різного роду пристроїв автоматичного керування, каналів радіозв'язку та інших виникає необхідність підбору схем та параметрів електричних кіл, що відповідають зазначеним вимогам. Знаходження схеми та параметрів електричних кіл, що задовольняють задані умови, є задачею синтезу електричного кола.

Оскільки усталені та перехідні процеси у будь-якому лінійному електричному колі залежать від частотних властивостей кола, задача синтезу, як правило, зводиться до знаходження схеми кола за заданою частотною характеристикою. Шуканим може бути двополюсник із заданою залежністю опору (чи провідності) від частоти або чотириполюсник із заданою частотною залежністю.

На відміну від задачі аналізу, де шукана величина, тобто реакція кола на прикладену дію одержується однозначно, задача синтезу може мати декілька розв'язків чи взагалі не мати їх. Задану частотну функцію можна синтезувати, якщо електричне коло, що, може, відповідно їй складене із опорів, індуктивностей та ємностей.

При виборі оптимальної схеми необхідно вибирати схему з найменшим числом елементів, причому перевагу слід віддавати схемам, що мають найпростіші елементи – опори та ємності. Індуктивність – менш бажаний елемент кола. Якщо у схемі послідовно ввімкнені індуктивність та опір, то вони можуть бути практично виконані у вигляді індуктивної котушки. Але при цьому необхідно враховувати міжгілкову ємність, яка може внести у роботу схеми спотворення на високих частотах. Ще менш бажаним елементом схеми є трансформатор, практична реаліза-

ція якого ускладнюється з появою теплових втрат та міжгілкових ємностей.

У задачах синтезу частотні характеристики опорів, провідностей чи передавальних функцій можуть бути задані графічно або аналітично. Якщо характеристика задана графічно чи не є раціональною функцією, то вона наближено апроксимується раціональною функцією, тобто відношенням двох поліномів, яке реалізується у вигляді двополюсника чи чотириполюсника.

10.4.2 Синтез пасивних двополюсників

Двополюсник – це електричне коло, що розглядається відносно будь-яких двох затискачів. Його зображують у вигляді прямокутника. Класифікацію двополюсників можна здійснювати за різними ознаками. За ознакою лінійності елементів, що входять у двополюсник, розрізняють лінійні та нелінійні двополюсники. За присутністю елементів без втрат (ємності, індуктивності, трансформатори) та з втратами (опори) двополюсники класифікують на реактивні та дисипативні відповідно. За наявності джерел енергії - на активні та пасивні (при цьому вважається, що джерела всередині двополюсника не компенсують одне одного). Два двополюсника з різною структурою можна вважати еквівалентними, якщо їх опори (провідності) рівні у всьому діапазоні частот. Схемні функції краще записувати через операторну змінну $p = j\omega$.

Властивості пасивних двополюсників

1. Пасивні двополюсники не містять джерел (незалежних та керованих).

2. Вхідний опір та провідність двополюсника можуть бути подані у вигляді відношення двох поліномів комплексної змінної p :

$$F(p) = \frac{\Delta a}{\Delta b} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}.$$

Це пояснюється способом знаходження схемної функції $F(p)$ через алгебраїчні доповнення матриці еквівалентними параметра-

ми. У клітинках матриці в загальному випадку можуть знаходитися вирази вигляду $ap + \frac{b}{p} + q$.

3. Коефіцієнти a_i та b_i дійсні та додатні. Вони дійсні, оскільки комплексних коефіцієнтів при p у матриці немає. Вони більші нуля, тому що визначник пасивної схеми дорівнює сумі вагових коефіцієнтів дерев графу. Вага дерева – це добуток елементів цього дерева. Елементами дерева можуть бути опори, індуктивності та ємності.

4. Степені полінома чисельника та знаменника можуть відрізнятися не більше ніж на одиницю: $|n - m| \leq 1$. Це стає очевидним при побудові ФЧХ за картою нулів та полюсів. Якщо $|n - m| > 1$, то ФЧХ вийде за межі $\pm \frac{\pi}{2}$, а дійсна частина вхідного опору буде менше нуля, а це неможливо.

5. Нулі та полюси (тобто корені полінома чисельника та знаменника) $Z(p)$ чи $Y(p)$ не повинні знаходитися в правій напівплощині - впливає із необхідності стійкості цих схемних функцій.

6. У реактивного двополюсника корні полінома чисельника та знаменника знаходяться на уявній осі: $p_{ni} = \pm jw_i$, $p_{oi} = \pm jw_k$. Це пояснюється тим, що у реактивного двополюсника немає втрат та відповідно експоненти у зворотному перетворенні Лапласа повинні бути без загасання.

7. У реактивного двополюсника степені полінома чисельника та знаменника повинні бути чи тільки парними, чи тільки непарними (у чисельника – парні, у знаменника – непарні чи навпаки).

8. У реактивного двополюсника нулі та полюси на уявній осі повинні чергуватися. У реактивного двополюсника нулі та полюси не можуть бути кратними. Якщо полюс кратний $\Phi - p_i$ π , то він дає у теоремі розкладання величину -

$A_i \cdot t^{n-1} \cdot e^{jW}$. Якщо полюс чисто уявний, то експонента – без загасання та t^{n-1} прямує до нескінченності, а такого бути не може, оскільки джерел енергії у схемі немає.

9. Похідна вхідного опору Z_{BX} реактивного двополюсника за частотою більше нуля:

$$\frac{dZ(\omega)}{d\omega} > 0; \quad \text{чи} \quad \frac{dY(\omega)}{d\omega} > 0.$$

Вхідну функцію можна подати так:

$$Z(\omega) = A_\infty \cdot p + \frac{A_0}{p} + \sum_i \frac{D_i}{p^2 + \omega_i^2},$$

$$\dot{Z}(\omega) = A_\infty \cdot j\omega + \frac{A_0}{j\omega} + \sum_i \frac{D_i}{\omega_i^2 - \omega^2}.$$

Візьмемо похідну від цієї функції за частотою

$$\frac{dZ(\omega)}{d\omega} = j \left(A_\infty + \frac{A_0}{\omega^2} + \sum_i \frac{D_i (\omega_i^2 - \omega^2)^{-2} \cdot \omega \cdot 2\omega}{} \right) > j0.$$

Тут вважалось, що у розкладанні $A_\infty > 0$ та $A_0 > 0$.

Будуємо графік, де похідна всюди більше нуля (рис. 10.11).

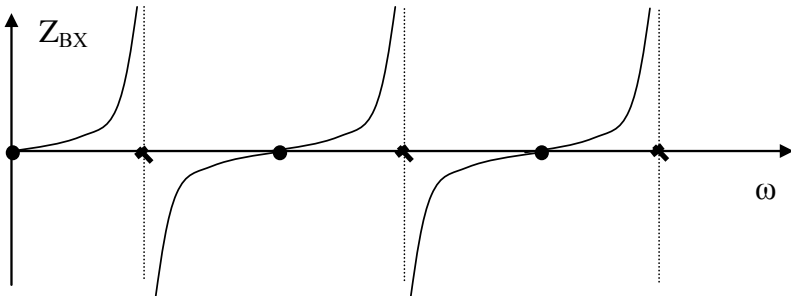


Рисунок 10.11

Графік доводить, що нулі та полюси чергуються, оскільки інакше похідна не буде всюди додатною. Аналогічно все виконується і для вхідної провідності.

10. Для двополюсника, що містить RC-елементи, нулі та полюси дійсні, менше нуля та повинні чергуватися (рис. 10.12). Якщо вхідна функція має нулі та полюси, то для вхідного опору першим по порядку від початку координат буде полюс, оскільки ФЧХ Z RC-кола повинна прямувати до мінуса. Якщо б нулі та полюси не чергувалися, то ФЧХ вхідного опора могла би перейти за $\pm \frac{\pi}{2}$. Це впливає з способу побудови ФЧХ за картою нулів та полюсів.

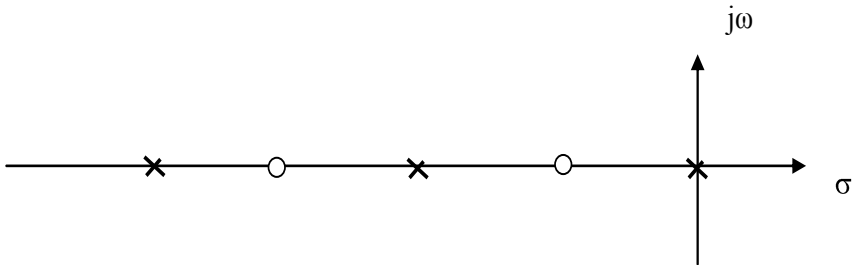


Рисунок 10.12 - Приклад карти нулів та полюсів двополюсника з RC-елементів

Для вхідного опору степінь полінома чисельника не може бути більше степені полінома знаменника (оскільки за матрицею провідностей $Z = \Delta_{11} / \Delta$, у клітинах матриці може бути тільки чи g , чи rc , чи $g+rc$, а порядки визначників відрізняються на одиницю).

11. Для двополюсника, що складається з RL – елементів, нулі та полюси дійсні, менші нуля та повинні чергуватися. Якщо вхідна функція має нулі та полюси, то для вхідного опору першим по порядку від початку координат буде нуль, оскільки ФЧХ Z RL-кола повинна прямувати до плюса. Якщо б нулі та полюси не чергувалися, то ФЧХ вхідного опору міг би перейти за $\pm \frac{\pi}{2}$. Для вхідного опору степінь полінома чисельника не може бути менше степені полінома знаменника (оскільки за матрицею

опорів $Z = \Delta / \Delta_{11}$, у клітинках матриці може бути тільки чи R, чи pL, чи R+pL, а порядки визначників відрізняються на одиницю).

Введемо означення полінома Гурвіца і додатної дійсної функції (ДДФ). Поліном Гурвіца – це поліном, у якого корені знаходяться у лівій напівплощині (в деяких підручниках поліном Гурвіца називається строгим, якщо його корені тільки зліва від уявної осі, але не на ній). Ознаки полінома Гурвіца: у нього всі коефіцієнти дійсні та мають один знак; у поліномі повинні бути або всі степені, або тільки парні або непарні.

ДДФ (функція Бруне) – це така функція, для якої:

- при $\text{Re } \underbrace{F}_{\sim} > 0$ $\text{Re } \underbrace{F \underbrace{\sim}_{\sim}} > 0$ (властивість додатності);
- при $p = \sigma = \text{Real } \underbrace{F}_{\sim} = \text{Real}$ (властивість дійсності).

Покажемо, що вхідний опір пасивного двополюсника – це ДДФ.

Вхідний опір можна подати як

$$\underbrace{F}_{\sim} = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}. \quad (10.11)$$

Звідси видно, що якщо $p = \text{Real}$, то \underbrace{F}_{\sim} може бути тільки дійсною внаслідок дійсності коефіцієнтів поліномів чисельника та знаменника.

Доведемо тепер додатність. Для цього зобразимо карту нулів та полюсів пасивного двополюсника (рис. 10.13). Для пасивного двополюсника нулі та полюси лежать у лівій напівплощині. Дійсна частина вхідного опору пасивного двополюсника більше нуля, оскільки схема не містить джерел.

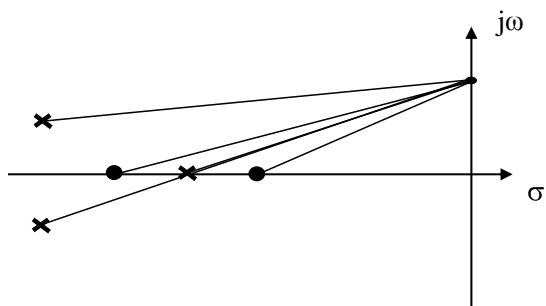


Рисунок 10.13 – Карта нулів та полюсів

Чим далі нулі та полюси лежать від початку координат, тим більший запас стійкості має схема. Якщо уявну вісь зсунути на деяку величину σ праворуч, то запас стійкості збільшиться. Це означає, що дійсна частина вхідного опору при $\sigma > 0$ також буде більше нуля.

Одна із важливих властивостей ДДФ полягає в тому, що у ДДФ лишки в полюсах, що розміщені на уявній осі, більше нуля. Таким чином, необхідною та достатньою умовою можливості реалізації двополюсника по заданій вхідній функції є те, що його вхідний опір (провідність) повинен бути додатною дійсною функцією. Іноді напряду перевірити це буває важко, тому користуються опосередкованими методами.

Як приклад наведемо схему послідовного коливального контуру (рис. 10.14) та покажемо, що його вхідний опір є ДДФ.

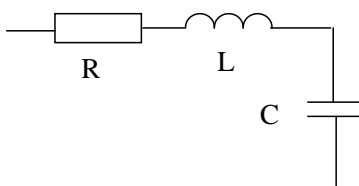


Рисунок 10.14 – Послідовний коливальний контур

Запишемо вхідний опір кола у операторній формі

$$Z_{BX}(p) = R + pL + \frac{1}{pC}.$$

При $p = \sigma$ (дійсне число) одержуємо

$$Z = R + \sigma L + \frac{1}{\sigma C}$$

Отже, Z – дійсне число.

Доведемо додатність. Припустимо, що $p = \sigma + jw$, тоді

$$Z = R + \sigma L + \frac{1}{\sigma + jw}$$

Дійсна частина вхідного опору має вигляд

$$\operatorname{Re} Z = R + \sigma L + \frac{1}{C} \frac{\sigma}{\sigma^2 + w^2}.$$

При $\sigma > 0$ $\operatorname{Re} Z > 0$. Додатність дійсної частини доведена.

10.4.3 Синтез пасивних двополюсників за Фостером

Метод ґрунтується на розкладанні вхідної функції на суму простих дробів (дивись теорему розкладання). Кожному доданку ставиться у відповідність схмотехнічний аналог. Розглянемо детально таке розкладення для вхідного опору.

Оскільки степінь полінома чисельника може на одиницю перевищувати степінь полінома знаменника, то у загальному випадку для вхідного опору розкладення має вигляд

$$Z(p) = A_\infty p + R + \sum_i \frac{A_i}{p - p_i}. \quad (10.12)$$

Наведемо схмотехнічні аналоги.

1. Перший доданок $A_\infty p$ відповідає індуктивності L та буде присутнім у тому випадку, коли степінь полінома чисельника на одиницю більше степені полінома знаменника:

$$A_\infty p \rightarrow L = A_\infty = \frac{a_n}{b_m} \quad (n - m = 1).$$

Оскільки a_n и $b_n > 0$, то $iL > 0$. Символ нескінченності у нижньому індексі показує, що полюс знаходиться у нескінченності.

2. Другим доданком (без p) є опір R (тому так його і позначили).

3. Доданки вигляду $\frac{A_i}{p - p_i}$ можуть бути подані різними схемотехнічними аналогами залежно від вигляду коренів p_i . Розглянемо деякі з них.

Корені чисто уявні: (два кореня спряжені):

$$p_i = j\omega_i \rightarrow A_i,$$

$$p_{i+1} = -j\omega_i \rightarrow A_{i+1} = \bar{A}_i.$$

При цьому A_i - Real, оскільки залишки ДДФ в уявних коренях дійсні уявні та додатні.

Два додатки з такими коренями можна об'єднати в один. Його схемотехнічний аналог – паралельний коливальний контур без утрат (рис. 10.15).

Запишемо два комплексно спряжені корені

$$\frac{A_i}{p - j\omega_i} + \frac{A_i}{p + j\omega_i} = \frac{D \cdot p}{p^2 + \omega_i^2}.$$

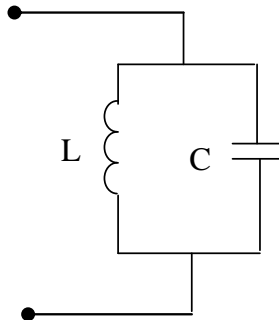


Рисунок 10.15

Запишемо вхідний опір

$$Z_i = \frac{pL_i \cdot \frac{1}{pC_i}}{pL_i + \frac{1}{pC_i}} = \frac{pL_i}{p^2L_iC_i + 1} = \frac{\frac{1}{C_i}p}{p^2 + \frac{1}{L_iC_i}} = \frac{D \cdot p}{p^2 + w_i^2}.$$

Очевидно, що величини елементів цієї схеми знаходяться з таких співвідношень:

$$C_i = \frac{1}{D}, \quad w_i^2 = \frac{1}{L_iC_i}, \quad L_i = \frac{1}{w_i^2C_i} = \frac{D}{w_i^2}.$$

Корені дійсні від'ємні $p_i = -\sigma_i$.

У такому випадку запишемо

$$-\frac{A_i}{p - p_i} = \frac{A_i}{p + \sigma_i}. \quad (10.13)$$

У загальному випадку коефіцієнт A_i може бути додатною або від'ємною величиною. Розглянемо випадок, коли $A_i > 0$. Співвідношенню (10.13) відповідає вхідний опір паралельного RC-кола. Знайдемо його та порівняємо з виразом (10.13). Запишемо вхідний опір кола, що зображений на рис. 10.16

$$Z(p) = \frac{R_i \frac{1}{pC_i}}{R_i + \frac{1}{pC_i}} = \frac{R_i}{R_iC_i p + 1} = \frac{\frac{1}{C_i}}{p + \frac{1}{R_iC_i}} = \frac{A_i}{p + \sigma_i}.$$

З цього співвідношення видно, що параметри наведеної схеми заміщення можуть бути визначені через відомі нам величини A_i і σ_i таким чином:

$$C_i = \frac{1}{A_i}, \quad R_iC_i = \frac{1}{\sigma_i} \rightarrow R_i = \frac{1}{C_i\sigma_i} = \frac{A_i}{\sigma_i}.$$

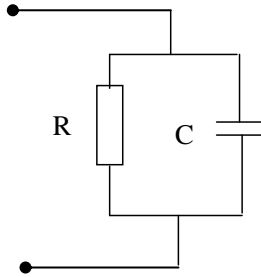


Рисунок 10.16

Якщо $\sigma_i = 0$, то схемотехнічним аналогом буде просто ємність зі значенням ємності, що дорівнює $\frac{1}{A_i}$.

Оскільки у даному випадку йде мова про опір, то всі наведені схемотехнічні аналоги розглянутих складових необхідно з'єднати послідовно (рис. 10.17).

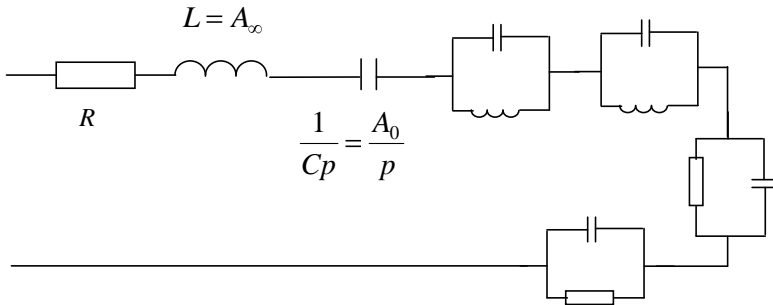


Рисунок 10.17

Очевидно, що кількість LC- складових визначається кількістю уявних коренів, а RC-складових – кількістю дійсних коренів.

Якщо A_i виявилось від'ємним, то можна записати таким чином:

$$\frac{-Ai}{p + \sigma_i} + R = \frac{pR + (R \cdot \sigma_i - Ai)}{p + \sigma_i} = \frac{pR}{p + \sigma_i} + \frac{(R \cdot \sigma_i - Ai)}{p + \sigma_i},$$

тоді першому доданку буде відповідати LR-коло, а другому, якщо чисельник більше нуля, – RC-коло.

Але краще R розписати як суму $R_1 + R_2$, причому R_1 таке, що $R_1 \cdot \sigma_i - Ai = 0$, тоді на один елемент у схемі буде менше

$$R_1 = \frac{Ai}{\sigma_i}, \quad R_2 = R - R_1.$$

Крім розглянутої послідовності дій, є метод Бруне, який полягає в тому, що спочатку реалізується тільки реактивна частина схеми Z_p , потім шукається опір $Z_1 = Z - Z_p$, після цього береться $\operatorname{Re}(Z_1(w))$ та досліджується на екстремум. Це екстремальне значення R віднімається від Z_1 , після чого продовжують звичайне розкладання за Фостером.

Розглянемо приклад розкладання за Фостером:

$$Z(p) = \frac{p^5 + 6p^4 + 6p^3 + 21p^2 + 4p + 10}{p(p+j)(p-j)(p+5)}.$$

Розкладемо $Z(p)$ на прості дроби, перевіряючи, щоб порядок степеня полінома чисельника був більше, ніж порядок степеня знаменника. У протилежному випадку необхідно поділити чисельник на знаменник, а після цього розкласти. Одержимо, що

$$Z(p) = 1p + 1 + \frac{2}{p} + \frac{p}{p^2 + 1} - \frac{3}{p + 5}.$$

Розкладемо перший та останній доданки останнього виразу

$$1 + \frac{-3}{p+5} = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{-3}{p+5} = \frac{2}{5} + \frac{\frac{3}{5}p + \frac{3}{5} \cdot 5 - 3}{p+5},$$

$$Z(p) = 1p + \frac{2}{5} + \frac{2}{p} + \frac{p}{p^2 + 1} + \frac{\frac{3}{5}p}{p+5}.$$

Кожному з доданків розкладеного виразу для вхідного опору відповідає свій схмотехнічний аналог схеми, що зображена на рис. 10.18. Перший доданок виразу $1p$ відповідає коту-

щці індуктивності. У нашому випадку $L=1$. Другий доданок $\frac{2}{5}$ відповідає значенню опору резистора з цим номіналом. Третій доданок виразу $\frac{2}{p}$ відповідає ємності. У нашому випадку $C = \frac{1}{2}$.

Четвертий доданок $\frac{p}{p^2 + 1}$ відповідає паралельному коливальному контуру без втрат, оскільки опір паралельного коливального контуру у операторній формі визначається співвідношенням

$$Z(p) = \frac{pL \cdot \frac{1}{pC}}{pL + \frac{1}{pC}} = \frac{\frac{L}{C}}{\frac{p^2CL + 1}{pC}} = \frac{pL}{p^2CL + 1}.$$

У нашому випадку $L=1$ та $C=1$. П'ятий доданок виразу $\frac{3p/5}{p+5}$ відповідає у операторній формі паралельному з'єднанню опору та індуктивності, оскільки їх опір у операторній формі визначається $Z(p) = \frac{R \cdot pL}{R + pL} = \frac{R \cdot p}{R/L + p}$. У нашому випадку $R = \frac{3}{5}$,

$L = \frac{3}{25}$. Потім усі ці елементи необхідно з'єднати послідовно (рис. 10.18).

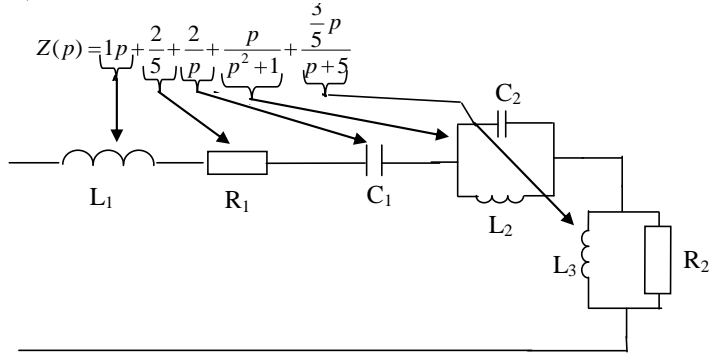


Рисунок 10.18

10.4.4 Синтез пасивних двополюсників за Кауером

Відповідно до методу Кауера реактивний двополюсник можна подати у вигляді сходинкової схеми (рис. 10.19).

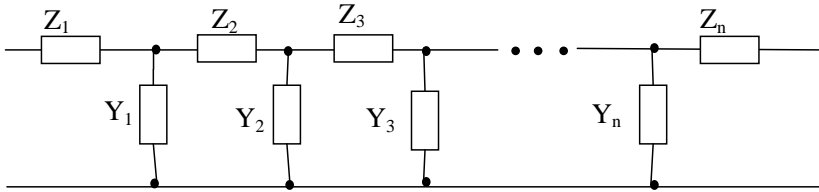


Рисунок 10.19 – Сходинкова схема

Перша канонічна схема Кауера містить індуктивності у повздовжніх та ємності у поперечних гілках, друга канонічна схема містить ємність у повздовжніх гілках та індуктивність – у поперечних.

Вхідний опір схеми можна записати у вигляді ланцюгового дробу:

$$Z_{BX} = Z_1 + \frac{1}{Y_2 + \frac{1}{Z_3 + \frac{1}{Y_4 + \dots + \frac{1}{Y_{n-1} + \frac{1}{Z_n}}}}}$$

Для реалізації першої канонічної схеми Кауера вибирають ту із вхідних функцій (операторний опір чи провідність), яка має полюс на нескінченності, причому члени поліномів чисельника та знаменника розміщуються у порядку зменшення степеня p . Для реалізації другої канонічної схеми Кауера використовують ту із вхідних функцій, яка має полюс при $p = 0$, а поліноми чисельника та знаменника розміщуються у порядку збільшення степеня p . При виконанні ділення необхідно, щоб коефіцієнти були додатними. Якщо у процесі ділення будь-який із коефіцієнтів виявиться меншим нуля, то необхідно перейти від розміщення поліномів за зменшенням степеня p до розміщення за збільшен-

ням степеня p . Навпаки, якщо будь-який із коефіцієнтів виявиться меншим нуля, то необхідно перейти від розміщення поліномів за збільшенням степеня p до розташування за зменшенням степеня.

Нехай схемна функція у загальному випадку має вигляд полінома

$$F(p) = \frac{a_n p^n + \dots + a_0}{b_m p^m + \dots + b_0}.$$

Для розкладання поділимо чисельник на знаменник

$$\begin{array}{r|l} a_n p^n + \dots + a_0 & \frac{b_m p^n + \dots + b_0}{\frac{a_n}{b_m} p^{n-m} + F_3(p)} \\ \hline a_n p^n + \dots + b_n \frac{a_n}{b_m} & \\ \hline & F_3(p) \end{array}$$

Запишемо результат розкладання

$$F(p) = \frac{a_n}{b_m} p^{n-m} + F_3(p) = \frac{a_n}{b_m} p^{n-m} + \frac{1}{\frac{1}{F_3(p)}}$$

і т. д., доки не дійдемо до одного елемента.

Можна скласти стільки схем, скільки способів ділення полінома на поліном.

Розглянемо приклад. Необхідно синтезувати схему, що має таку схемну функцію для вхідного опору:

$$Z(p) = \frac{12p^5 + 16p^3 + 5p}{12p^4 + 10p^2 + 1}.$$

Поділимо чисельник на знаменник

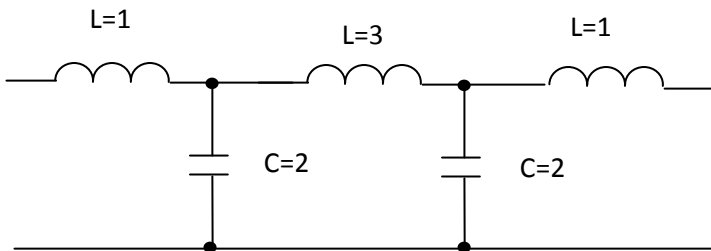


Рисунок 10.20

Якщо задана функція була б провідністю, то одержана схема мала б наступний вигляд, що зображений на рис. 10.21.

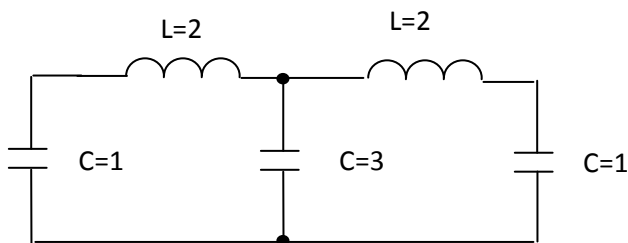


Рисунок 10.21

Коефіцієнти при діленні можуть виходити від'ємними, тоді необхідно ділити поліноми за іншими степенями. Розглянемо приклад.

Необхідно синтезувати схему, що має схемну функцію вхідного опору

$$Z(p) = \frac{2p^3 + 3p^2 + 2p + 1}{2p^2 + 2p + 1}.$$

Поділимо чисельник на знаменник:

$$\begin{array}{r|l} 2p^3 + 3p^2 + 2p + 1 & 2p^2 + 2p + 1 \\ 2p^3 + 2p^2 + p & 1p \\ \hline & p^2 + p + 1 \end{array}$$

Запишемо результат розкладання:

$$Z(p) = 1p + \frac{1}{\frac{1+2p+2p^2}{1+p+p^2}}$$

Поділимо чисельник на знаменник виразу, що стоїть у знаменнику:

$$\begin{array}{r}
 1+2p+2p^2 \quad \Big| \quad \frac{1+p+p^2}{1} \\
 - \quad 1+p+p^2 \\
 \hline
 1+p+p^2 \quad \Big| \quad \frac{p+p^2}{1} \\
 - \quad 1+p \\
 \hline
 p+p^2 \quad \Big| \quad \frac{p^2}{1} \\
 - \quad p \\
 \hline
 p^2 \quad \Big| \quad \frac{p^2}{1} \\
 - \quad p^2 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Результат розкладання поданий нижче:

$$Z(p) = \underbrace{1p}_{Z_1} + \frac{1}{\underbrace{1 + \frac{1}{\underbrace{\frac{1}{p} + \frac{1}{1}}_{Y_2}}}_{Y_1}}$$

$$\underbrace{\frac{1}{p}}_{Z_3} + \underbrace{\frac{1}{1}}_{Z_5}$$

Розкладеному виразу відповідає схема, що зображена на рис. 10.22.

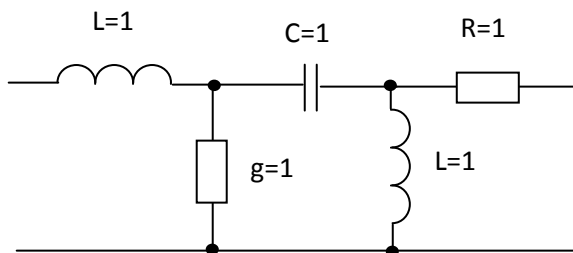


Рисунок 10.22

У розглянутих прикладах ми використовували елементи без розмірностей. При синтезі вважають, що використовують нормовані величини.

Як і метод Фостера, розглянутий метод може бути використаний для синтезу RC-, RL-, RLC-кіл, нулі та полюси операторних вхідних характеристик яких розміщені на уявній осі та від'ємній дійсній напівосі. Слід мати на увазі, що сфера застосування методу Кауера вужча, ніж методу Фостера, оскільки ряд операторних вхідних функцій, що реалізуються за допомогою методу Фостера, не може бути представлений як операторний вхідний опір чи операторна вхідна провідність будь-якого сходящого кола.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: учебник.- М.: Гардарики, 2002–640 с.
2. Зевеке Г.В., Ионкин П.А. и др. Основы теории цепей: учебник для вузов - М.: Энергоатомиздат, 1989– 528 с.
3. Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники: учеб. для вузов: в 3 т./ К.С. Демирчян, Л.Р. Нейман, В.Л. Чечурин, Н.В. Коровкин. - 4-е изд., доп. для самостоятельного изучения курса. – СПб.: Питер, 2004. – Т.1. - 462 с.
4. Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники: учеб. для вузов: в 3 т./ К.С. Демирчян, Л.Р. Нейман, В.Л. Чечурин, Н.В. Коровкин. - 4-е изд., доп. для самостоятельного изучения курса. – СПб.: Питер, 2004. – Т.2. - 575 с.
5. Коровкин Н. В. Теоретические основы электротехники. Сборник задач: учеб. пособие / Н.В. Коровкин, Е.Е. Селина, В.А. Чечурин. - СПб.: Питер, 2004. - 511 с.
6. Попов В.П. Основы теории цепей: учебник для вузов спец. «Радиотехника». – М.: Высш. шк., 1985. – 490с.
7. Шебес М.Р., Каблукова М.В. Задачник по теории линейных эл. цепей: учеб. пособ. для электротехнич., радиотехнич. спец. вузов. – 4 изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1990. – 544с.
8. Основы теории цепей: Примеры и задачи / О. В. Беляев, М. В. Быстров, В. Л. Коданев, Е. А. Смирнов, Р. А. Халимов, В. В. Штейнбрехер. – М.: Радиотехника, 2007. – 240с.
9. Основи теорії кіл: підручник для студентів вищих навчальних закладів / Ю. О. Коваль, Л. В. Гринченко, І. О. Милютченко, О. І. Рибін / за заг. редакцією В. М. Шокала та В. І. Правди. – Х.: Компанія СМІТ, 2008. – Ч.2. – 432с.

10. Теорія електричних та магнітних кіл: конспект лекцій у трьох частинах / Укладач А.В. Булашенко. – Суми: Вид-во СумДУ, 2010. – Ч.2 – 177с.
11. Методичні вказівки до виконання розрахункової роботи з дисципліни «Теорія електричних та магнітних кіл» на тему «Розрахунок лінійних електричних кіл в усталених режимах» / Укладач А. В. Булашенко. – Суми: Вид-во СумДУ, 2010. – 87с.
12. Методичні вказівки до виконання курсової роботи з дисципліни «Теорія електричних та магнітних кіл» на тему «Розрахунок перехідних процесів у лінійних електричних колах із зосередженими параметрами» / Укладач А. В. Булашенко. – Суми: Вид-во СумДУ, 2008. – 78 с.
13. Теоретичні основи електротехніки: підручник: у 3 т. / за заг. ред. І. М. Чиженка, В. С. Бойко. - К.: ІВЦ «Видавництво «Політехніка», 2008. - Т. 2. Перехідні процеси у лінійних електричних колах, нелінійні електричні та магнітні кола. – 224с.
14. Новгородцев А. Б. 30 лекцій по теории электрических цепей. – СПб.: Политехника, 1995. – 520с.
15. Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з дисципліни «Теорія електричних та магнітних кіл» за темою «Перехідні процеси у лінійних електричних колах» / Укладач А. В. Булашенко. – Суми: Вид-во: СумДУ, 2008. – 55с.
16. Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з дисципліни «Теорія електричних та магнітних кіл» за темою «Нелінійні кола та довгі лінії» / Укладач А. В. Булашенко. – Суми: Вид-во: СумДУ, 2008. – 50с.
17. Теорія електричних та магнітних кіл: конспект лекцій у двох частинах / Укладач А.В. Булашенко. – Суми: Вид-во СумДУ, 2010. – Ч.4. – 218с.

Навчальне видання

ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ ТА МАГНІТНИХ КІЛ

Конспект лекцій
для студентів напрямку 050201 «Системна інженерія»
спеціальності 6.091401 «Системи управління та автоматики»
заочної форми навчання
у п'яти частинах
Частина 5

Відповідальний за випуск Г. М. Худолей
Редактор Ч. Г. Чернишова
Комп'ютерне верстання А. В. Булашенка

Підп. до друку 09.07.2010, поз.
Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 9,06. Обл.-вид. арк. 6,24. Тираж 60 пр. Зам №
Собівартість видання грн. к.

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.



Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет
Шосткинський інститут

ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ ТА МАГНІТНИХ КІЛ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
У п'яти частинах

Частина 5

Суми
Видавництво СумДУ
2010

Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет
Шосткинський інститут

До друку та в світ
дозволяю на підставі
«Єдиних правил», п.2.6.14
Заступник першого проректора –
начальник організаційно-методичного
управління

В.Б. Юскаєв

ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ ТА МАГНІТНИХ КІЛ

Конспект лекцій
для студентів напряму 050201 «Системна інженерія»
спеціальності 6.091401 «Системи управління та автоматики»
заочної форм навчання
У п'яти частинах
Частина 5

Усі цитати, цифровий
та практичний матеріал,
бібліографічні
відомості перевірені,
написання одиниць
відповідає стандартам

Укладач
Відповідальний за випуск
Директор Шосткинського інституту

А.В. Булашенко
Г.М. Худолей
В.Л. Акуленко

Суми
Видавництво СумДУ
2010