ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

1. Основні поняття

1.1. Поняття функції кількох змінних

Змінну величину z називають *функцією двох змінних* $x,\ y$, якщо кожній парі їх значень $(x;y)$ із даної області площини поставлено у відповідність єдине значення z. Позначення: $z = f(x,\ y)$. Змінні $x,\ y$ називають *аргументами* або *незалежними змінними*.

Аналогічно означуються функції трьох та більшого числа змінних.

1. Виразити об'єм конуса V як функцію його твірної x і радіуса основи y.

⌜ Із геометрії відомо, що об'єм конуса $V = \frac{1}{3}\pi y^2 \cdot h$, де h – висота конуса. Але $h = \sqrt{x^2 - y^2}$. Тому $V = \frac{1}{3}\pi y^2 \sqrt{x^2 - y^2}$. Це і є шукана функціональна залежність. ⌟

Значення функції $z = f(x,\ y)$ у точці $P(a;\ b)$, тобто при $x = a$ і $y = b$, позначається $f(a,\ b)$ або $f(P)$.

2. Знайти $f(2,\ -3)$, якщо $f(x,\ y) = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$.

⌜ Підставляючи у функцію $x = 2$ і $y = -3$, знаходимо

$$f(2,\ -3) = \frac{2^2 + (-3)^2}{2 \cdot 2 \cdot (-3)} = -\frac{13}{12}.$$ ⌟

1.2. Область визначення функції

Під *областю визначення* функції $z = f(x,\ y)$ розуміють сукупність точок $(x;y)$ площини xOy, в яких задана функція визначена, тобто набуває певних дійсних значень.

3. Знайти область визначення функції $z = x^2 y + 4x - y$.

У даному прикладі вираз має числовий зміст при довільних значеннях x і y. Тому функція визначена на всій площині.

4. Знайти область визначення функції

$$z = \frac{x+y}{2x-y}.$$

Вираз втрачає зміст лише при тих значеннях x і y, при яких знаменник перетворюється на нуль. Тому область визначення заданої функції є вся площина, з якої видалена пряма $y = 2x$.

5. Знайти область визначення функції

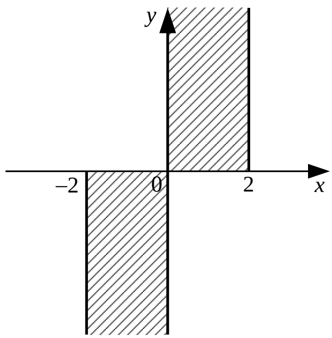
$$z = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}.$$

Функція має дійсні значення, якщо $4 - x^2 - y^2 > 0$ або $x^2 + y^2 < 4$. Останню нерівність задовольняють координати точок, що знаходяться всередині кола з центром у початку координат і радіусом 2.

6. Знайти область визначення функції

$$z = \arcsin\frac{x}{2} + \sqrt{xy}.$$

Перший доданок функції визначений при $-1 \le \frac{x}{2} \le 1$ або $-2 \le x \le 2$. Другий доданок має дійсні значення, якщо $xy \ge 0$, тобто у двох випадках: при $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$ або при $\begin{cases} x \le 0 \\ y \le 0 \end{cases}$. Область визначення всієї функції зображена на рисунку.



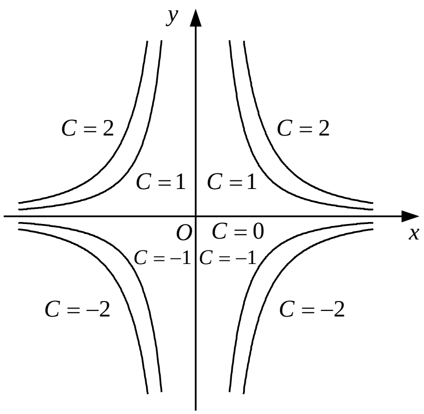
1.3. Лінії і поверхні рівня функції

Лінією рівня функції $z = f\left(x,\ y\right)$ називається така лінія на площині xOy, у точках якої функція набуває сталого значення $z = C$.

Поверхнею рівня функції трьох аргументів $u = f\left(x,\ y,\ z\right)$ називається така поверхня, у точках якої функція набуває сталого значення $u = C$.

12. Побудувати лінії рівня функції $z = x^2 y$.

$\ulcorner$ Рівняння ліній рівня має вигляд $x^2 y = C$ або $y = \dfrac{C}{x^2}$. Покладаючи $C = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$, отримаємо сім'ю ліній рівня зображених на рисунку.



$\lrcorner$

13. Знайти поверхні рівня функцій трьох незалежних змінних.

а) $u = x + y + z$; б) $u = x^2 + y^2 + z^2$.

$\ulcorner$ а) Рівняння поверхонь рівня має вигляд $x + y + z = C$. Покладаючи $C = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$., отримаємо площини, що паралельні площині $x + y + z = 0$.

б) Рівняння поверхонь рівня має вигляд $x^2 + y^2 + z^2 = C$. Надаючи C додатних значень, отримаємо концентричні сфери з центром у початку координат. $\lrcorner$

2. Границя і неперервність функції кількох змінних

Число A називають *границею* функції $z = f(x, y)$ у точці $P(a;b)$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$, що для всіх точок $P'(x;y)$, які задовольняють умову $0 < \rho(P, P') < \delta$ ($\rho(P, P') = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ – відстань між P та P'), виконується нерівність

$$\left| f(x, y) - A \right| < \varepsilon .$$

У цьому випадку пишуть

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = A .$$

Зауваження. Згідно з означенням границя функції $z = f(x, y)$ у точці P не залежить від способу наближення змінної точки P', наприклад, вздовж тієї чи іншої прямої.

Функція $z = f(x, y)$ називається *неперервною у точці* $P(a;b)$, якщо

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = f(a, b) .$$

Функція, що неперервна в усіх точках деякої області, називається *неперервною на цій області*.

Порушення умов неперервності для функції $f(x, y)$ можуть відбуватися як в окремих точках (ізольована точка розриву), так і у точках, що утворюють одну або декілька ліній (лінії розриву), а іноді і більш складні геометричні образи.

17. Обчислити границю $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} (1 + xy)^{\frac{2}{x^2 + xy}}$.

$\ulcorner$ Подамо функцію у вигляді $\left[(1 + xy)^{\frac{1}{xy}} \right]^{\frac{2y}{x+y}}$. Оскільки $z = xy \to 0$ при $\begin{pmatrix} x \to 0 \\ y \to 2 \end{pmatrix}$, то $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} (1 + xy)^{\frac{1}{xy}} = \lim\limits_{z \to 0} (1 + z)^{\frac{1}{z}} = e$. Крім того, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} \dfrac{2y}{x + y} = 2$. Тому шукана границя дорівнює e^2. $\lrcorner$

18. Чи існує границя $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$?

$\ulcorner$ Нехай точка $M(x;y)$ прямує до точки $O(0;0)$ вздовж прямої $y=kx$, що проходить через точку O. Тоді отримаємо

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}.$$

Таким чином, наближаючись до точки $O(0;0)$ вздовж різних прямих, отримаємо різні граничні значення. З цього випливає, що границя даної функції у точці $O(0;0)$ не існує (див. зауваження вище). $\lrcorner$

19. Обчислити границю $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$.

$\ulcorner$ Покладемо $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Тоді $\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} = r\cos^2\varphi\sin\varphi$.

Оскільки функція $\cos^2\varphi\sin\varphi$ обмежена, то

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} r\cos^2\varphi\sin\varphi = 0. \quad \lrcorner$$

20. Довести, що функція $u=\dfrac{e^{x^2-y^2}}{1+\sin^4\left(x^2+3xy+y^2\right)}$ неперервна при всіх значеннях x і y.

$\ulcorner$ Функції x^2-y^2 і $x^2+3xy+y^2$ неперервні при всіх значеннях x і y як многочлени від x і y. За теоремою про неперервність суперпозиції неперервних функцій випливає, що $e^{x^2-y^2}$ і $1+\sin^4\left(x^3+3xy+y^2\right)$ є також неперервними. При цьому $1+\sin^4\left(x^2+3xy+y^2\right)\neq 0$, а тому і задана функція є неперервною при всіх значення x і y. $\lrcorner$

21. Знайти точки розриву функції $u=\dfrac{x^2+y^2}{\left(x^2-y\right)\left(x+3y\right)}$.

$\ulcorner$ Функція має розрив у точках, в яких знаменник

$\left(x^2-y\right)\cdot\left(x+3y\right)$ перетворюється у нуль. Розв'язуючи рівняння $\left(x^2-y\right)\cdot\left(x+3y\right)=0$ відносно y, отримаємо $y=x^2$, $y=-\dfrac{x}{3}$. Отже, задана функція має розрив на прямій $y=-\dfrac{x}{3}$ і на параболі $y=x^2$. $\lrcorner$

22. Знайти точки розриву функції $u=\dfrac{1}{\sin^2\pi x+\sin^2\pi y}$.

$\ulcorner$ Прирівнюючи знаменник до нуля, отримуємо рівняння $\sin^2\pi x+\sin^2\pi y=0$. Це рівняння рівносильне системі $\begin{cases}\sin\pi x=0\\ \sin\pi y=0\end{cases}$, з якої знаходимо, що x і y цілі числа. Отже, функція розривна в усіх точках вигляду $M\left(m;n\right)$, де $m,\ n$ – цілі числа. $\lrcorner$

3. Частинні похідні функції кількох змінних

За означенням *частинна похідна* функції $z=f\left(x,\ y\right)$ у точці $P\left(x;y\right)$ *по змінній* x –

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x+\Delta x,\ y\right)-f\left(x,\ y\right)}{\Delta x}.$$

Частинна похідна по змінній y –

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f\left(x,\ y+\Delta y\right)-f\left(x,\ y\right)}{\Delta y}.$$

Поряд з позначеннями $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ використовують також інші позначення – відповідно z'_x, $f'_x\left(x,\ y\right)$ та z'_y, $f'_y\left(x,\ y\right)$.

З означення частинних похідних випливає, що для їх знаходження можна використовувати відомі формули обчислення похідних функцій однієї змінної, вважаючи іншу змінну сталою.

Аналогічно означуються і знаходяться частинні похідні функцій трьох та більшого числа змінних.

Знайти частинні похідні функцій:

31. $z=3x^2y+x^2-y^2+5$.

$\ulcorner$ Вважаючи y сталою, знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3y\cdot\left(x^2\right)_x'+\left(x^2\right)_x'-\left(y^2\right)_x'+\left(5\right)_x'=3y\cdot 2x+2x-0+0=6xy+2x.$$

Вважаючи x сталою, знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial y}=3x^2\cdot\left(y\right)_y'+\left(x^2\right)_y'-\left(y^2\right)_y'+\left(5\right)_y'=3x^2\cdot 1+0-2y+0=$$

$$=3x^2-2y. \quad \lrcorner$$

32. $z=\dfrac{y}{x}.$

$\ulcorner$ Вважаючи y сталою, знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{y}{x}\right)_x'=y\cdot\left(\frac{1}{x}\right)_x'=y\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2}.$$

Вважаючи x сталою, знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{y}{x}\right)_y'=\frac{1}{x}\cdot\left(y\right)_y'=\frac{1}{x}\cdot 1=\frac{1}{x}. \quad \lrcorner$$

33. $z=2e^x y+y^3-x^3y+y-x-1.$

$\ulcorner$ Вважаючи y сталою, знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(2e^x\cdot y+y^3-x^3y+y-x-1\right)_x'=$$

$$=2y\cdot\left(e^x\right)_x'-y\cdot\left(x^3\right)_x'-\left(x\right)_x'=2ye^x-y\cdot 3x^2-1=$$

$$=2ye^x-3yx^2-1.$$

Вважаючи x сталою, знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(2e^x\cdot y+y^3-x^3y+y-x-1\right)_y'=$$

$$=2e^x\left(y\right)_y'-\left(y^3\right)_y'-x^3\cdot\left(y\right)_y'+\left(y\right)_y'=2e^x+3y^2-x^3+1. \quad \lrcorner$$

34. $z=5x\sin y-\cos x+3.$

$\ulcorner$ $$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(5x\sin y-\cos x+3\right)_x'=5\sin y\left(x\right)_x'-\left(\cos x\right)_x'=$$

$$=5\sin y+\sin x.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(5x\sin y-\cos x+3\right)_y'=5x\left(\sin y\right)_y'=5x\cos y. \quad \lrcorner$$

35. $z=x^3y+e^yx-xy+x^2-y^2.$

Γ $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \left(x^3 y + e^y x - xy + x^2 - y^2\right)'_x = y \cdot \left(x^3\right)'_x + e^y \cdot (x)'_x -$

$- y \cdot (x)'_x + \left(x^2\right)'_x = 3yx^2 + e^y - y + 2x$.

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \left(x^3 y + e^y x - xy + x^2 - y^2\right)'_y = x^3 \cdot (y)'_y + x \cdot \left(e^y\right)'_y - x(y)'_y - \left(y^2\right)'_y =$

$= x^3 + xe^y - x - 2y$. $\lrcorner$

36. $z = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}$.

Γ Враховуючи правило диференціювання складної функції, дістанемо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{y}\right)'_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} \cdot (x)'_x =$$

$$= \frac{y^2}{y^2 + x^2} \cdot \frac{1}{y} \cdot 1 = \frac{y^2}{\left(y^2 + x^2\right) \cdot y} = \frac{y}{y^2 + x^2} ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{y}\right)'_y = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_y = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot x \cdot \left(\frac{1}{y}\right)'_y =$$

$$= \frac{y^2}{y^2 + x^2} \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) = \frac{-y^2 x}{\left(y^2 + x^2\right) \cdot y^2} = \frac{-x}{y^2 + x^2} . \quad \lrcorner$$

37. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$.

Γ Враховуючи правило диференціювання складної функції, дістанемо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\sqrt{x^2 - y^2}\right)'_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot \left(x^2 - y^2\right)'_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot 2x =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\sqrt{x^2 - y^2}\right)'_y = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot (-2y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2 - y^2}} . \quad \lrcorner$$

38. $z = \ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}\right)$.

$\ulcorner$ $$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{y}\right)\right)'_x = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{y}}\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{x}{y}\right)'_x = \operatorname{ctg}\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_x =$$

$$= \frac{\cos\frac{x}{y}}{\sin\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y}\cdot 1 = \frac{1}{\sin\frac{x}{y}\cdot\cos\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y} = \frac{1}{y\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{2x}{y}} = \frac{2}{y\cdot\sin\frac{2x}{y}}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{y}\right)\right)'_y = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{y}}\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{x}{y}\right)'_y = \operatorname{ctg}\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_y =$$

$$= \frac{\cos\frac{x}{y}}{\sin\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}\cdot x\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right) = \frac{-x}{y^2\cdot\sin\frac{x}{y}\cdot\cos\frac{x}{y}} = \frac{-x}{y^2\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{2x}{y}} =$$

$$= \frac{-2x}{y^2\cdot\sin\frac{2x}{y}}.$$ $\lrcorner$

39. $z = e^{\sin\frac{y}{x}}$.

$\ulcorner$ $$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(e^{\sin\frac{y}{x}}\right)'_x = e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\left(\sin\frac{y}{x}\right)'_x = e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\cos\frac{y}{x}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_x =$$

$$= e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\cos\frac{y}{x}\cdot y\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'_x = e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\cos\frac{y}{x}\cdot y\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-y\cdot e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\cos\frac{y}{x}}{x^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(e^{\sin\frac{y}{x}}\right)'_y = e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\left(\sin\frac{y}{x}\right)'_y = e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\cos\frac{y}{x}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_y =$$

$$= e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\cos\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{x}\cdot(y)'_y = e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\cos\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{x}\cdot 1 = \frac{e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\cos\frac{y}{x}}{x}.$$ $\lrcorner$

40. $u = x^3y^2z + 2x - 3y + z + 5$.

$\ulcorner$ Вважаючи y та z сталими, знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(x^3y^2z+2x-3y+z+5\right)_x'=y^2z\left(x^3\right)_x'+\left(2x\right)_x'-\left(3y\right)_x'+\left(z\right)_x'+$$

$$+\left(5\right)_x'=y^2z\cdot 3x^2+2-0+0+0=3x^2y^2z+2\,.$$

Вважаючи x та z сталими, знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(x^3y^2z+2x-3y+z+5\right)_y'=x^3z\left(y^2\right)_y'+\left(2x\right)_y'-\left(3y\right)_y'+\left(z\right)_y'+$$

$$+\left(5\right)_y'=x^3\cdot z\cdot 2y+0-3+0+0=2x^3yz-3\,.$$

Вважаючи x та y сталими, знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\left(x^3y^2z+2x-3y+z+5\right)_z'=x^3y^2\left(z\right)_z'+\left(2x\right)_z'-\left(3y\right)_z'+\left(z\right)_z'+$$

$$+\left(5\right)_z'=x^3y^2\cdot 1+0-0+1+0=x^3y^2+1\,.\quad \lrcorner$$

41. $u=z^{xy}$.

$$\ulcorner\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\left(z^{xy}\right)_x'=z^{xy}\cdot\ln z\cdot\left(xy\right)_x'=z^{xy}\cdot\ln z\cdot y\cdot\left(x\right)_x'=$$

$$=z^{xy}\cdot\ln z\cdot y\cdot 1=z^{xy}y\,\ln z\,.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(z^{xy}\right)_y'=z^{xy}\cdot\ln z\cdot\left(xy\right)_y'=z^{xy}\cdot\ln z\cdot x\cdot\left(y\right)_y'=$$

$$=z^{xy}\cdot\ln z\cdot x\cdot 1=z^{xy}x\,\ln z\,.$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\left(z^{xy}\right)_z'=xy\,z^{xy-1}\,.\quad \lrcorner$$

42. $u=\left(xy\right)^z$.

$$\ulcorner\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\left(\left(xy\right)^z\right)_x'=z\cdot\left(xy\right)^{z-1}\cdot\left(x\cdot y\right)_x'=z\cdot\left(xy\right)^{z-1}\cdot y\cdot\left(x\right)_x'=$$

$$=z\cdot\left(xy\right)^{z-1}\cdot y\cdot 1=zy\,\left(xy\right)^{z-1}\,.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(\left(xy\right)^z\right)_y'=z\cdot\left(xy\right)^{z-1}\cdot\left(xy\right)_y'=z\cdot\left(xy\right)^{z-1}\cdot x\cdot\left(y\right)_y'=$$

$$=z\cdot\left(xy\right)^{z-1}\cdot x\cdot 1=z\,x\,\left(xy\right)^{z-1}\,.$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\left(xy\right)^z\right)_z'=\left(xy\right)^z\ln\left(xy\right).\quad \lrcorner$$

43. Знайти частинні похідні $f_x'(1,\ 2,\ 0)$, $f_y'(1,\ 2,\ 0)$, $f_z'(1,\ 2,\ 0)$, якщо $f(x,\ y,\ z) = \ln(xy + z)$.

⌐ $\dfrac{\partial f}{\partial x} = f_x' = \left(\ln(xy+z)\right)_x' = \dfrac{1}{xy+z} \cdot (xy+z)_x' = \dfrac{y}{xy+z}$.

Для знаходження $f_x'(1,\ 2,\ 0)$ підставимо в останній вираз значення $x = 1$, $y = 2$, $z = 0$ і отримаємо $f_x'(1,\ 2,\ 0) = \dfrac{2}{1 \cdot 2 + 0} = 1$.

Аналогічно

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y' = \left(\ln(xy+z)\right)_y' = \frac{1}{xy+z} \cdot (xy+z)_y' = \frac{x}{xy+z}.$$

$$f_y'(1,\ 2,\ 0) = \frac{1}{1 \cdot 2 + 0} = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = f_z' = \left(\ln(xy+z)\right)_z' = \frac{1}{xy+z} \cdot (xy+z)_z' = \frac{1}{xy+z}.$$

$$f_z'(1,\ 2,\ 0) = \frac{1}{1 \cdot 2 + 0} = \frac{1}{2}.$$ ⌟

4. Повний диференціал функції

4.1. Повний приріст та повний диференціал функції

Повним приростом функції $z = f(x,\ y)$ називається різниця

$$\Delta z = \Delta f(x,\ y) = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x,\ y).$$

Повним диференціалом функції $z = f(x,\ y)$ називається та частина повного приросту Δz, що є лінійною відносно приростів аргументів Δx і Δy (див. нижче приклад 54).

Різниця між повним приростом і повним диференціалом функції є нескінченно мала вищого порядку у порівнянні з $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

Функція має повний диференціал у випадку неперервності її частинних похідних. У цьому випадку функцію називають *диференційовною*.

Диференціали незалежних змінних за означенням покладають рівними їх приростам: $dx = \Delta x$ і $dy = \Delta y$.

Повний диференціал функції $z = f(x,\ y)$ обчислюється за формулою

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\ .$$

Аналогічно, повний диференціал функції $u = f(x,\ y,\ z)$ обчислюється за формулою

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\ .$$

54. Для функції $f(x,\ y) = x^2 + xy - y^2$ знайти повний приріст і повний диференціал.

⌜ $f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) = (x+\Delta x)^2 + (x+\Delta x)\cdot(y+\Delta y) -$

$-(y+\Delta y)^2$;

$\Delta f(x,\ y) = \left[(x+\Delta x)^2 + (x+\Delta x)\cdot(y+\Delta y) - (y+\Delta y)^2\right] -$

$-\left(x^2 + xy - y^2\right) = x^2 + 2x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2 + xy + x\cdot\Delta y + y\Delta x + \Delta x\cdot\Delta y -$

$-y^2 - 2y\Delta y - (\Delta y)^2 - x^2 - xy + y^2 = 2x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2 + x\cdot\Delta y + y\cdot\Delta x +$

$+\Delta x\cdot\Delta y - 2y\cdot\Delta y - (\Delta y)^2 = \left[(2x+y)\cdot\Delta x + (x-2y)\cdot\Delta y\right] +$

$+\left[(\Delta x)^2 + \Delta x\cdot\Delta y - (\Delta y)^2\right]$ – повний приріст.

Тут вираз $df = (2x+y)\Delta x + (x-2y)\Delta y$ є повним диференціалом функції, а $\left[(\Delta x)^2 + \Delta x\cdot\Delta y + (\Delta y)^2\right]$ є нескінченно малою вищого порядку у порівнянні з нескінченно малою $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. ⌟

Знайти повні диференціали функцій:

55. $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

⌜ Знайдемо частинні похідні функції $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ та підставимо їх у вираз $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^3 + y^3 - 3xy\right)'_x = 3x^2 - 3y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^3 + y^3 - 3xy\right)'_y = 3y^2 - 3x.$$

Отримаємо $dz = 3\left(x^2 - y\right)dx + 3\left(y^2 - x\right)dy$ – повний диференціал заданої функції. ⌟

56. $z = x^2 y^3$.

⌜ Аналогічно до попереднього прикладу:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^2 y^3\right)'_x = 2xy^3,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^2 y^3\right)'_y = x^2 \cdot 3y^2 = 3x^2 y^2;$$

$$dz = 2xy^3 dx + 3x^2 y^2 dy. \quad ⌟$$

57. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

⌜ $$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)'_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \left(x^2 + y^2\right)'_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)'_y = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \left(x^2 + y^2\right)'_y = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$dz = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy. \quad ⌟$$

58. $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$.

⌜ $$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\ln\left(x^2 + y^2\right)\right)'_x = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\ln\left(x^2 + y^2\right)\right)'_y = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2y;$$

$$dz = \frac{2x}{x^2 + y^2} dx + \frac{2y}{x^2 + y^2} dy. \quad ⌟$$

59. $z=\sin^2 x+\cos^2 y$.

Γ $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\left(\sin^2 x+\cos^2 y\right)_x{}'=2\sin x\cdot\left(\sin x\right)'=2\sin x\cdot\cos x=\sin 2x$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\left(\sin^2 x+\cos^2 y\right)_y{}'=2\cos y\cdot\left(\cos y\right)'=-2\cos y\cdot\sin y=-\sin 2y$;

$dz=\sin 2x\,dx+\left(-\sin 2y\right)dy$. $\lrcorner$

60. $u=xyz$.

Γ Для функції трьох змінних знайдемо частинні похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial z}{\partial z}$ і підставимо їх у вираз $du=\dfrac{\partial u}{\partial x}dx+\dfrac{\partial u}{\partial y}dy+\dfrac{\partial u}{\partial z}dz$.

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\left(xyz\right)_x{}'=yz$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\left(xyz\right)_y{}'=xz$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=\left(xyz\right)_z{}'=xy$;

$du=yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz$ – повний диференціал. $\lrcorner$

61. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Γ Аналогічно до попереднього прикладу:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)_x{}'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)_x{}'=$$

$$=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)_y{}'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)_y{}'=$$

$$=\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)_z{}'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)_z{}'=$$

$$=\frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

$$du=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dy+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dz\ . \quad \lrcorner$$

62. Знайти повний диференціал функції $f\left(x,\, y,\, z\right)=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ у точці $P\left(3;\, 4;\, 5\right)$.

Γ Для знаходження значення повного диференціала $df\left(3,\, 4,\, 5\right)$ знаходимо повний диференціал аналогічно до попереднього прикладу і підставляємо в нього $x=3$, $y=4$, $z=5$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_x=z\left[\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]'_x=z\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(x^2+y^2\right)'_x=$$

$$=-\frac{z}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=\frac{-x\cdot z}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_y=z\left[\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]'_y=z\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(x^2+y^2\right)'_y=$$

$$=-\frac{z}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2y=\frac{-y\cdot z}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_z=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(z\right)'_z=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 1=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$df=\frac{-xz}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}dx+\frac{-yz}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}dy+\frac{1}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}dz.$$

$$df\left(3,\, 4,\, 5\right)=\frac{-3\cdot 5}{\sqrt{\left(3^2+4^2\right)^3}}dx-\frac{4\cdot 5}{\sqrt{\left(3^2+4^2\right)^3}}dy+\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}dz,$$

$$df\left(3,\, 4,\, 5\right)=-\frac{3}{25}dx-\frac{4}{25}dy+\frac{1}{5}dz.\ \lrcorner$$

4.2. Застосування повного диференціала функції до наближених обчислень

Якщо $\left|\Delta x\right|$ і $\left|\Delta y\right|$, тому і $\rho=\sqrt{\left(\Delta x\right)^2+\left(\Delta y\right)^2}$ достатньо малі, то для диференційовної функції $z=f\left(x,\ y\right)$ має місце наближена рівність $\Delta z\approx dz$ або

$$\Delta z\approx\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y\ .$$

70. Висота конуса $H=30$ см, радіус основи $R=10$ см. Як зміниться об'єм конуса, якщо збільшити H на 3 мм і зменшити R на 1 мм?

$\ulcorner$ Об'єм конуса дорівнює $V=\frac{1}{3}\pi R^2H$. Зміну об'єму (приріст) замінимо наближено диференціалом

$$\Delta V\approx dV=\frac{1}{3}\pi\left(2RHdR+R^2dH\right)=\frac{1}{3}\pi\left(-2\cdot10\cdot30\cdot0{,}1+100\cdot0{,}3\right)=$$
$$=-10\pi\approx-31{,}4\ \text{см}^3.$$

Оскільки приріст об'єму від'ємний, то об'єм конуса зменшиться на $31{,}4$ см^3. $\lrcorner$

71. Знайти для функції $z=5x^2-xy+3y^2+5x+2y-1$ повний приріст і повний диференціал у точці $\left(1;\ 2\right)$ при $\Delta x=0{,}1$ і $\Delta y=0{,}2$. Оцінити абсолютну і відносну похибки, що виникають при заміні приросту функції її диференціалом.

$\ulcorner$ Знаходимо повний приріст Δz :

$$\Delta z=5\left(x+\Delta x\right)^2-\left(x+\Delta x\right)\cdot\left(y+\Delta y\right)+3\left(y+\Delta y\right)^2+5\left(x+\Delta x\right)+$$
$$+2\left(y+\Delta y\right)-1-5x^2+xy-3y^2-5x-2y+1=10x\cdot\Delta x+5\left(\Delta x\right)^2-$$
$$-x\cdot\Delta y-y\cdot\Delta x-\Delta x\cdot\Delta y+6y\Delta y+3\left(\Delta y\right)^2+5\Delta x+2\Delta y=$$
$$=\left(10x-y+5\right)\Delta x+\left(6y-x+2\right)\Delta y+5\left(\Delta x\right)^2-\Delta x\cdot\Delta y+3\left(\Delta y\right)^2.$$

Знаходимо повний диференціал dz :

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\left(10x-y+5\right)dx+\left(6y-x+2\right)dy\ .$$

Підставляємо у вирази для Δz і dz значення $x=1$, $y=2$, $\Delta x = dx = 0,1$, $\Delta y = dy = 0,2$. Отримаємо

$$\Delta z = (10\cdot 0,1 - 2 + 5)\cdot 0,1 + (6\cdot 2 + 1)\cdot 0,2 + 5(0,1)^2 - 0,1\cdot 0,2 + 3(0,2)^2 =$$
$$= 4,05.$$
$$dz = (10\cdot 0,1 - 2 + 5)\cdot 0,1 + (6\cdot 2 + 1)\cdot 0,2 = 3.$$

Абсолютна похибка $|\Delta z - dz| = 4,05 - 3 = 1,05$.

Відносно похибка $\left|\dfrac{\Delta z - dz}{\Delta z}\right| = \dfrac{1,05}{4,05} \approx \dfrac{1}{4}$ $(\approx 25\%)$. $\lrcorner$

72. Обчислити наближено $1,02^{3,01}$.

$\ulcorner$ Розглянемо функцію $z = x^y$. Покладемо $x=1$, $y=3$, $\Delta x = 0,02$, $\Delta y = 0,01$.

Початкове значення функції $z = 1^3 = 1$.

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y,\ \frac{\partial z}{\partial x} = y\cdot x^{y-1},\ \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$$

Тоді при зазначених числових значеннях змінних і їх приростах отримаємо:

$$\Delta z \approx dz = y\cdot x^{y-1}\Delta x + x^y \cdot \ln x \cdot \Delta y = 3\cdot 1\cdot 0,02 + 1\cdot \ln 1\cdot 0,01 = 0,06.$$

Отже, $1,02^{3,01} \approx 1 + 0,06 = 1,06$. $\lrcorner$

5. Диференціювання складних функцій

5.1. Випадок однієї незалежної змінної

Якщо $z = f(x, y)$ є диференційовною функцією аргументів x і y, які в свою чергу є диференційовними функціями змінної t

$$x = \varphi(t),\quad y = \psi(t),$$

то похідна складної функції $z = f[\varphi(t), \psi(t)]$ обчислюється за формулою

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}. \qquad (1)$$

У випадку, якщо t збігається з одним із аргументів, наприклад x, то “*повна*” похідна функції z по x дорівнює

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}. \qquad (2)$$

75. Знайти $\frac{\partial z}{\partial t}$, якщо $z=e^{3x+2y}$, де $x=\cos t$, $y=t^2$.

⌐ Знайдемо похідні з правої частини формули (1):

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(e^{3x+2y}\right)_x'=e^{3x+2y}\cdot\left(3x+2y\right)_x'=3e^{3x+2y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(e^{3x+2y}\right)_y'=e^{3x+2y}\cdot\left(3x+2y\right)_y'=2e^{3x+2y},$$

$$\frac{dx}{dt}=\left(\cos t\right)'=-\sin t,\quad \frac{dy}{dt}=\left(t^2\right)'=2t.$$

Підставимо отримані вирази у формулу (1):

$$\frac{dz}{dt}=3e^{3x+2y}\cdot\left(-\sin t\right)+2e^{3x+2y}\cdot 2t=e^{3x+2y}\left(4t-3\sin t\right)=$$

$$=e^{3\cos t+2t^2}\left(4t-3\sin t\right).$$ ⌐

76. Знайти $\frac{dz}{dt}$, якщо $z=\frac{x}{y}$, де $x=e^t$, $y=\ln t$.

⌐ Знайдемо похідні з правої частини формули (1):

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{x}{y}\right)_x'=\frac{1}{y},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{x}{y}\right)_y'=-\frac{x}{y^2}.$$

$$\frac{dx}{dt}=\left(e^t\right)'=e^t,\quad \frac{dy}{dt}=\left(\ln t\right)'=\frac{1}{t}.$$

Підставимо знайдені вирази у формулу (1):

$$\frac{dz}{dt}=\frac{1}{y}\cdot e^t-\frac{x}{y^2}\cdot\frac{1}{t}=\frac{1}{\ln t}\cdot e^t-\frac{e^t}{\ln^2 t}\cdot\frac{1}{t}=\frac{e^t}{\ln t}\left(1-\frac{1}{t\ln^2 t}\right).$$ ⌐

77. Знайти частинну похідну $\frac{\partial z}{\partial x}$ функції $z=\ln\left(e^x+e^y\right)$ і повну похідну $\frac{dz}{dx}$, якщо $y=x^3$.

⌐ Знаходимо частинну похідну:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\ln\left(e^x+e^y\right)\right)_x'=\frac{1}{e^x+e^y}\cdot\left(e^x+e^y\right)_x'=\frac{e^x}{e^x+e^y}.$$

“Повну” похідну $\frac{dz}{dx}$ знайдемо за формулою (2):

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\ln\left(e^{x}+e^{y}\right)\right)_{y}'=\frac{1}{e^{x}+e^{y}}\cdot\left(e^{x}+e^{y}\right)_{y}'=\frac{e^{y}}{e^{x}+e^{y}},\quad \frac{dy}{dx}=\left(x^{3}\right)'=3x^{2}.$$

Отже, $\frac{dz}{dx}=\frac{e^{x}}{e^{x}+e^{y}}+\frac{e^{y}}{e^{x}+e^{y}}\cdot 3x^{2}=\frac{e^{x}+3x^{2}e^{y}}{e^{x}+e^{y}}$. ┘

78. Знайти частинну похідну $\frac{\partial z}{\partial x}$ і повну похідну $\frac{dz}{dx}$, якщо $z=e^{xy}$, де $y=\sin x$.

┌ Частинна похідна:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(e^{xy}\right)_{x}'=e^{xy}\cdot\left(xy\right)_{x}'=y\cdot e^{xy}.$$

Знаходимо повну похідну за формулою (2):

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(e^{xy}\right)_{y}'=e^{xy}\cdot\left(xy\right)_{y}'=xe^{xy},\quad \frac{dy}{dx}=\left(\sin x\right)'=\cos x.$$

Отже, $\frac{dz}{dx}=ye^{xy}+xe^{xy}\cdot\cos x=e^{xy}\left(y+x\cos x\right)$. ┘

5.2. Випадок кількох незалежних змінних

Якщо z є складною функцією кількох незалежних змінних, наприклад, $z=f\left(x,\,y\right)$, де $x=\varphi\left(u,\,v\right)$, $y=\psi\left(u,\,v\right)$ ($u,\,v$ – незалежні змінні; f, φ, ψ – диференційовні функції), то частинні похідні z по u і v знаходяться за формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} \tag{3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}. \tag{4}$$

Незалежно від того, є змінні x та y незалежними, чи залежать від інших змінних, справедлива формула

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

(властивість *інваріантності* форми повного диференціала).

83. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, якщо $z = f(x,\ y)$, де $x = u \cdot v$, $y = \dfrac{u}{v}$.

⌈ Знайдемо $\dfrac{\partial x}{\partial u}$, $\dfrac{\partial x}{\partial v}$, $\dfrac{\partial y}{\partial u}$, $\dfrac{\partial y}{\partial v}$ і застосуємо формули (3), (4).

$$\frac{\partial x}{\partial u} = (u \cdot v)_u{}' = v, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = (u \cdot v)_v{}' = u, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \left(\frac{u}{v}\right)_u{}' = \frac{1}{v},$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \left(\frac{u}{v}\right)_v{}' = -\frac{u}{v^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = f_x{}'(x,\ y) \cdot v + f_y{}'(x,\ y) \cdot \frac{1}{v}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = f_x{}'(x,\ y) \cdot u + f_y{}'(x,\ y) \cdot \left(-\frac{u}{v^2}\right). \quad ⌋$$

84. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, якщо $z = x^2 y - y^2 x$, де $x = u \cdot \cos v$, $y = u \cdot \sin v$.

⌈ Знайдемо похідні з правих частин формул (3), (4):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(xy^2 - y^2 x\right)_x{}' = 2xy - y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^2 y - y^2 x\right)_y{}' = x^2 - 2xy,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = (u \cdot \cos v)_u{}' = \cos v, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = (u \cdot \cos v)_v{}' = -u \sin v,$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = (u \cdot \sin v)_u{}' = \sin v, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = (u \cdot \sin v)_v{}' = u \cos v.$$

Підставимо отримані вирази у формули (3), (4):

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \left(2xy - y^2\right) \cdot \cos v + \left(x^2 - 2xy\right) \cdot \sin v =$$

$$= \left(2u \cos v \cdot u \sin v - u^2 \sin^2 v\right) \cdot \cos v +$$

$$+ \left(u^2 \cos^2 v - 2u \cos v \cdot u \sin v\right) \cdot \sin v =$$

$$= u^2 \sin v \cos v (2 \cos v - \sin v) + u^2 \sin v \cos v (\cos v - 2 \sin v) =$$

$$= u^2 \sin v \cos v (2 \cos v - \sin v + \cos v - 2 \sin v) =$$

$$= u^2 \sin v \cos v (3 \cos v - 3 \sin v) = 3u^2 \sin v \cos v (\cos v - \sin v).$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \left(2xy - y^2\right) \cdot (-u \sin v) + \left(x^2 - 2xy\right) \cdot u \cos v =$$

$$= \left(2u\cos v \cdot u\sin v - u^2\sin^2 v\right)\cdot\left(-u\sin v\right) + \left(u^2\cos^2 v - 2u^2\cos v\sin v\right)\times$$

$$\times u\cos v = -u^3\sin^2 v\left(2\cos v - \sin v\right) + u^3\cos^2 v\left(\cos v - 2\sin v\right) =$$

$$= u^3\left(\underline{-2\sin^2 v\cos v} + \underline{\underline{\sin^3 v}} + \underline{\underline{\cos^3 v}} - \underline{2\cos^2 v\sin v}\right) =$$

$$= u^3\Big[-2\sin v\cos v\left(\sin v + \cos v\right) + \left(\sin v + \cos v\right)\times$$

$$\times\left(\sin^2 v - \sin v\cos v + \cos^2 v\right)\Big] = u^3\left(\sin v + \cos v\right)\left(1 - 3\sin v\cos v\right). \quad \lrcorner$$

6. Частинні похідні вищих порядків

Частинними похідними другого порядку функції $z = f\left(x,\ y\right)$ називаються частинні похідні від її частинних похідних першого порядку.

Для похідних другого порядку використовують позначення

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}\left(x,\ y\right);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = f''_{xy}\left(x,\ y\right);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = f''_{yx}\left(x,\ y\right);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}\left(x,\ y\right).$$

Аналогічно означуються і позначаються частинні похідні порядку вище другого.

Якщо частинні похідні, що обчислюються, неперервні, то результат повторного диференціювання не залежить від порядку диференціювання:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}.$$

Знайти частинні похідні другого порядку функцій:

87. $z = x^3y^4 + 2x^2 - y^3 + 1$.

$\ulcorner$ $\dfrac{\partial z}{\partial x} = z_x{}' = \left(x^3y^4 + 2x^2 - y^3 + 1\right)_x{}' = 3x^2y^4 + 4x$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z_y{}' = \left(x^3y^4 + 2x^2 - y^3 + 1\right)_y{}' = 4x^3y^3 - 3y^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(3x^2y^4 + 4x\right)_x{}' = 6xy^4 + 4,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(4x^3y^3 - 3y^2\right)_y{}' = 12x^3y^2 - 6y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(3x^2y^4 + 4x\right)_y{}' = 12x^2y^3,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(4x^3y^4 - 3y^2\right)_x{}' = 12x^2y^3. \quad \lrcorner$$

88. $z = e^{xy}$.

$\ulcorner$ $\frac{\partial z}{\partial x} = \left(e^{xy}\right)_x{}' = e^{xy} \cdot (xy)_x{}' = e^{xy} \cdot y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \left(e^{xy}\right)_y{}' = e^{xy} \cdot (xy)_y{}' = e^{xy} x$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(e^{xy} \cdot y\right)_x{}' = y \cdot e^{xy} \cdot (xy)_x{}' = y \cdot e^{xy} \cdot y = y^2 e^{xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(e^{xy} \cdot x\right)_y{}' = x \cdot e^{xy} \cdot (xy)_y{}' = xe^{xy} \cdot x = x^2 e^{xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(e^{xy} \cdot y\right)_y{}' = \left(e^{xy}\right)_y{}' \cdot y + (y)_y{}' \cdot e^{xy} = e^{xy} \cdot x \cdot y + 1 \cdot e^{xy} = e^{xy}(xy+1),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(e^{xy} \cdot x\right)_x{}' = \left(e^{xy}\right)_x{}' \cdot x + (x)_x{}' \cdot e^{xy} = e^{xy} \cdot y \cdot x + 1 \cdot e^{xy} =$$

$$= e^{xy}(xy+1). \quad \lrcorner$$

89. $z = \cos(xy)$.

$\ulcorner$ $\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\cos(xy)\right)_x{}' = -\sin(xy) \cdot (xy)_x{}' = -y\sin(xy)$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\cos(xy)\right)_y{}' = -\sin(xy) \cdot (xy)_y{}' = -x\sin(xy),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(-y\sin(xy)\right)_x{}' = -y \cdot \cos(xy) \cdot (xy)_x{}' = -y^2\cos(xy),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(-x\sin(xy)\right)_y{}' = -x \cdot \cos(xy) \cdot (xy)_y{}' = -x^2\cos(xy),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(-y\sin(xy)\right)_y' = -\left[(y)_y' \cdot \sin(xy) + \left(\sin(xy)\right)_y' \cdot y\right] =$$

$$= -\left[\sin(xy) + \cos(xy) \cdot (xy)_y' \cdot y\right] = -\left[\sin(xy) + xy\cos(xy)\right],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(-x\sin(xy)\right)_x' = -\left[(x)_x' \cdot \sin(xy) + \left(\sin(xy)\right)_x' \cdot x\right] =$$

$$= -\left[\sin(xy) + xy\cos(xy)\right]. \quad \lrcorner$$

90. $z = x^y$.

$\ulcorner$ $\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^y\right)_x' = yx^{y-1}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^y\right)_y' = x^y \ln x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(y \cdot x^{y-1}\right)_x' = y(y-1)x^{y-2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(x^y \cdot \ln x\right)_y' = \ln x \cdot \left(x^y\right)_y' = \ln x \cdot x^y \cdot \ln x = x^y \ln^2 x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(y \cdot x^{y-1}\right)_y' = (y)_y' \cdot x^{y-1} + \left(x^{y-1}\right)_y' \cdot y =$$

$$= 1 \cdot x^{y-1} + x^{y-1} \cdot \ln x \cdot y = x^{y-1} + x^{y-1} y \ln x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(x^y \cdot \ln x\right)_x' = \left(x^y\right)_x' \cdot \ln x + (\ln x)_x' \cdot x^y = yx^{y-1} \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot x^y =$$

$$= x^{y-1} + x^{y-1} y \ln x. \quad \lrcorner$$

91. $z = \ln\left(x^2 + y\right)$.

$\ulcorner$ $\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\ln\left(x^2 + y\right)\right)_x' = \frac{1}{x^2 + y} \cdot \left(x^2 + y\right)_x' = \frac{2x}{x^2 + y}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\ln\left(x^2 + y\right)\right)_y' = \frac{1}{x^2 + y} \cdot \left(x^2 + y\right)_y' = \frac{1}{x^2 + y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{2x}{x^2 + y}\right)_x' = 2 \cdot \frac{(x)_x' \cdot \left(x^2 + y\right) - \left(x^2 + y\right)_x' \cdot x}{\left(x^2 + y\right)^2} =$$

$$= 2\cdot\frac{1\cdot\left(x^2+y\right)-2x\cdot x}{\left(x^2+y\right)^2} = 2\frac{x^2+y-2x^2}{\left(x^2+y\right)^2} = \frac{2\left(y-x^2\right)}{\left(x^2+y\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{1}{x^2+y}\right)_y' = -\frac{1}{\left(x^2+y\right)^2}\cdot\left(x^2+y\right)_y' = -\frac{1}{\left(x^2+y\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \left(\frac{2x}{x^2+y}\right)_y' = 2x\cdot\left(\frac{1}{x^2+y}\right)_y' = 2x\cdot\left(-\frac{1}{\left(x^2+y\right)^2}\cdot\left(x^2+y\right)_y'\right) =$$

$$= 2x\left(-\frac{1}{\left(x^2+y\right)^2}\right) = \frac{-2x}{\left(x^2+y\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \left(\frac{1}{x^2+y}\right)_x' = -\frac{1}{\left(x^2+y\right)^2}\cdot\left(x^2+y\right)_x' = \frac{-2x}{\left(x^2+y\right)^2}. \quad \lrcorner$$

92. $z = \sqrt{2xy+y^2}$.

$\ulcorner$ Обчислимо лише похідні $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ та $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\sqrt{2xy+y^2}\right)_x' = \frac{1}{2\sqrt{2xy+y^2}}\cdot\left(2xy+y^2\right)_x' = \frac{2y}{2\sqrt{2xy+y^2}} =$$

$$= \frac{y}{\sqrt{2xy+y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\sqrt{2xy+y^2}\right)_y' = \frac{1}{2\sqrt{2xy+y^2}}\cdot\left(2xy+y^2\right)_y' = \frac{2x+2y}{2\sqrt{2xy+y^2}} = \frac{x+y}{\sqrt{2xy+y^2}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \left(\frac{y}{\sqrt{2xy+y^2}}\right)_y' = \frac{(y)_y'\cdot\sqrt{2xy+y^2}-\left(\sqrt{2xy+y^2}\right)_y'\cdot y}{\left(\sqrt{2xy+y^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1\cdot\sqrt{2xy+y^2}-\dfrac{1}{2\sqrt{2xy+y^2}}\cdot\left(2xy+y^2\right)_y'\cdot y}{2xy+y^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2xy+y^2} - \dfrac{2x+2y}{2\sqrt{2xy+y^2}} \cdot y}{2xy+y^2} = \frac{\sqrt{2xy+y^2} - \dfrac{y\left(x+y\right)}{\sqrt{2xy+y^2}}}{2xy+y^2} =$$

$$= \frac{2xy+y^2 - y\left(x+y\right)}{\left(2xy+y^2\right) \cdot \sqrt{2xy+y^2}} = \frac{2xy+y^2 - xy - y^2}{\left(2xy+y^2\right) \cdot \sqrt{2xy+y^2}} =$$

$$= \frac{xy}{\left(2xy+y^2\right) \cdot \sqrt{2xy+y^2}} ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(\frac{x+y}{\sqrt{2xy+y^2}} \right)'_x = \frac{\left(x+y\right)'_x \cdot \sqrt{2xy+y^2} - \left(\sqrt{2xy+y^2}\right)'_x \cdot \left(x+y\right)}{\left(\sqrt{2xy+y^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1 \cdot \sqrt{2xy+y^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{2xy+y^2}} \cdot \left(2xy+y^2\right)'_x \cdot \left(x+y\right)}{2xy+y^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2xy+y^2} - \dfrac{2y}{2\sqrt{2xy+y^2}} \cdot \left(x+y\right)}{2xy+y^2} = \frac{\sqrt{2xy+y^2} - \dfrac{y\left(x+y\right)}{\sqrt{2xy+y^2}}}{2xy+y^2} =$$

$$= \frac{2xy+y^2 - y\left(x+y\right)}{\left(2xy+y^2\right)\sqrt{2xy+y^2}} = \frac{2xy+y^2 - xy - y^2}{\left(2xy+y^2\right)\sqrt{2xy+y^2}} = \frac{xy}{\left(2xy+y^2\right)\sqrt{2xy+y^2}} . \quad \lrcorner$$

Зауважимо, що у всіх розглянутих прикладах $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.