Застосування диференціального числення функції кількох змінних

Градієнт функції

Градієнтом функції $z = f(x, y)$ у точці $P(x; y)$ називається вектор, проекціями якого на координатні осі є відповідні частинні похідні даної функції:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}\ .$$

Похідна даної функції за напрямом $\vec{e}$ пов'язана з градієнтом функції формулою

$$\frac{\partial z}{\partial e} = \text{пр}_{\vec{e}}\, \overrightarrow{\text{grad}}\, z\ .$$

Градієнт функції у точці співпадає з напрямом нормалі до відповідної лінії рівня функції.

Напрям вектора градієнта функції у заданій точці є напрямом найбільшої швидкості зміни функції у цій точці.

Аналогічно визначається градієнт функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\ .$$

Градієнт функції трьох змінних у точці співпадає з напрямом нормалі до поверхні рівня, що проходить через цю точку.

Приклад 1. Знайти градієнт функції $z = x^2 y$ у точці $P(1; 1)$.

$\ulcorner$ Знаходимо частинні похідні та їх значення в точці P:

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy$; $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P = 2\cdot 1\cdot 1 = 2$;

$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2$; $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P = 1^2 = 1$.

Отже, $\overrightarrow{\text{grad}}\, z = 2\vec{i} + \vec{j}$. $\lrcorner$

Рівняння дотичної площини і нормалі у випадку явного задання поверхні

Дотичною площиною до поверхні у точці M (*точка дотику*) називається площина, в якій знаходяться всі дотичні у точці M до різних кривих, що проведені на поверхні через цю точку.

Нормаллю до поверхні називається перпендикуляр до дотичної площини у точці дотику.

Якщо рівняння поверхні у декартовій системі координат задано у явній формі $z = f(x, y)$, де $f(x, y)$ – диференційовна функція, то рівняння дотичної площини у точці $M(x_0; y_0; z_0)$ поверхні має вигляд

$$z - z_0 = f_x'(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y'(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Рівняння нормалі має вигляд

$$\frac{x - x_0}{f_x'(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y'(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}\ .$$

Рівняння дотичної площини і нормалі у випадку неявного задання поверхні

У випадку, коли рівняння поверхні задано у неявній формі
$F(x, y, z) = 0$ і $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, відповідні рівняння мають вигляд

$$F_x'(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y'(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) +$$
$$+ F_z'(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

рівняння дотичної площини і

$$\frac{x - x_0}{F_x'(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y'(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z'(x_0, y_0, z_0)}$$

рівняння нормалі.

Локальний екстремум функції

Функція $f(x, y)$ має *локальний максимум* (*мінімум*) $f(a, b)$ у точці $P(a; b)$, якщо для всіх відмінних від P точок $P'(x; y)$ у деякому околі точки P виконується нерівність $f(a, b) > f(x, y)$ (відповідно $f(a, b) < f(x, y)$). Максимум або мінімум функції називається її *екстремумом*. Аналогічно визначається екстремум функції трьох і більшого числа змінних.

Необхідна умова екстремуму. Точки, в яких диференційовна функція $f(x, y)$ може набувати екстремуму, знаходять шляхом розв'язання системи рівнянь

$$\begin{cases} f_x'(x,\ y) = 0 \\ f_y'(x,\ y) = 0. \end{cases}$$

Розв’язки системи називають *стаціонарними точками*.

У загальному випадку в точці екстремуму $P(a;\ b)$ функції $f(x,\ y)$ або виконуються умови, або принаймні одна з похідних f_x', f_y' не існує.

Достатня умова екстремуму. У стаціонарній точці $P(a;\ b)$ знаходимо

$A = f_x''(a,\ b)$, $B = f_{xy}''(a,\ b)$, $C = f_{yy}''(a,\ b)$, $\Delta = AC - B^2$.

Тоді: 1) якщо $\Delta > 0$, то функція має екстремум у точці $P(a;\ b)$, а саме – максимум, якщо $A < 0$, і мінімум, якщо $A > 0$;

2) якщо $\Delta < 0$, то екстремуму в точці $P(a;\ b)$ немає;

3) якщо $\Delta = 0$, то потрібні подальші дослідження.

Приклад 2. Дослідити на екстремуми функцію

$$z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

⌜ Знайдемо частинні похідні і складемо систему:

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 12$, $\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ xy - 2 = 0. \end{cases}$

Розв’язуємо систему і знаходимо чотири стаціонарні точки: $P_1(1;\ 2)$, $P_2(2;\ 1)$, $P_3(-1;\ -2)$, $P_4(-2;\ -1)$.

Знайдемо похідні 2-го порядку $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x$ і обчислимо $\Delta = AC - B^2$ для кожної стаціонарної точки.

1) Точка P_1: $A = \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{P_1} = 6$, $B = \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{P_1} = 12$, $C = \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{P_1} = 6$; $\Delta = AC - B^2 = 36 - 144 = -108$. Оскільки $\Delta < 0$, то у точці P_1 екстремуму немає.

2) Точка P_2: $A = 12$, $B = 6$, $C = 12$; $\Delta = 144 - 36 = 108$. Оскільки $\Delta > 0$ і $A > 0$, то у точці P_2 функція має мінімум. Цей мінімум дорівнює значенню функції при $x = 2$, $y = 1$: $z_{\min} = 8 + 6 - 30 - 12 = -28$.

3) Точки P_3: $A = -6$, $B = -12$, $C = -6$; $\Delta = 36 - 144 = -108$. Оскільки $\Delta < 0$, то у точці P_3 екстремуму немає.

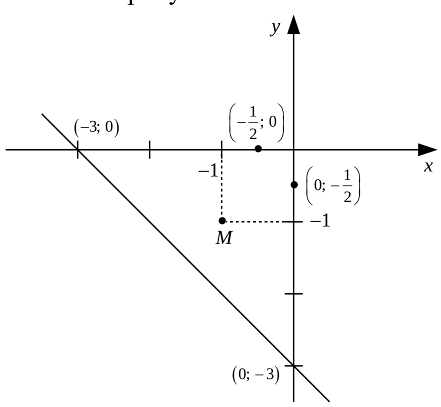
4) Точка P_4: $A = -12$, $B = -6$, $C = -12$; $\Delta = 144 - 36 = 108$. Оскільки $\Delta > 0$ і $A < 0$, то у точці P_4 функція має максимум, що дорівнює $z_{\max} = -8 - 6 + 30 + 12 = 28$. ⌟

Найбільше і найменше значення функції

Диференційовна функція в обмеженій замкненій області набуває свого найбільшого (найменшого) значення або у стаціонарній точці або у точці межі області.

Приклад 3. Визначити найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ в області $x \le 0$, $y \le 0$, $x + y \ge -3$.

⌜ Зазначена область є трикутником.



1) Знайдемо стаціонарні точки: $z'_x = 2x - y + 1$, $z'_y = 2y - x + 1$, $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$. Розв'язуючи систему, знаходимо $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1. \end{cases}$ Точка $M(-1;\,-1)$ належить області.

У точці M значення функції $z(M) = -1$. Дослідження на екстремум не є обов'язковим.

2) Досліджуємо функцію на межі області.

Якщо $x = 0$, то $z = y^2 + y$ і задача зводиться до знаходження найбільшого і найменшого значень цієї функції одного аргументу на відрізку $-3 \le y \le 0$. Похідна функції:

$z' = \left(y^2 + y\right)' = 2y + 1$. Знаходимо критичні точки з умови $z' = 0$: $2y + 1 = 0$, $y = -\dfrac{1}{2}$. Ця точка належить відрізку $[-3,\,0]$. Знаходимо значення функції:

$z\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}$,

$z(-3) = (-3)^2 - 3 = 9 - 3 = 6$,

$z(0) = 0 + 0 = 0$.

При $y = 0$ маємо $z = x^2 + x$. Аналогічно проводимо дослідження на найбільше і найменше значення цієї функції одного аргументу на відрізку $-3 \le x \le 0$.

$z' = \left(x^2 + x\right)' = 2x + 1$.

$z' = 0$: $2x + 1 = 0$, $x = -\dfrac{1}{2} \in [-3,\,0]$.

$z\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{4}$,

$z(-3) = (-3)^2 - 3 = 6$,

$z(0) = 0 + 0 = 0$.

При $x + y = -3$, або $y = -3 - x$ маємо функцію $z = x^2 + (-3 - x)^2 - x \cdot (-3 - x) + x + (-3 - x) = 3x^2 + 9x + 6$ на відрізку $-3 \le x \le 0$. Дослідження проводимо аналогічно попередньому.

$z' = \left(3x^2 + 9x + 6\right)' = 6x + 9$.

$z' = 0$: $6x + 9 = 0$, $x = -\dfrac{3}{2} \in [-3,\,0]$.

$z\left(-\dfrac{3}{2}\right) = 3 \cdot \left(-\dfrac{3}{2}\right)^2 + 9 \cdot \left(-\dfrac{3}{2}\right) + 6 = -\dfrac{3}{4}$,

$z(-3) = 3 \cdot (-3)^2 + 9 \cdot (-3) + 6 = 6$,

$z(0) = 0 + 0 + 6 = 6$.

3) Порівнюємо всі знайдені значення функції z. Робимо висновок, що $z_{\text{найб.}} = 6$ у точках $(0;\,-3)$ і $(-3;\,0)$; $z_{\text{найм.}} = -1$ у стаціонарній точці $M(-1;\,-1)$. $\lrcorner$