Екстремуми функції двох змінних

10.1. Локальний екстремум функції

Функція $f(x,\ y)$ має *локальний максимум* (*мінімум*) $f(a,\ b)$ у точці $P(a;\ b)$, якщо для всіх відмінних від P точок $P'(x;\ y)$ у деякому околі точки P виконується нерівність $f(a,\ b) > f(x,\ y)$ (відповідно $f(a,\ b) < f(x,\ y)$). Максимум або мінімум функції називається її *екстремумом*. Аналогічно визначається екстремум функції трьох і більшого числа змінних.

Необхідна умова екстремуму. Точки, в яких диференційовна функція $f(x,\ y)$ може набувати екстремуму, знаходять шляхом розв'язання системи рівнянь

$$\begin{cases} f_x'(x,\ y) = 0 \\ f_y'(x,\ y) = 0. \end{cases} \qquad (13)$$

Розв'язки системи (13) називають *стаціонарними точками*.

У загальному випадку в точці екстремуму $P(a;\ b)$ функції $f(x,\ y)$ або виконуються умови (13), або принаймні одна з похідних f_x', f_y' не існує.

Достатня умова екстремуму. У стаціонарній точці $P(a;\ b)$ знаходимо

$$A = f_x''(a,\ b),\quad B = f_{xy}''(a,\ b),\quad C = f_{yy}''(a,\ b),\quad \Delta = AC - B^2 .$$

Тоді: 1) якщо $\Delta > 0$, то функція має екстремум у точці $P(a;\ b)$, а саме – максимум, якщо $A < 0$, і мінімум, якщо $A > 0$;

2) якщо $\Delta < 0$, то екстремуму в точці $P(a;\ b)$ немає;

3) якщо $\Delta = 0$, то потрібні подальші дослідження.

128. Дослідити на екстремуми функцію

$$z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y .$$

Γ Знайдемо частинні похідні і складемо систему (13):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 12, \qquad \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases}$$ або

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ xy - 2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему і знаходимо чотири стаціонарні точки: $P_1(1;\ 2)$, $P_2(2; 1)$, $P_3(-1; -2)$, $P_4(-2; -1)$.

Знайдемо похідні 2-го порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x$ і обчислимо $\Delta = AC - B^2$ для кожної стаціонарної точки.

1) Точка P_1: $A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{P_1} = 6$, $B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{P_1} = 12$, $C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{P_1} = 6$; $\Delta = AC - B^2 = 36 - 144 = -108$. Оскільки $\Delta < 0$, то у точці P_1 екстремуму немає.

2) Точка P_2: $A = 12$, $B = 6$, $C = 12$; $\Delta = 144 - 36 = 108$. Оскільки $\Delta > 0$ і $A > 0$, то у точці P_2 функція має мінімум. Цей мінімум дорівнює значенню функції при $x = 2$, $y = 1$: $z_{\min} = 8 + 6 - 30 - 12 = -28$.

3) Точки P_3: $A = -6$, $B = -12$, $C = -6$; $\Delta = 36 - 144 = -108$. Оскільки $\Delta < 0$, то у точці P_3 екстремуму немає.

4) Точка P_4: $A = -12$, $B = -6$, $C = -12$; $\Delta = 144 - 36 = 108$. Оскільки $\Delta > 0$ і $A < 0$, то у точці P_4 функція має максимум, що дорівнює $z_{\max} = -8 - 6 + 30 + 12 = 28$. ⌋

Вправи для самостійного розв'язання

129. Дослідити на екстремуми функцію $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

130. Дослідити на екстремуми функцію $z = (x-1)^2 - 2y^2$.