НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ (НП)

МЕТОД МНОЖНИКІВ ЛАГРАНЖА

$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max(\min)$

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ g_m(x_2, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

F, $g_1, g_2, \dots g_m$ – диференц.

1) Вводиться набір змінних $\lambda_i, i = \overline{1, m},$ – за кількістю умов-обмежень у задачі. Це і є множники Лагранжа;
2) Будується функція Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1, x_2, \dots, x_n);$$

3) Складається система рівнянь:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = 0, j = \overline{1, n} \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = g_i = 0, i = \overline{1, m} \end{cases}$$

4) Знаходиться розв'язок системи (X^*, Λ^*) і функція досліджується на екстремум в околі знайденої точки.
   Приклад.
   $$F(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \rightarrow min$$
   $$x_1 + x_2 = 7$$

   λ

   $$L(x_1, x_2, \lambda) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 7)$$

   $$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 2(x_1 - 2) + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 2(x_2 - 3) + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 7 = 0 \end{cases}$$

   $$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 2 = 0 \\ x_1 = 7 - x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14 - 2x_2 - 2x_2 + 2 = 0 \\ x_1 = 7 - x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 4 \\ x_1 = 3 \end{cases}$$

$\lambda = -2$

$2 > 0 \rightarrow min$

$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \rightarrow extr$ існує. $\left(\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial_{x_2}} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial_{x_1}} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} \right)$