

КВАДРАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ (КП)

У задачах КП:

цільова функція – квадратична,

умови-обмеження – лінійні.

Приклад.

$$F(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ x_1 + x_2 = 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- 1) Вводиться набір змінних $\lambda_i, i = \overline{1,2}$ – за кількістю умов-обмежень у задачі.
Це – множники Лагранжа;

2) Будується функція Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 + \lambda_1(16 - x_1 - 2x_2) + \lambda_2(8 - x_1 - x_2);$$

3) Складається система нерівностей і рівнянь – записуються умови оптимальності розв'язку задачі:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 1 - 2x_1 - \lambda_1 - \lambda_2 \leq 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 2 - 2x_2 - 2\lambda_1 - \lambda_2 \leq 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 16 - x_1 - 2x_2 \geq 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 8 - x_1 - x_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_1} * x_1 = 0, \frac{\partial L}{\partial x_2} * x_2 = 0, \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} * \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

–умови доповняльної нежорсткості

4) Нерівності обертаються в рівності шляхом введення вільних змінних v_1, v_2, w_1 :

$$\begin{cases} 1 - 2x_1 - \lambda_1 - \lambda_2 + v_1 = 0 \\ 2 - 2x_2 - 2\lambda_1 - \lambda_2 + v_2 = 0 \\ 16 - x_1 - 2x_2 - w_1 = 0 \\ 8 - x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 * v_1 = 0, \quad x_2 * v_2 = 0, \quad \lambda_1 * w_1 = 0 \end{cases}$$

5) Вводяться штучні змінні для втримання початкового допустимого розв'язку задачі (також виконуються певні перетворення):

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda_1 + \lambda_2 - v_1 + y_1 = 1 \\ 2x_2 + 2\lambda_1 + \lambda_2 - v_2 + y_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + w_1 = 16 \\ x_1 + x_2 + y_3 = 8 \\ x_1 * v_1 = 0, \quad x_2 * v_2 = 0, \quad \lambda_1 * w_1 = 0 \end{cases}$$

6) Для одержання $\lambda_2 \geq 0$ виконується заміна:

$$\lambda_2 = \lambda_3 - \lambda_4, \quad \lambda_3 \geq \lambda_4 \geq 0$$

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_4 - v_1 + y_1 = 1 \\ 2x_2 + 2\lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_4 - v_2 + y_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + w_1 = 16 \\ x_1 + x_2 + y_3 = 8 \\ x_1 * v_1 = 0, \quad x_2 * v_2 = 0, \quad \lambda_1 * w_1 = 0 \end{cases}$$

7) Складається псевдоцільова функція:

$$My_1 + My_2 + My_3 \rightarrow \min$$

8) Заповнюється вихідна симплекс-таблиця:

	С	-	0	0	0	0	0	0	0	0	М	М	М
	В	A_0	A_{x_1}	A_{x_2}	A_{λ_1}	A_{λ_3}	A_{λ_4}	A_{v_1}	A_{v_2}	A_{w_1}	A_{y_1}	A_{y_2}	A_{y_3}
← М	y_1	1	2	0	1	1	-1	-1	0	0	1	0	0
М	y_2	2	0	2	2	1	-1	0	-1	0	0	1	0
0	w_1	16	1	2	0	0	0	0	0	1	0	0	0
М	y_3	8	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
	Δ	11М	3М	3М	3М	2М	-2М	-М	-М	0	0	0	0

↑
 Напряний стовпець - A_{x_1} ,
 напрямний рядок - y_1 ,
 напрямний елемент - 2.

	С	-	0	0	0	0	0	0	0	0	М	М
	В	A_0	A_{x_1}	A_{x_2}	A_{λ_1}	A_{λ_3}	A_{λ_4}	A_{v_1}	A_{v_2}	A_{w_1}	A_{y_2}	A_{y_3}
0	x_1	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0
← М	y_2	2	0	2	2	1	-1	0	-1	0	1	0
0	w_1	$\frac{31}{2}$	0	2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	0	0
М	y_3	$\frac{15}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	1
	Δ	$\frac{19}{2}M$	0	3М	$\frac{3}{2}M$	$\frac{1}{2}M$	$-\frac{1}{2}M$	$\frac{1}{2}M$	-М	0	0	0



	C	-	0	0	0	0	0	0	0	0	M
	B	A_0	A_{x_1}	A_{x_2}	A_{λ_1}	A_{λ_3}	A_{λ_4}	A_{v_1}	A_{v_2}	A_{w_1}	A_{y_3}
0	x_1	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0
0	x_2	1	0	1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0
0	w_1	$\frac{27}{2}$	0	0	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	0
← M	y_3	$\frac{13}{2}$	0	0	$-\frac{3}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1
	Δ	$\frac{13}{2}M$	0	0	$-\frac{3}{2}M$	-M	M	$\frac{1}{2}M$	$\frac{1}{2}M$	0	0

	C	-
	B	A_0
0	x_1	$\frac{15}{4}$
0	x_2	$\frac{17}{4}$
0	w_1	$\frac{15}{4}$
0	λ_4	$\frac{13}{2}$
	Δ	0

Перевірка умов доповняльної нежорсткості:

$$x_1 * v_1 = \frac{15}{4} * 0 = 0$$

$$x_2 * v_2 = \frac{17}{4} * 0 = 0$$

$$\lambda_1 * w_1 = 0 * \frac{15}{4} = 0$$

-виконуються.