Тема І. **Невизначений інтеграл**

§ 1. Первісна функції і невизначений інтеграл

Властивості невизначеного інтегралу

Основною задачею диференціального числення є визначення для заданої функції F(x) її похідної $F'(x) = f(x)$ чи її диференціала $dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$.

Обернена задача, що полягає в відшуканні такої функції F(x) для якої відома її похідна f(x) чи диференціал f(x)dx, є основною задачею інтегрального числення.

Операції диференціювання та інтегрування взаємно обернені.

<u>Означення.</u> Функція F(x) називаються первісною функції f(x) на відрізку [a; b], якщо на цьому відрізку виконується рівність $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a; b]$.

Приклад 1. Знайти первісну функції $f(x) = x^2$.

$$F(x) = \frac{x^3}{3} \text{ тому, що } \left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2.$$

Приклад 2. Знайти первісну функції f(x) = sin x.

$$F(x) = -\cos x \quad \text{тому, що} \quad (-\cos x)' = \sin x.$$

<u>Теорема 1.</u> Якщо F(x) – первісна функції f(x), то функція F(x) + C, де C – довільна стала (число), також первісна функції f(x).

$$\Rightarrow \quad (F(x)+C)' = F'(x) + C' = F'(x) + 0 = f(x) \quad \blacksquare$$

<u>Теорема 2.</u> Якщо $F_1(x)$ та $F_2(x)$ – дві первісні функції f(x) на відрізку [a; b], то різниця між ними дорівнює сталому числу, тобто $\varphi(x) = F_1(x) - F_2(x) = C$.

<u>Наслідок з теорем 1, 2.</u> Якщо функція F(x) є одна з первісних для функції f(x), то множина всіх первісних для f(x) виражається сумою F(x) + C, де C – довільна стала.

У прикладі 1 знайдено одну з первісних $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ для $f(x) = x^2$, а їх безліч:

$$F_1(x) = \frac{x^3}{3} + 5, \qquad F_2(x) = \frac{x^3}{3} - \sqrt{2}, \qquad F_3(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{7}, \dots$$

Запишемо всі первісні у вигляді множини $\dfrac{x^3}{3} + C$.

Функція f(x), для якої існує первісна, називається інтегрованою, а операція знаходження первісної для даної функції називається інтегруванням.

Означення. Сукупність усіх первісних функції f(x) називається невизначеним інтегралом функції f(x) і позначається $\int f(x)dx = F(x) + C$, де F(x) – деяка первісна функції f(x), а C – довільна стала.

Символ $\int$ називається знаком інтеграла,
f(x) – підінтегральна функція,
f(x)dx – підінтегральний вираз,
x – змінна інтегрування.

Теорема 3. (без доведення). Якщо функція f(x) неперервна на відрізку [a; b], то вона на цьому відрізку інтегрована.

Зауваження. Якщо похідна від елементарної функції завжди є елементарною функцією, то обернене твердження неправильне. Інтеграл від елементарної функції не завжди виражається через елементарні функції.

Наприклад,

$$\int \frac{\sin x}{x} dx \text{ – інтегральний синус;}$$

$$\int \frac{\cos x}{x} dx \text{ – інтегральний косинус;}$$

$$\int e^{-x^2} dx \text{ – інтеграл Пуассона;}$$

$$\int \cos x^2 dx, \quad \int \sin x^2 dx \text{ – інтеграли Френеля;}$$

$$\int \frac{dx}{\ln x} \text{ – інтегральний логарифм.}$$

Вказані інтеграли існують, але не зводяться до елементарних функцій.

Властивості невизначеного інтеграла

1. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції, тобто

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

⇨ Використовуємо означення невизначеного інтеграла $\int f(x)dx = F(x) + C$,

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x) \quad \blacksquare$$

2. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу, тобто $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$

3. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції і довільної сталої, тобто $\int dF(x) = F(x) + C.$

4. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми двох чи декількох функцій дорівнює сумі їх інтегралів, тобто

$$\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx. \qquad (1)$$

5. Постійний множник можна винести за знак інтеграла, тобто якщо a = const $\neq 0$, то

$$\int a \cdot f(x)dx = a\int f(x)dx \qquad (2)$$

Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C,$

то $$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C.$$

Таблиця основних невизначених інтегралів

1. $\int 0 \cdot dx = C$.

2. $\int dx = x + C$.

3. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$.

4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.

6. $\int e^x dx = e^x + C$.

7. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$.

8. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$.

9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

10. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

11. $\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln|\cos x| + C$.

12. $\int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln|\sin x| + C$.

13. $\int \dfrac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C$.

14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

15. $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C$.

16. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$.

17. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$.

18. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$.

§ 2. Основні методи інтегрування

1) Метод розкладу. Базується на застосуванні властивостей 1 – 8 і табличних інтегралів.

$$\int \left(6x^2 + \pi \sin x\right) dx = \int 6x^2\, dx + \int \pi \sin x \, dx = 6\int x^2\, dx + \pi \int \sin x \, dx$$

$$= 6\frac{x^3}{3} + \pi(-\cos x) + C = 2x^3 - \pi \cos x + C.$$

$$\int \frac{dx}{(2x-10)^{10}} =$$

$$\int \frac{dx}{x^{10}} = \int x^{-10} dx = \quad \frac{x^{-9}}{-9} + C = \quad -\frac{1}{9x^9} + C$$

$$= \int (2x-10)^{-10} dx = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{9(2x-10)^9}\right) + C = -\frac{1}{18(2x-10)^9} + C.$$

$$\int\left(4-\frac{3}{x}+\frac{e^x}{2}\right)dx=\int 4\ dx-\int\frac{3}{x}dx+\int\frac{1}{2}e^x\ dx=$$

$$=4\int dx-3\int\frac{1}{x}dx+\frac{1}{2}\int e^x\ dx=4x-3\ln|x|+0,5\ e^x+C$$

$$\int\frac{x^2+5}{x^2-1}dx=\int\left(1+\frac{6}{x^2-1}\right)dx=\int 1\ dx+6\int\frac{1}{x^2-1}dx=$$

$$=x+6\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C=x+3\ \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$$

$$\int\cos^2\frac{x}{2}\ dx=\int\frac{1+\cos x}{2}\ dx=\frac{1}{2}\int(1+\cos x)\ dx=\quad\frac{1}{2}\left(\int dx+\int\cos x\ dx\right)=\frac{1}{2}(x+\sin x)+C$$

$$\int\frac{dx}{9x^2+1}=\int\frac{dx}{(3x)^2+1}=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}3x+C$$

$$\int\frac{dx}{x^2+4x+13}$$

$$x^2+4x+13=\left(x^2+2\cdot x\cdot 2+2^2\right)+9=(x+2)^2+9$$

$$\int\frac{dx}{x^2+4x+13}=\int\frac{dx}{(x+2)^2+9}=\int\frac{dx}{(x+2)^2+3^2}=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3}+C$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$$

$$6x-x^2-8=-\left(x^2-6x+8\right)=-\left[\left(x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2\right)-1\right]=$$

$$=-\left[(x-3)^2-1\right]=1-(x-3)^2$$

ï

$$\int\frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-(x-3)^2}}=\arcsin(x-3)+C$$

2) Метод заміни змінної або метод підстановки.

У багатьох випадках введення нової змінної інтегрування дозволяє звести знаходження заданого інтеграла до табличного.

Нехай необхідно обчислити інтеграл

$$\int f(x)dx$$

від неперервної функції $f(x)$.

Замінимо змінну x через нову змінну t, виконуючи під знаком невизначеного інтеграла підстановку:

$$x = \varphi(t),$$
$$dx = \varphi'(t)dt,$$

де $\varphi(t)$ – неперервна функція, що має неперервну похідну $\varphi'(t)$ і для якої існує обернена функція $t = \psi(x)$.

Тоді $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ – формула заміни змінної або підстановки.

$$\int \sqrt{\cos x}\sin x\, dx = \left| \begin{array}{c} \cos x = t \\ d(\cos x) = dt \\ -\sin x\, dx = dt \\ \sin x\, dx = -dt \end{array} \right| = -\int \sqrt{t}dt = -\int t^{\frac{1}{2}}dt =$$

$$= -\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = -\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{3}\sqrt{t^3} + C = -\frac{2}{3}\sqrt{\cos^3 x} + C.$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-4\ln x}} = \left| \begin{array}{c} 1-4\ln x = t \\ d(1-4\ln x) = dt \\ -4\cdot\frac{1}{x}dx = dt \\ \frac{dx}{x} = -\frac{1}{4}dt \end{array} \right| = -\frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{4}\int t^{-\frac{1}{2}}dt =$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = -\frac{1}{4}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = -\frac{1}{2}\sqrt{t} + C =$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{1-4\ln x} + C.$$

3) <u>Метод інтегрування частинами.</u>

Нехай $u(x)$, $v(x)$ – диференційовні функції. Відомо, що диференціал від добутку $u\cdot v$ обчислюється за формулою:
$d(u\cdot v) = udv + vdu$.

Проінтегруємо ліву та праву частини рівності:

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu$$

$$uv = \int udv + \int vdu$$

або $\int udv = uv - \int vdu$ – формула інтегрування частинами.

зауважимо, що через u позначають функцію, яка спрощується при диференціюванні (наприклад, x, x^2, arctg x, arcsin x,

До I групи відносяться інтеграли виду:
$\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)\sin kx dx$, $\int P(x)\cos kx dx$, де $P(x)$ – многочлен, $k \in R$.

Для їх обчислення за u приймають $P(x)$, а за dv – відповідно вирази $e^{kx}dx$, $\sin kx dx$, $\cos kx dx$.

1. $$\int x\sin x\, dx = \left| \begin{array}{c} u = x \\ dv = \sin x\, dx \\ du = dx \\ v = \int \sin x\, dx = -\cos x \end{array} \right| = uv - \int vdu = -x\cos x + \int \cos x dx =$$
$$= -x\cos x + \sin x + C.$$

До IIгрупи відносяться інтеграли виду:

$$\int P(x)\mathrm{arctg} x\, dx,\ \int P(x)\arcsin x\, dx,\ \int P(x)\arccos x\, dx,$$

$$\int P(x)\ln x\, dx,$$ де $P(x)$ – многочлен.

Для їх обчислення за u приймають відповідно функції:
arctg x, arcsin x, arccos x, ln x, а за dv – вираз P(x)dx.

$$\int \mathrm{arctg} x dx = \left| \begin{array}{c} u = \mathrm{arctg} x \\ dv = dx \\ du = \dfrac{1}{1+x^2}dx \\ v = x \end{array} \right| = uv - \int vdu = x\,\mathrm{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}dx =$$

$$= x\,\mathrm{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = x\,\mathrm{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

До III групи відносяться інтеграли виду:

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx,\ \int e^{ax}\sin bx dx,\ \text{де } a,\ b\in R.$$

Для їх обчислення двічі застосовують формулу інтегрування частинами

$$I=\int e^{x}\cos 3x\,dx=\left|\begin{array}{c} u=e^{x}\\ dv=\cos 3x dx\\ du=e^{x}dx\\ v=\int \cos 3x dx=\\ =\frac{1}{3}\sin 3x\end{array}\right|=uv-\int v du=\frac{1}{3}e^{x}\sin 3x-$$

$$-\frac{1}{3}\int e^{x}\sin 3x\,dx=\left|\begin{array}{c} u=e^{x}\\ dv=\sin 3x dx\\ du=e^{x}dx\\ v=\int \sin 3x\,dx=\\ =-\frac{1}{3}\cos 3x\end{array}\right|=\frac{1}{3}e^{x}\sin 3x-\frac{1}{3}(uv-\int v du)=$$

$$=\frac{1}{3}e^{x}\sin 3x-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}e^{x}\cos 3x+\frac{1}{3}\int e^{x}\cos 3x\,dx\right)=\frac{1}{3}e^{x}\sin 3x+$$

$$+\frac{1}{9}e^{x}\cos 3x-\frac{1}{9}I.$$

Отримали рівняння з невідомим інтегралом I, тобто

$I=\frac{1}{3}e^{x}\sin 3x+\frac{1}{9}e^{x}\cos 3x-\frac{1}{9}I,$ звідки

$$\frac{10}{9}I=\frac{1}{3}e^{x}\sin 3x+\frac{1}{9}e^{x}\cos 3x,$$

$$I=\frac{9}{10}\left(\frac{1}{3}e^{x}\sin 3x+\frac{1}{9}e^{x}\cos 3x\right)=\frac{e^{x}}{10}(3\sin 3x+\cos 3x)+C.$$

§ 1. Визначений інтеграл як границя суми та його властивості.

Розглянемо на відрізку [a, b] деяку неперервну функцію $y = f(x)$. Розіб'ємо відрізок [a, b] довільним чином на n частин точками: $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b$, де $x_0, x_1, ..., x_n$ – точки розбиття. Довжину кожного часткового відрізка будемо позначати через Δx_i: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. У кожному частковому відрізку виберемо довільну точку $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ та обчислимо $f(\xi_i)$ – значення функції f(x) в цій точці. Для даного розбиття складемо суму:

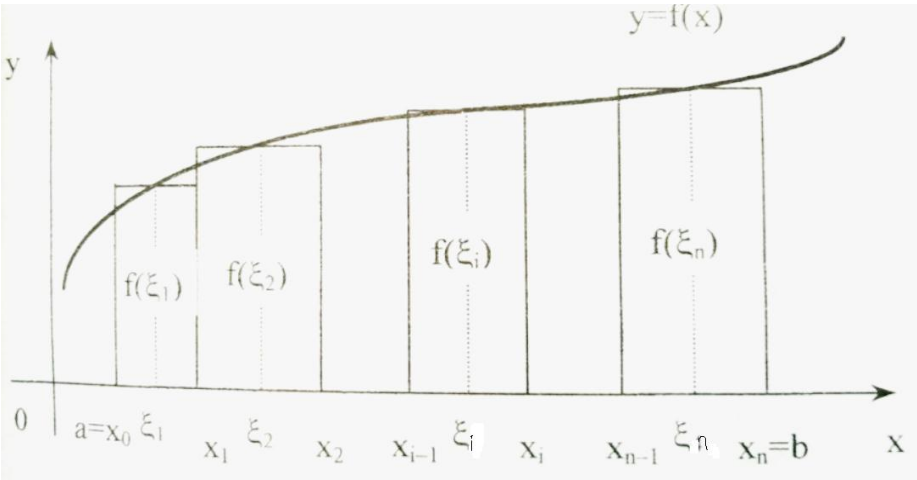


Рис. 1

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_i)\Delta x_i + ... + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \quad (1)$$

<u>Означення 1.</u> Сума S_n(1) називається інтегральною сумою функцій f(x) на [a, b].

Геометрично сума S_n(1) являє собою алгебраїчну суму площ прямокутників з основами $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ та висотами $f(\xi_1), f(\xi_2), ..., f(\xi_n)$, якщо $f(x) \geq 0$ (рис. 1).

Сума (1) залежить від способу розбиття відрізка [a, b] на відрізки $[x_{i-1}, x_i]$ і від вибору точок ξ_i. Якщо змінювати розбиття [a, b] і спосіб вибору точок ξ_i, то будемо отримувати нове значення суми S_n, т.б. отримаємо числову послідовність інтегральних сум: $\{S_n\}$.

Позначимо через λ довжину найбільшого часткового відрізка розбиття: $\lambda = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$. Будемо розглядати такі розбиття, де $\lambda \to 0$ (при цьому число відрізків n необмежено зростає $(n \to \infty)$).

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} S_n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (2)$$

В цьому випадку підінтегральна функція f(x) називається інтегрованою на відрізку [a, b].

Означення 2. Визначеним інтегралом функції f(x) на відрізку [a, b] називається скінченна границя інтегральної суми S_n за умови, що довжина найбільшого часткового відрізка прямує до нуля ($\lambda = \max \Delta x_i \to 0$), яка не залежить від способу розбиття та вибору точок ξ_i і позначається

$\int_a^b f(x)dx$ читається: «визначений інтеграл від a до b f(x) на dx»,

де $f(x)dx$ – підінтегральний вираз,

[a, b] – відрізок інтегрування,

число a – нижня межа інтегрування,

b – верхня межа інтегрування,

x – змінна інтегрування.

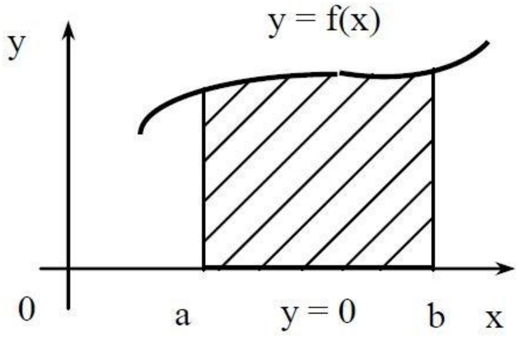


Рис. 2

З'ясуємо геометричний зміст визначеного інтеграла. Якщо $f(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$, то визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ чисельно дорівнює площі криво-лінійної трапеції, обмеженої графіком функції y = f(x), віссю 0x та прямими x = a, x = b:

$$S = \int_a^b f(x)dx \quad \text{(рис. 2)}$$

Основні властивості визначеного інтеграла.

1. Постійний множник можна винести за знак визначеного інтеграла: якщо A = const, то

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx\,.$$

2. Визначений інтеграл від алгебраїчної суми декількох функцій дорівнює алгебраїчній сумі їх інтегралів. Так, у випадку двох доданків.

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$$

Формула Ньютона-Лейбніца.

Теорема 2. Якщо F(x) – деяка первісна неперервної на [a, b] функції f(x), то справедлива рівність

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

яка називається формулою Ньютона-Лейбніца, ($\Big|_a^b$ – знак подвійної підстановки).

$$\int_\pi^{2\pi} \sin x\, dx = -\cos x\Big|_\pi^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos\pi) = -2$$

§ 3. Заміна змінної у визначеному інтегралі.

Нехай необхідно обчислити визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ від неперервної функції f(x). Виконаємо заміну $x = \varphi(t)$.

Якщо виконуються умови:

1) $\varphi(t)$ і $\varphi'(t)$ неперервні на відрізку $\alpha \le t \le \beta$;
2) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$;
3) $f(\varphi(t))$ неперервна на $[\alpha, \beta]$,

то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

$$\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \left| \begin{matrix} 1+\ln x = t, & t_1 = 1+\ln 1 = 1, \\ d(1+\ln x) = dt, & t_2 = 1+\ln e^3 = \\ \dfrac{dx}{x} = dt, & = 1 + 3\ln e = 4 \end{matrix} \right| = \int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}\Big|_1^4 =$$

$$= 2(\sqrt{4} - \sqrt{1}) = 2$$

§ 4. Інтегрування частинами.

Якщо функції $u = u(x)$, $v = v(x)$ і їх похідні $u'(x)$, $v'(x)$ неперервні на відрізку [a, b], то $\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$ – формула інтегрування частинами для визначеного інтеграла.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx = \left| \begin{matrix} u = x \\ dv = \cos x dx \\ du = dx \\ v = \int \cos x dx = \sin x \end{matrix} \right| = uv\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} v du = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx =$$

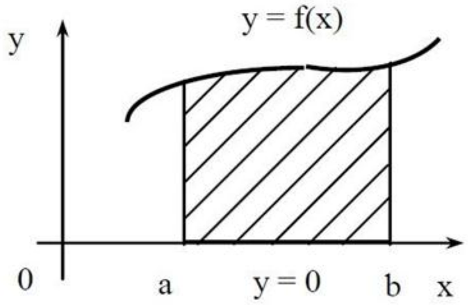
$$= \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + \left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Застосування визначеного інтеграла

3.1. Обчислення площ плоских фігур

Як уже зазначалось, якщо на відрізку $[a;\ b]$ функція $y = f(x)$ неперервна і $f(x) \geqslant 0$, то площу криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$ і прямими $x = a$, $x = b$, $y = 0$, знаходять за формулою

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (69)$$



Якщо треба обчислити площу фігури $A_1A_2B_2B_1$ (рис. 7.25), то за формулою (69)

$$S = \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_1(x)\,dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx, \qquad (72)$$

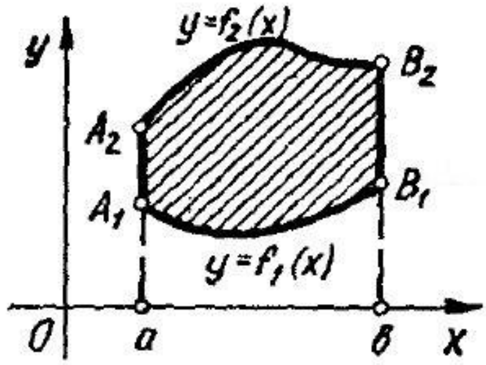
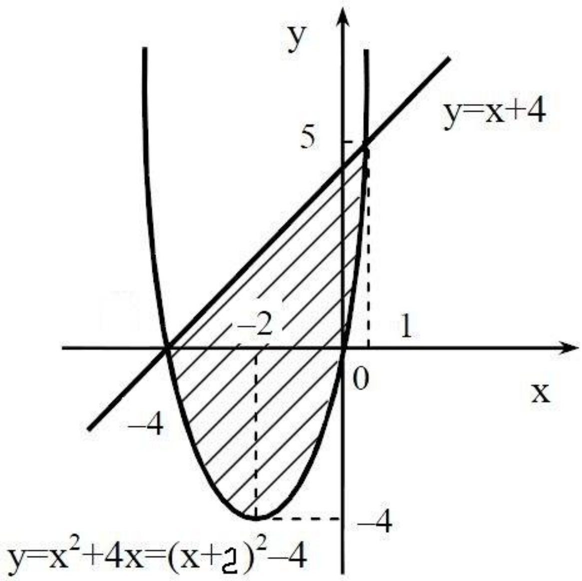


Рис. 7.25

Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2 + 4x$ і прямою $y = x + 4$.



Знайдемо точки перетину параболи з прямою і побудуємо шукану фігуру

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x \\ y = x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4 = x^2 + 4x, \\ y = x + 4. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ y = 5, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -4, \\ y = 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$$

Таким чином, криві перетинаються в точках A(-4; 0) і B(1; 5)
За формулою, де $f_1(x) = x^2 + 4x$, $f_2(x) = x + 4$,
$a = -4$, $b = 1$, маємо

$$S = \int_{-4}^{1} ((x + 4) - (x^2 + 4x))dx =$$

$$= \int_{-4}^{1} (-x^2 - 3x + 4)dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x \right)\Bigg|_{-4}^{1} =$$

$$= \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6} \quad \text{(кв. од.)}$$