Лабораторна робота № 6

Вивчення статистичних характеристик цифрових генераторів шуму

Мета роботи: дослідження залежності статистичних характеристик “білого” шуму від методів реалізації алгоритмів генерації.

1. Теоретичні відомості

При проведенні експериментальних досліджень складних динамічних систем (СДС) та інших технічних приладів, при моделюванні таких систем і розв’язанні задачі ідентифікації широко використовують випадкові сигнали (процеси) з заданими статистичними характеристиками.

Як відомо, найбільш повними статистичними характеристиками випадкових процесів є диференціальний закон розподілу ймовірностей (щільність розподілу ймовірностей) і інтегральний закон (функція ймовірності).

При вивченні стаціонарних і ергодичних процесів звичайно обмежуються розглядом перших двох моментів цих законів (кореляційна теорія випадкових процесів).

Незалежно від стаціонарної або нестаціонарної природи випадкового сигналу з заданими характеристиками найбільш часто такі сигнали одержують з допомогою відповідних фільтрів (моделей сигналів) породжуючого білого шуму.

Білий шум – це гіпотетичний стаціонарний випадковий процес, що не має місця в дійсності, і у якого будь-які два значення, роздільні скільки завгодно малими інтервалами часу, статистично незалежні. В силу цього кореляційна функція шуму дорівнює дельта-функції

$$R(\tau) = a^2 \cdot \delta(\tau), \tag{6.1}$$

а спектральна щільність

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \cdot e^{-j\omega t} d\tau = a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) \cdot e^{-j\omega t} d\tau = a^2 = const \tag{6.2}$$

На практиці зустрічаються випадкові процеси, спектральні щільності яких постійні в деякій обмеженій смузі частот. Якщо ця смуга частот по величині перевищує смугу пропускання формуючого фільтру, тобто моделі сигналу (в інших випадках перевищує смугу пропускання досліджуємої СДС) і спектральна щільність приблизно постійна, то такий процес наближено може вважатися білим шумом. Щоб відрізняти реальний (наближений) білий шум від гіпотетичного (математичної абстракції), будемо брати прикметник в лапки, тобто “білий” шум – це наближений випадковий процес, що можна генерувати за допомогою технічних або алгоритмічних засобів.

В практиці експериментальних досліджень виникає необхідність знати не тільки спектральний склад випадкових сигналів, але і розподіл ймовірностей миттєвих значень цих сигналів. При цьому заданий розподіл миттєвих значень випадкового сигналу краще всього одержувати за допомогою спеціальних функціональних перетворювачів з породжуючого “білого” шуму, що має рівномірний розподіл в деякому інтервалі значень.

Типовим прикладом дискретного “білого” шуму може служити помилка квантування сигналів по рівню, що виконується в АЦП. Як відомо, квантування сигналів по рівню може бути ототожнене з їхнім проходженням через перетворювач з нелінійною статистичною характеристикою, показаною на рис. 6.1.

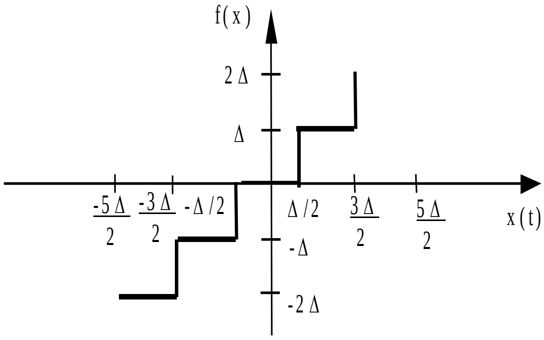


Рис. 6.1

Якщо вважати, що в ідеальному випадку (перетворювач не вносить помилок в сигнали що передаються) вихідний сигнал повинен мати значення

$$y = f(x) = kx \qquad (6.3)$$

(k – коефіцієнт перетворення пристрою, $k = tg\alpha$), то під помилкою квантування розуміють різницю двох сигналів, утворених на виході ідеального перетворювача з характеристикою, що показана на рис. 6.1. Процес формування помилки можна відобразити блок-схемою, зображеною на рис. 6.2.

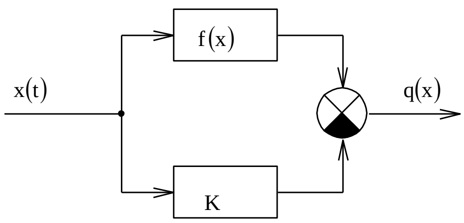


Рис. 6.2

Оскільки

$$q(x) = f(x) - kx, \qquad (6.4)$$

то графік (осцилограма) зміни помилки квантування має вигляд, показаний на рис. 6.3, а.

Графік щільності розподілу імовірностей випадкової помилки квантування сигналів по рівню зображений на рис. 6.3, б. Аналітично щільність розподілу записується наступним чином:

$$W(q)=\begin{cases} 1/\Delta, \text{ при } & -\Delta/2 \le q \ge \Delta/2; \\ 0, \text{ при } & |q| \ge \Delta/2. \end{cases} \qquad (6.5)$$

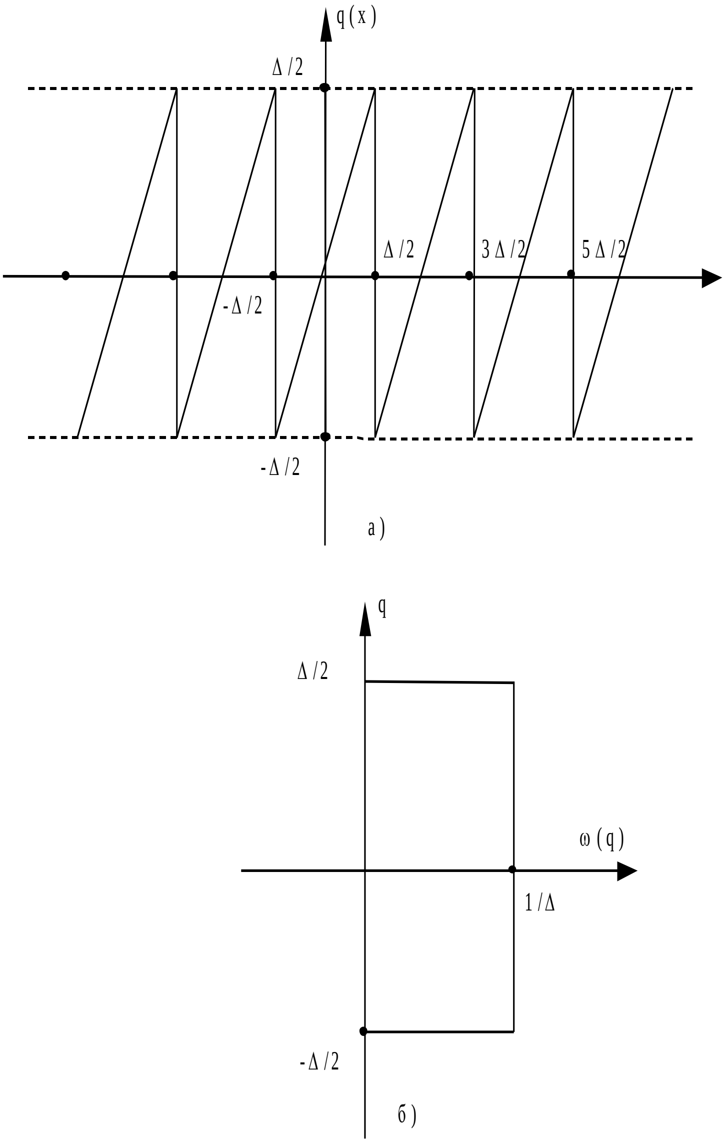


Рис 6.3

Існує три методи генерування випадкових чисел: табличний, фізичний, аналітичний (алгоритмічний). В різних генераторах випадкових чисел (ГВЧ) має місце послідовне, паралельне або змішане формування двійкових розрядів числа. Недоліком послідовних ГВЧ є низька швидкодія. Паралельні ГВЧ забезпечують високу швидкодію, але потребують значних апаратних засобів. Змішані ГВЧ використовують переваги двох попередніх типів ГВЧ і тому є найбільш поширеними.

Табличний метод формування випадкових чисел полягає у занесенні в запам'ятовуючий пристрій ЕОМ таблиць випадкових чисел і зчитуванні їх в міру необхідності. Цей метод може використовуватися при малому обсязі статистичних випробувань, так як для зберігання таблиць потрібний великий обсяг пам'яті ЕОМ.

Фізичний генератор складається з джерела шуму, підсилювача і формувача випадкових чисел. В якості джерела шуму використовуються p-n переходи діодів і транзисторів, газорозрядні прилади, вугільні стовпчики тощо. Формувач випадкових чисел може бути виконаний у вигляді обмежувача і лічильника, що підраховує кількість перевищень шумовим коливанням встановленого рівня обмеження за фіксований інтервал часу Δt . Якщо кількість підрахованих перевищень парна, то записується нуль, якщо непарна – то одиниця. Найбільш поширеним є метод побудови ГВЧ, в якому кожний розряд вихідного числа формується незалежно за допомогою ймовірнісних блоків, в яких джерелом шуму є фізичні генератори. Отримані нулі і одиниці записуються в спеціальну комірку пам'яті. В будь-який момент можна звернутися до цієї комірки і взяти звідти значення випадкового числа.

Недоліками цього метода формування випадкових чисел є:

1. Складність перевірки якості отриманих випадкових чисел. Ці перевірки потрібно робити періодично, так як через коливання напруги живлення, температури тощо може виникнути так званий "дрейф розподілу".

2. Досить часто розрахунки на ЕОМ потрібно перепровіряти, щоб виключити можливість випадкового збою. Але відтворити ті самі випадкові числа неможливо, якщо по ходу експерименту їх не запам'ятовувати. Якщо їх запам'ятовувати, то знову отримуємо табличний метод.

Досить поширеними є також ГВЧ, побудовані на основі регістра зсуву. Ці ГВЧ формують так звані М-послідовності, тобто послідовності максимальної довжини, які містять $N = 2^m - 1$ чисел, що не повторюються, де m – число розрядів регістра зсуву.

Аналітичний метод дозволяє отримати випадкові числа шляхом реалізації на ЕОМ математичного алгоритму, що складається із послідовності математичних і логічних операцій, які реалізують рекурсивні співвідношення. Аналітичні методи не дозволяють отримати випадковий процес в його суворо математичному визначенні, так як числа, отримані за допомогою формули неможливо вважати випадковими, хоча формула і може бути досить складна. Найчастіше застосовується рекурсивний алгоритм розрахунку, який визначає всі інші числа по першому заданому числу. При цьому можливі цикли, що повторюються. Крім того, через обмежену розрядність ЕОМ неможливо отримати суворо рівномірний розподіл в заданому інтервалі значень. Тому такий випадковий процес називають псевдовипадковим. Однак, випадкові процеси, що формуються за цим методом, доволі придатні для технічних задач.

Розглянемо деякі аналітичні методи генерування випадкових чисел.

Найпростішим є алгоритм Дж. Неймана. Береться довільне число a_0, що складається з $2n$ двійкових цифр, і обчислюється його квадрат. Отримуємо ${a_0}^2$, що складається вже з $4n$ двійкових цифр. Далі вибирається число a_1, що складається з $2n$ середніх двійкових цифр, шляхом відкидання старших і молодших n розрядів. Далі процес обчислень повторюється для a_1 і так далі.

Перевагою цього алгоритму є його простота. Для отримання кожного випадкового числа потрібно лише декілька простих операцій. Програма займає лише декілька комірок пам’яті ЕОМ. Будь-яке число можна легко відтворити для перевірки якості послідовності випадкових чисел. Недоліком даного алгоритму є те, що розподіл випадкових чисел дещо відхиляється від рівномірного, так як дає більше малих значень.

Також відомі і інші алгоритми генерації випадкових чисел: модифікований метод Неймана, алгоритми на основі рекурентного співвідношення, метод порівнянь, запропонований Д. Лемером.

В особливу групу виділяють специфічний дискретний випадковий процес, що отримав назву «випадкові числа» (потік випадкових чисел). Цей процес являє собою аперіодичну послідовність біполярних прямокутних імпульсів напруги, що відповідає аперіодичній виборці обмежених по значенню чисел в тій або іншій системі числення, наприклад в інтервалі значень від 0 до $(m^n - 1)$, де m - основа системи лічби, що використовується; n – кількість розрядів числа. В ряді випадків використовують періодичну послідовність випадкових чисел.

Інколи виявляється зручним пронормувати числа діленням їх на найбільше число, тобто на $(m^n - 1)$. При цьому випадкові числа розподілені в інтервалі $0...1$.

Пристрій (або алгоритм), що формує послідовність (аперіодичну або періодичну) випадкових чисел, називають генератором випадкових чисел (ГВЧ). За допомогою n-розрядного генератора можна отримати $N = m^n$ різноманітних чисел.

Найбільш розповсюджені генератори двійкових чисел $(m = 2)$. Фіксація отриманої цифри в кожному з n розрядів здійснюється за допомогою бістабільних елементів (один стан фіксує одиницю, а інший - нуль). Побудова ГВЧ, що використовують системи лічби, кратні двом, тобто 4, 8, 16, …, виконується об'єднанням декількох ГВЧ з двійковою системою лічби (при вісімковій системі використовується три двійкових канали тощо).

Будь-яке випадкове двійкове число A_i можна представити у вигляді

$$A_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot 2^{j-1} \qquad (6.6)$$

де α_j – випадкова величина, що приймає в кожному з n розрядів двійкового числа значення 0 або 1.

Поява нулів і одиниць в кожному розряді числа – події єдино можливі і несумісні, тому сума імовірностей цих подій

$$P(a_j = 1) + P(a_j = 0) = 1 \qquad (6.7)$$

Числа, що генеруються, можуть бути корельованими і некорельованими. При цьому умова некорельованості послідовності випадкових чисел має вигляд

$$R_{kr} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k,r=1}^{N} \left(A_k - \langle A \rangle\right) \cdot \left(A_r - \langle A \rangle\right) = \begin{cases} 0, & k \neq r, \\ \sigma_A^2, & k = r, \end{cases} \qquad (6.8)$$

де $< A >$ – математичне очікування послідовності випадкових чисел; σ_A^2 - дисперсія послідовності випадкових чисел.

Як вже відзначалося, найбільший інтерес представляє генерація випадкових рівноймовірних десяткових чисел. В цьому випадку кожне з $N = 2^n$ чисел повинно з'являтися на виході ГВЧ з імовірністю

$$P(A_i) = 1/2^n . \qquad (6.9)$$

Як видно з наведеної формули, розподіл чисел є дискретним і, отже, квазірівномірним в інтервалі $0...(2^n - 1)$ або $0...1$.

Щоб випадкові числа, що генеруються, підкорялися рівномірному розподілу, необхідно виконання, принаймні, двох умов:

1) Рівність ймовірностей появи нулів і одиниць в кожному з розрядів N - розрядного числа

$$P(a_j = 1) = P(a_j = 0) = 1/2 ; \qquad (6.10)$$

2) Відсутність статистичного або детермінованого зв'язку між розрядами чисел, що генеруються.

В найпростішому випадку генерування n - розрядних рівноймовірних чисел зводиться до отримання n однорозрядних рівно ймовірних двійкових чисел з наступним їхнім об'єднанням з урахуванням ваги кожного розряду

$$a_i = \frac{2^{i-1}}{2^n - 1}, \qquad (6.11)$$

де i – номер розряду.

По засобам формування розрядів випадкових двійкових чисел ГВЧ можна поділити на наступні типи:

1) З використанням принципу випадкового чергування одного з двох тривких станів рівноваги;

2) З переліченням імпульсів випадкової послідовності за фіксований інтервал часу;

3) З переліченням періодичних імпульсів, що надходять на лічильник за випадковий інтервал часу.

Крім того, в окрему групу виділяють ГВЧ, у яких для формування одного розряду двійкового числа використовується аналізатор знаку випадкового процесу $U(t)$ у фіксовані моменти $t_i = t_0 + i \cdot T_{ГВЧ}$, де $i = 0, 1, 2, \dots$; $T_{ГВЧ}$ – тактовий період роботи ГВЧ.

Якщо $U(t_i) > 0$, то генерується одиниця; якщо $U(t_i) < 0$, генерується нуль.

ГВЧ з переліченням випадкових, по моментам появи, імпульсів за фіксований інтервал часу $T_{ГВЧ}$ і ГВЧ з переліченням періодичних імпульсів за випадковий інтервал $\Delta t_i \le T_{ГВЧ}$ містить загальний елемент – лічильник імпульсів.

Число тригерів у лічильнику визначає розрядність одержуваних чисел і може змінюватися від 1 до n.

Якщо вимагається отримати n – розрядне випадкове число і у лічильнику міститься n ступенів лічби, то ГВЧ називають однотактовим з переліченням імпульсів по модулю $M = 2^n$.

Паралельний ГВЧ складається з n однорозрядних лічильників, що рахують імпульси, які надходять від автономних генераторів пакетів імпульсів. При цьому всі n однорозрядних лічильників з'єднуються колами зчитування.

Якщо ГВЧ складається з одного лічильника, а n-розрядне число формується за n послідовних циклів його роботи, то такий ГВЧ називають послідовним.

Послідовний ГВЧ містить вихідну пам'ять, куди через регістр зсуву заносяться значення чисел (0 або 1), отримані в кожному з n послідовних циклів.

Паралельні ГВЧ надто складні в реалізації, а послідовні ГВЧ мають низьку продуктивність. Компромісом є паралельно – послідовна структура ГВЧ.

Одним з варіантів побудови алгоритмічного ГВЧ (такі ГВЧ іноколи називають «математичною моделлю ГВЧ») є завдання випадкової послідовності чисел за допомогою виразу

$$A_{i+1} = a \cdot A_i (\bmod C),\ i = 0.1, \tag{6.12}$$

де A_i, а та C_i – цілі числа, причому

$$A_0 \ne 0 (\bmod C).. \tag{6.13}$$

Умова $A \equiv B(\bmod\ C)$ означає, що A та B співпадають по модулю N, тобто A та B мають однаковий залишок при діленні на C.

Записаний алгоритм отримання випадкових чисел A_i визначає, що при довільному початковому значенні A_0 випадкові числа A_i являють собою результат множення a на A_i та нормування по модулю C. При цьому випадкові числа мають розподіл від 0 до C, $C = 2^k$. Отримана таким чином послідовність є періодичною. Правильним вибором чисел a, C та k цей період можна зробити достатньо великим.

Практичне використання випадкових чисел звичайно ускладнене. Так, не завжди вдається забезпечити необхідні по умовам експерименту характеристики послідовностей випадкових чисел. Для цього потрібні контроль, регулювання і стабілізація ГВЧ.

Тому випадкові числа замінюють так званими псевдовипадковими послідовностями чисел. Така заміна можлива, якщо характеристики псевдовипадкової послідовності близькі до характеристик випадкової послідовності.

Псевдовипадкова послідовність є регулярним періодичним сигналом, будь-які необхідні характеристики якого можна отримати по реалізації в один період. Такими сигналами успішно вдається замінити послідовність випадкових однорозрядних чисел – «бінарний шум».

Варіант псевдовипадкової послідовності показаний на рис. 6.4, де T – тривалість двійкового сигналу (дискретна); T_n – період послідовності.

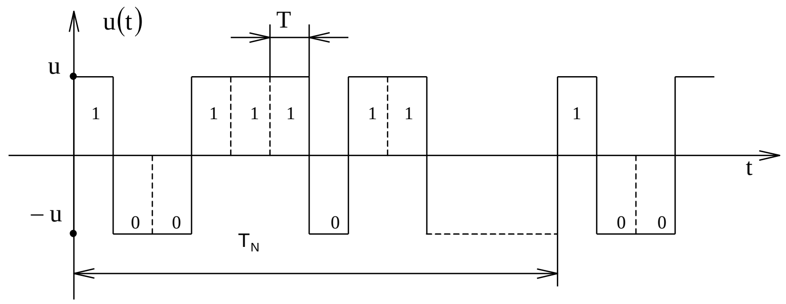


Рис. 6.4

Як «бінарний шум» найбільш широко застосовуються лінійні послідовності максимальної довжини (ПМД, або НПМД – послідовності), що генеруються за допомогою генераторів, які складаються з n – каскадних регістрів зсуву і суматорів по модулю 2 $(\mathrm{mod}\ 2)$. Спрощена блок – схема такого генератора зображена на рис. 6.5.

Згідно рис. 6.5 сигнали з одиничних виходів k – го і r – го тригерів додаються по $\mathrm{mod}\ 2$ і надходять на вхід першого тригера. Схема з n тригерів може мати $N = 2^n$ різноманітних станів. Не можна використати лише один стан: коли в усіх тригерах зафіксовані нулі (генеруються тільки нулі). Тому максимальний період повторення буде визначатися наступним чином:

$$T_N = T(2^n - 1). \tag{6.14}$$

Оскільки стан тригера змінюється тільки через один такт (період) імпульсами зсуву, то при введенні «оператора затримки» на один такт сигнал на виході будь-якого тригера можна записати аналітично

$$x_i = D \cdot x_{i-1}. \tag{6.15}$$

Тоді робота генератора (див. рис. 6.5) відбувається наступним чином. Якщо в тригері T_1 на j – му такті зафіксоване деяке число x_1 (+1 або 0), то в результаті зсуву через один такт x_1 виявиться зафіксованим в T_2, а в T_1 переходить число з суматора по $\mathrm{mod}\ 2$. Означені оператори з кожним черговим тактом повторюються.

У відповідності з цим для станів тригерів можна записати:

$$x_1 = D \cdot x_0;\ x_2 = D^1 \cdot x_1;\ \ldots;\ x_i = D^i \cdot x. \tag{6.16}$$

Сигнал на виході суматора по $\mathrm{mod}\ 2$ одержуємо послідовною підстановкою:

$$D^0 \cdot x_0 = D \cdot x_k \oplus D \cdot x_n = D^k \cdot x_0 \oplus D^r \cdot x_0 \tag{6.17}$$

Для прикладу нехай $N = 3,\ k = 2$. Тоді для x_0 запишемо

$$D^0 \cdot x_0 = D^2 \cdot x_0 \oplus D^3 \cdot x_0 \tag{6.18}$$

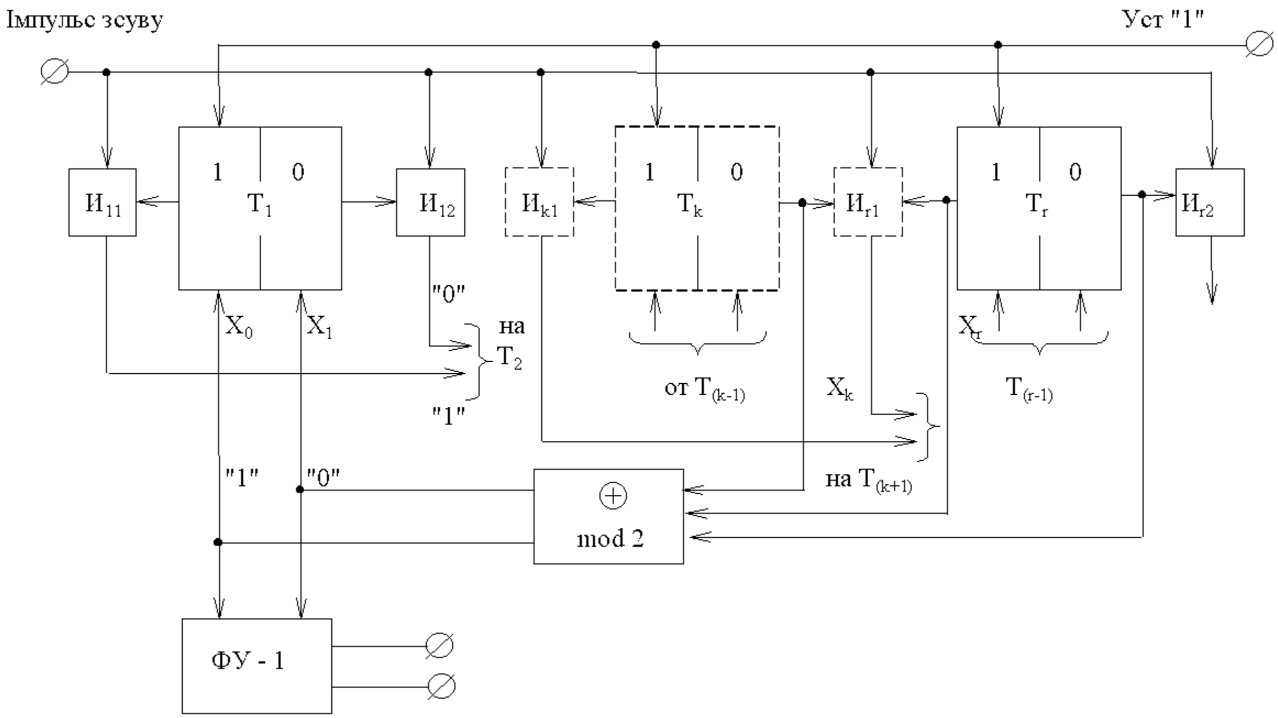
Або

$$x_0 = (D^3 \oplus D^2 \oplus D^0) = 0 \tag{6.19}$$

де $D^0 \cdot x_0 = x_0$, так як $D^0 = 1$.

Якщо $N = 3$, а сумуються сигнали з виходів T_1 і T_2, то схема описується виразом

$$x_0 (D^3 \oplus D^1 \oplus D^0) = x_0 \cdot Q[D]. \tag{6.20}$$



Імпульс зсуву
Уст "1"
И11
T1
1
0
И12
Иk1
Tk
Иr1
Tr
Иr2
X0
X1
"0"
"1"
на
T2
от T(k-1)
Xk
на T(k+1)
Xr
T(r-1)
mod 2
ФУ - 1

Рис. 2.5

Вираз

$$Q[D] = (D^r \oplus D^k \oplus D^0) \qquad (6.21)$$

називається характеристичним поліномом.

В ланцюзі зворотного зв'язку генератора може бути один або декілька суматорів по $\mod 2$. Тому характеристичний поліном може містити велике число операторів затримки D в відповідних степенях.

Вибір числа суматорів і точок підключення їхніх входів визначається тим, який сигнал потрібно отримати від генератора. Для отримання послідовності з максимальним періодом достатньо мати один суматор на два входи.

Якщо в схемі визначається і початок першого періоду, то вихідний сигнал буде суворо детермінованим. При цьому статистичні характеристики реалізації двійкових випадкових чисел і описаних ПМД тим не менше будуть співпадати.

Порівняємо ці послідовності. В випадковій послідовності зміна знаків сигналу відбувається в моменти $t_i = i \cdot T$. При рівній імовірності появи символів можна передбачити, що після $+U_C$ з імовірністю $P_1 = P_0 = 1/2$ з'явитися або нуль, або одиниця.

В послідовності максимальної довжини, оскільки вона включає всі можливі $N = 2^n - 1$ числа (окрім 00…0), буде 2^{n-1} одиниць і $(2^{n-1} - 1)$ нулів.

Ймовірності появи нулів і одиниць в псевдовипадковій послідовності (в середньому):

$$P_{11} = 1/2 + 1/2^{n-1}; \qquad (6.22)$$

$$P_{10} = 1/2 - 1/2^{n-1}. \qquad (6.23)$$

З формул (6.22), (6.23) видно, що при $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} P_{11} = \lim_{n\to\infty} P_{10} = \frac{1}{2}. \qquad (6.24)$$

Однакові також ймовірності появи серій з нулів і одиниць, що йдуть одне за одним.

Так, в випадковій послідовності серія з j одиниць (нулів) буде зустрічатися з ймовірністю

$$P_{j1} = (1/2)^{j+1} = 1/2^{j+1} \qquad (6.25)$$

В ПМД серії з однієї одиниці будуть зустрічатися 2^{n-2} раз, з двох одиниць – 2^{n-3} раз і так далі до серії з n n одиниць, що зустрінеться 1 раз. Тоді для серії з двох нулів (одиниць) ліворуч і праворуч можна записати

$$P_{0,0,0} = 2^{n-2} / 2^{n-1} \cong 1/2^2; \tag{6.26}$$

$$P_{1,1,1} = 2^{n-3} / 2^{n-1} \cong 1/2^3 \tag{6.27}$$

і т. п.

Автокореляційні функції (АКФ) випадкових вибірок з послідовностей максимальної довжини і «бінарного шуму» будуть відрізнятися зміщенням по осі ординат на величину

$$R(\infty) = u^2 / 2^{n-1}. \tag{6.28}$$

Це зв'язано з тим, що в ПМД відсутні числа вигляду 00…0 математичне очікування не дорівнює нулю. Вираз для АКФ має вигляд

$$R(\tau) = \begin{cases} u^2\left(1 - \dfrac{|\tau|}{T}\right), & |\tau| \le T, \\ \dfrac{u^2}{2^n - 1}, & |\tau| > T. \end{cases} \tag{6.29}$$

Графіки АКФ і спектральної щільності ПМД показані на рис. 6.6, а, б.

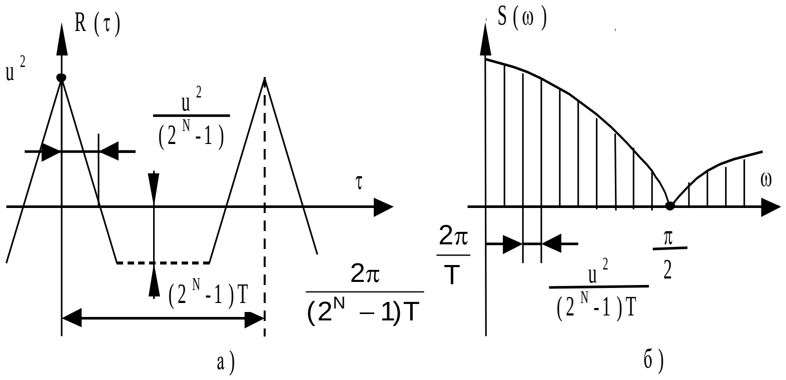


Рис. 6.6

Спектральна щільність ПМД

$$S(\omega) = \frac{2\pi * 2^{n+1}}{\left(2^n - 1\right)^2} \cdot \left(\frac{\sin(\omega T)}{\omega T}\right)^2 \times$$
$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{\left(2^n - 1\right)T}\right) + \frac{u^2}{2^n - 1}\delta(\omega). \tag{6.30}$$

З формул і графіків (див. рис. 6.6, б) видно, що спектральна щільність лінійчата з огинаючою вигляду $\sin(x)/x$.

Перший нуль відповідає частоті роботи тактового генератора $f_t = 1/T$. Таким чином, ширина спектру $\Delta f = 1/T$ визначається тривалістю окремого символу і залежить від тактового періоду генератора, а інтервал між елементами спектра $\Delta f = 1/T_n$,

де Тп = $\dfrac{2\pi k}{(2^n - 1)T}$, по шкалі частот дорівнює

$\Delta F = 1/(T(2^n - 1))$.

Він залежить від періоду послідовності $T_n = (2^n - 1)T$ і швидко спадає з зростанням числа каскадів регістра зсуву n. При $n \to \infty$ спектр прагне до суцільного, тобто ПМД зі зростанням n по своїм характеристикам швидко наближається до характеристик «бінарного шуму». При підвищенні частоти генератора імпульсів зсуву (зменшення T) спектр сигналу поширюється, наближаючись до спектру білого шуму. Саме ця обставина дозволяє використати псевдовипадкові послідовності як заміну сигналів з суцільним рівномірним спектром в заданому діапазоні частот.

Характеристичні поліноми дозволяють створювати генератори, що реалізуються у вигляді моделі на ЕОМ.

6.2. Програма дослідження цифрових генераторів шуму

Алгоритм програми дослідження цифрових генераторів шуму зображений на рис. 6.7.

В програмі реалізовані наступні цифрові генератори шуму:

1. Генератор випадкових чисел “ГВЧ1”, що відповідає формулам (6.12), (6.13). В даному випадку С=2, $A_0 = (22563)_8$;
2. Генератор псевдовипадкової бінарної послідовності “ГВЧ2”, що відповідає формулам (6.16), (6.17). В даному випадку n=7, r=7, k=4, а характеристичний багаточлен

$$Q[D] = (D^7 \oplus D^4). \tag{6.31}$$

Отже, період повторення псевдовипадкової бінарної послідовності буде рівний 127.

Автокореляційна функція обчислюється в припущенні стаціонарності і ергодичності процесу, що досліджується:

$$R_{xx}(k) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N-k} \sum_i \left(x(i)x(i+k)\right), \quad k = 0,1,\ldots,N-1. \tag{6.32}$$

де $x(i)$ – дискретні відліки шуму, $i = 1, 2, \ldots, N$ і = 1, 2 …, N, N –кількість випадкових чисел.

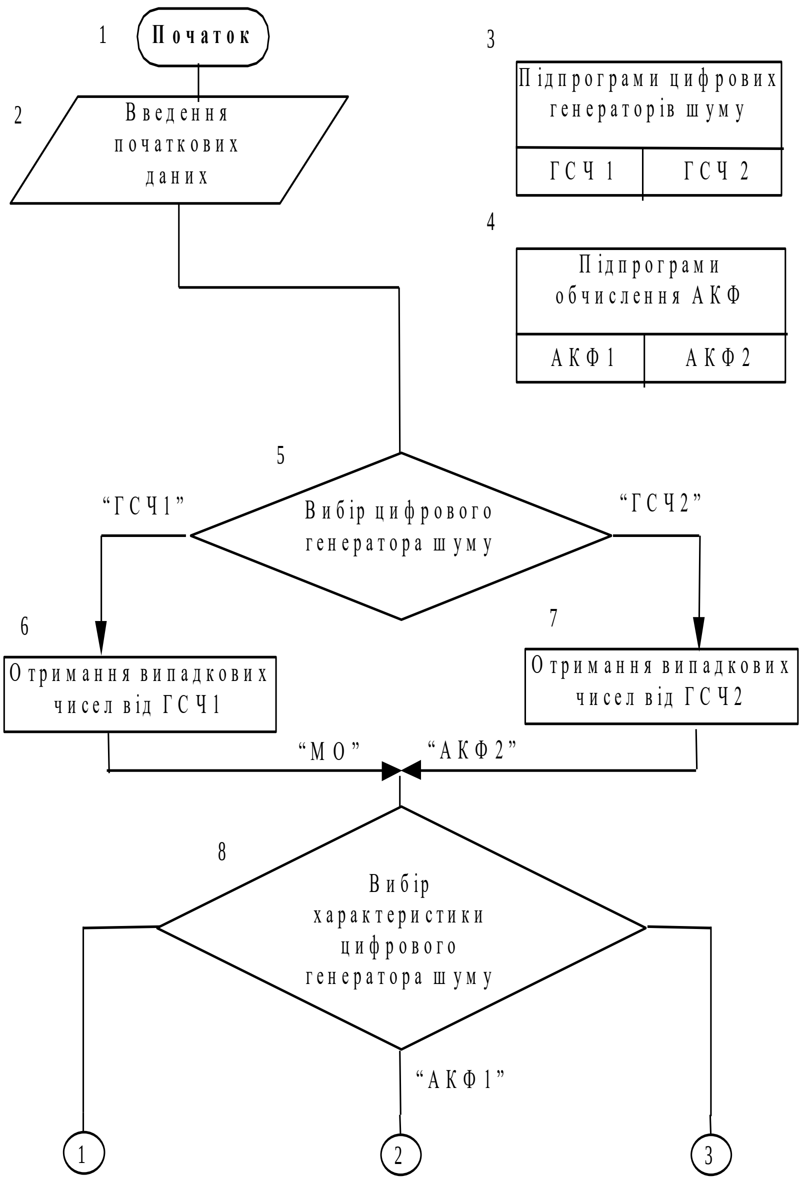


Рис. 6.7

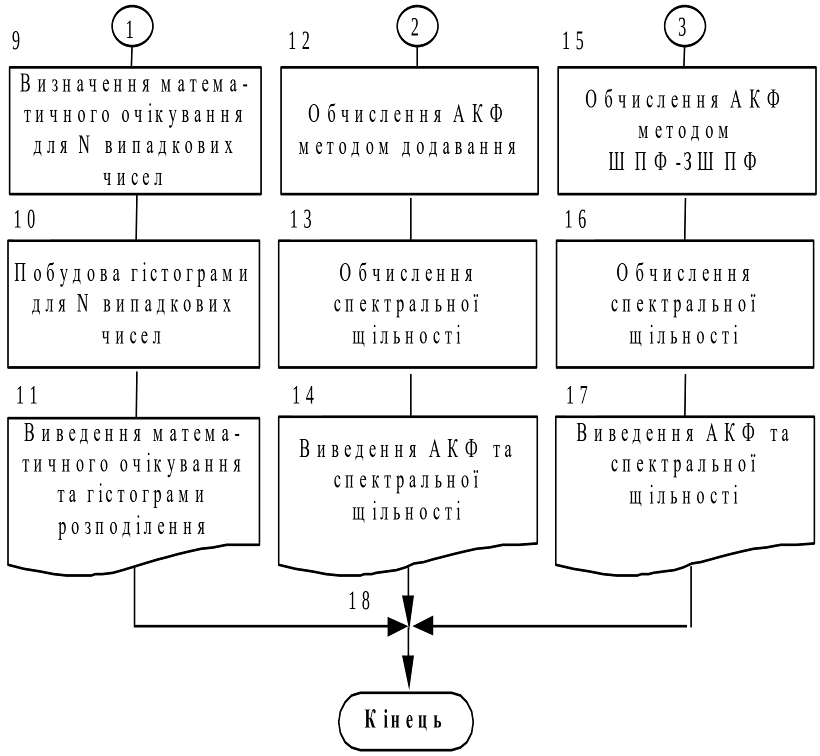


Рис. 6.7 (закінчення)

На практиці потрібно обмежуватися кінцевими вибірками процесів, що зумовлює перехід до близького алгоритму згідно формули

$$R_{xx}(k) = \frac{1}{N-k}\sum_{i=1}^{N-k}\bigl(x(i)x(i+k)\bigr), \quad k = 0,1,\ldots,N-1. \tag{6.33}$$

Ступінь наближення пропонується оцінити в ході виконання лабораторної роботи при розгляді різноманітних обсягів вибірки відліків шуму. Цей засіб обчислення АКФ позначимо «АКФ1».

Існують інші засоби обчислення АКФ. Так АКФ може бути знайдена по відомій спектральній щільності через зворотне перетворення Фур’є:

$$R_{xx}(\tau) = \Phi^{-1}\{S_{xx}(\omega)\}. \tag{6.34}$$

В свою чергу, спектральна щільність стаціонарних ергодичних процесів

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{T\to\infty} 1/T\{X_T(j\omega)\, X_T(-j\omega)\}, \tag{6.35}$$

де T – інтервал спостереження, T=NΔt.

$$X_T(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}dt \tag{6.36}$$

Обчислення інтегралів перетворення Фур’є на ЕОМ виконується по процедурі швидкого перетворення Фур’є (ШПФ):

$$X(m)=\sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j\omega k}=\sum_{k=0}^{N-1} x(k)\cos\left(\frac{mk2\pi}{N}\right)+$$
$$+j\sum_{k=0}^{N-1} x(k)\sin\left(\frac{mk2\pi}{N}\right)=\mathrm{Re}[X(m)]+j\,\mathrm{Im}[X(m)], \tag{6.37}$$

m = 0, 1, …, N-1.

Тоді для знаходження АКФ необхідно виконати для заданого обсягу вибірки спочатку пряме ШПФ, а після цього – зворотне ШПФ (ЗШПФ).

В підсумку приходимо до алгоритму

$S_{xx}(\omega)=X(j\omega)\,X^*(j\omega)$, (6.38)

де X(jω) – результат застосування процедури ШПФ до x (i);

X*(jω) – функція, комплесно-спряжена з X (jω).

Застосуванням ЗШПФ до $S_{xx}(\omega)$ з (6.38) одержуємо АКФ.

Цей засіб отримання АКФ позначимо «АКФ2».

Розглянемо отримання спектральної щільності процесу для кожного засобу обчислення АКФ:

АКФ1 – спектральна щільність одержується застосуванням процедури ШПФ до $R_{xx}(k)$ з (6.33);

АКФ2 – спектральна щільність є проміжним результатом при обчисленні АКФ (формула (6.38).

Початкові дані для програми:
– кількість відліків шуму;
– тип цифрового генератора шуму;
– засіб обчислення АКФ.

Вихідні дані програми:
– математичне очікування вибірки дискретних відліків шуму;
– гістограма розподілу дискретних сигналів шуму;
– АКФ;
– спектральна щільність.

6.3. Порядок виконання роботи

1. Вивчити теоретичні відомості, необхідні для виконання роботи.

2. Виконати попередній аналіз початкових даних індивідуального варіанту (табл. 6.1).

Для всіх варіантів використовуються генератори шуму “ГВЧ” і “ГВЧ1” і методи обчислення АКФ “АКФ1” і “АКФ2” (розділ 6.2).

3. Для генератора шуму “ГВЧ1” отримати математичне очікування значення випадкового числа і гістограму розподілу випадкових чисел в інтервалі 0 … 1. Розрахунки провести для трьох значень кількості випадкових чисел N1, N2 і N3. Заповнити таблицю 6.2.

4. Повторити пункт 3 для генератора шуму “ГВЧ2”. Заповнити таблицю 6.3.

5. Обчислити АКФ для генератора шуму “ГВЧ1” двома способами “АКФ1” і “АКФ2”. Кількість відліків чисел N = N3. Замалювати графіки АКФ.

6. Повторити пункт 5 для генератора шуму “ГВЧ2”. Замалювати графіки АКФ.

7. Отримати вибірку випадкових чисел із законом розподілу, вказаним у таблиці 6.1. Довжина вибірки N = N3. Побудувати гістограму розподілу значень випадкових чисел і автокореляційну функцію. Довідникові дані про закони розподілу випадкових величин наведено в додатку 5.

Таблиця 6.1

Варіант	Кількість відліків шуму			Закон розподілу випадкових величин
	N1	N2	N3	
1	16	128	512	Нормальний
2	16	64	256	Рівномірний
3	32	256	102 4	Нормальний
4	32	128	256	Рівномірний
5	64	256	512	Нормальний
6	64	512	102 4	Рівномірний
7	16	128	512	Нормальний
8	16	64	256	Рівномірний
9	32	256	102 4	Нормальний
10	32	128	256	Рівномірний
11	64	256	512	Нормальний
12	64	512	102 4	Рівномірний
13	16	128	512	Нормальний
14	16	64	256	Рівномірний
15	32	256	102 4	Нормальний
16	32	128	256	Рівномірний
17	64	256	512	Нормальний
18	64	512	102 4	Рівномірний
19	16	128	512	Нормальний
20	16	64	256	Рівномірний
21	32	256	102 4	Нормальний
22	32	128	256	Рівномірний
23	64	256	512	Нормальний
24	64	512	102 4	Рівномірний
25	16	128	512	Нормальний

26	16	64	256	Рівномірний
27	32	256	102 4	Нормальний
28	32	128	256	Рівномірний
29	64	256	512	Нормальний
30	64	512	102 4	Рівномірний

Таблиця 6.2

Характеристика генератора	Кількість відліків шуму		
	N1	N2	N3
Математичне очікування амплітуди шуму			
Кількість відліків шуму на інтервалі: 0,0 …0,1 0,1 …0,2 0,2 …0,3 0,3 …0,4 0,4 …0,5 0,5 …0,6 0,6 …0,7 0,7 …0,8 0,8 …0,9 0,9 …1,0			

Таблиця 6.3

Характеристика генератора	Кількість відліків шуму		
	N1	N2	N3
Математичне очікування амплітуди шуму			
Кількість відліків шуму із значенням: +1 -1			

8. Повторити п. 7, додатково пропустивши випадковий процес (послідовність випадкових чисел) через фільтр нижніх частот з прямокутною смугою перепускання.

9. Повторити п. 8 для фільтрів з АЧХ в формі кривої Гаусса і експоненціальною АЧХ.

6.5. Контрольні питання

1. Назвіть засоби отримання випадкових чисел.

2. Які умови необхідно виконати для отримання випадкових чисел з рівномірним розподілом?

3. Назвіть основні засоби формування розрядів випадкових двійкових чисел в ГВЧ.

4. Проведіть порівняльний аналіз паралельних і послідовних ГВЧ.

5. Назвіть основні алгоритми отримання випадкових чисел на ЕОМ.

6. Чим викликана необхідність переходу від випадкових чисел до псевдовипадкових послідовностей? Які умови при цьому необхідно виконати?

7. Намалюйте структурну схему і пояснити принцип роботи генератора нуль - послідовності максимальної довжини (НПМД). Характеристичний поліном $Q=D3\oplus D$; число розрядів регістру зсуву $N = 3$.

8. Визначить період повторення, кількість нулів і одиниць, що виробляються за період, для генератора НПМД, побудованого на регістрі зсуву, що містить 7 розрядів.

9. Визначить імовірності появи нулів і одиниць для генератора НПМД з числом розрядів регістру зсуву $N = 4$.

10. Який вигляд має АКФ для генератора НПМД?

11. Перетворіть формулу для визначення АКФ таким чином, щоб число випадкових чисел, що складуться було постійним, використовуючи при цьому властивість періодичності псевдовипадкової послідовності. Обгрунтуйте це перетворення.

12. Як отримати АКФ, використовуючи пряме і зворотне перетворення Фур'є?