**Лекція**

**Швидке перетворення Фур'є**

**Матрична реалізація БПФ**

За допомогою ДПФ відповідно до формули $\dot{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$ вхідний вектор дискретних відліків трансформується у вектор спектральних коефіцієнтів. Перетворення реалізується як множення деякої квадратної матриці на вхідний вектор-стовпець: $y=A\cdot x$, де $A$ – матриця перетворення (рис.1). Загальна формула для елемента матриці, розташованого в $n$-стовпці $k$-рядка: $A(k,n)=e^{-j2\pi\frac{(k-1)(n-1)}{N}}$, де $k=1\ldots N, n=1\ldots N$...

$$\begin{vmatrix}\dot{X}(0)\\ \dot{X}(1)\\ \dot{X}(2)\\ \dot{X}(3)\\ \ldots\ldots\\ \dot{X}(N-1)\end{vmatrix}=\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1\\ \hline 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}1\cdot1} & e^{-j\frac{2\pi}{N}1\cdot2} & e^{-j\frac{2\pi}{N}1\cdot3} & \ldots & e^{-j\frac{2\pi}{N}1(N-1)}\\ \hline 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}2\cdot1} & e^{-j\frac{2\pi}{N}2\cdot2} & e^{-j\frac{2\pi}{N}2\cdot3} & \ldots & e^{-j\frac{2\pi}{N}2(N-1)}\\ \hline 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}3\cdot1} & e^{-j\frac{2\pi}{N}3\cdot2} & e^{-j\frac{2\pi}{N}3\cdot3} & \ldots & e^{-j\frac{2\pi}{N}3(N-1)}\\ \hline \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \hline 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)1} & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)2} & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)3} & \ldots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)(N-1)}\\ \hline\end{array}\begin{vmatrix}x(0)\\ x(1)\\ x(2)\\ x(3)\\ \ldots\\ x(N-1)\end{vmatrix}$$

*Рис.1 Матричне ДПФ*

Наприклад, для ДПФ-8 вираження має вигляд: $\dot{X}(k)=\sum_{n=0}^{7}x(n)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{8}nk}$, $k=0,\ldots,7$... Позначимо $K=2\pi k/8$. Тоді

$$\dot{X}(k)=x(0)e^{-jK0}+x(1)e^{-jK1}+x(2)e^{-jK2}+x(3)e^{-jK3}+\ldots+x(7)e^{-jK7}.$$

**ШПФ із проріджуванням за часом**

$$\dot{X}(k)=\sum_{m=0}^{N/2-1}x(2m)\cdot W_N^{2mk}+\sum_{m=0}^{N/2-1}x(2m+1)\cdot W_N^{(2m+1)k}=$$

$$=\sum_{m=0}^{N/2-1}x(2m)\cdot W_N^{2mk}+W_N^k\sum_{m=0}^{N/2-1}x(2m+1)\cdot W_N^{2mk}=\sum_{m=0}^{N/2-1}x(2m)\cdot W_{N/2}^{mk}+W_N^k\sum_{m=0}^{N/2-1}x(2m+1)\cdot W_{N/2}^{mk}$$

$$\dot{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cdot W_N^{kn}\ ,\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ N\text{-}1\ldots$$

При цьому $W_N^2=e^{-j2\frac{2\pi}{N}}=e^{-j\frac{2\pi}{N/2}}=W_{N/2}$.



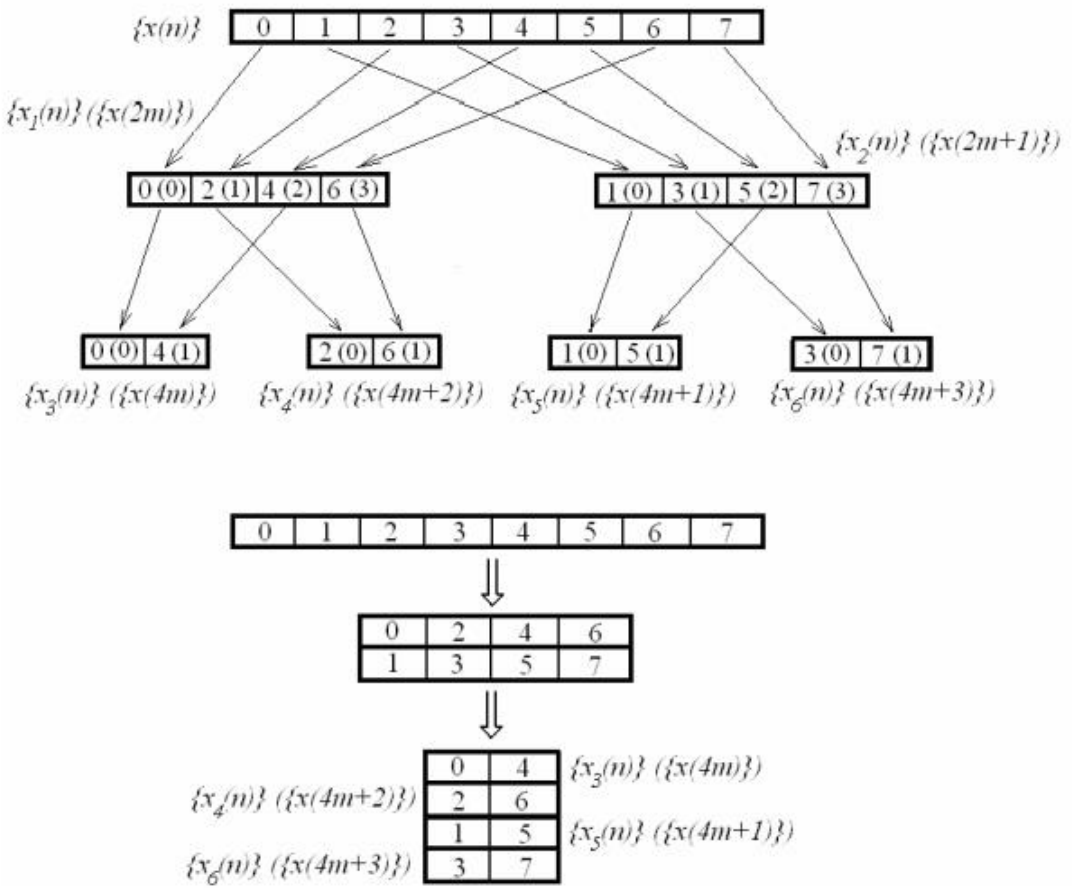



*Рис.2 Перетворення вхідного вектора відліків відповідно до алгоритму с децимацією за часом*

$$\dot{X}\left(k+\frac{N}{2}\right)=\dot{X}_1\left(k+\frac{N}{2}\right)+W_N^{\left(k+\frac{N}{2}\right)}\dot{X}_2\left(k+\frac{N}{2}\right).$$

$$W_N^{(k+N/2)}=W_N^kW_N^{N/2}=W_N^ke^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)\left(\frac{N}{2}\right)}=W_N^ke^{-j\pi}=-W_N^k,\ (e^{-j\pi}=(-1))\ ,$$

$$W_N^{(k-N/2)}=W_N^kW_N^{-N/2}=\frac{W_N^k}{e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)\left(\frac{N}{2}\right)}}=-W_N^k.$$

З обліком цього: $\dot{X}\left(k+\frac{N}{2}\right)=\dot{X}_1(k)-W_N^k\dot{X}_2(k).$

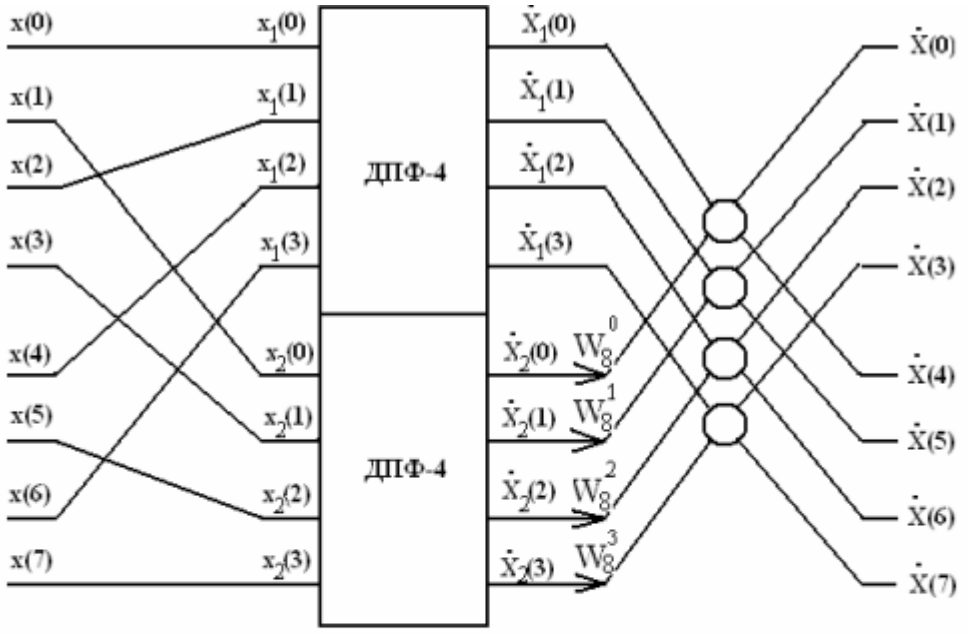



*Рис.3 Приклад обчислення ШПФ-8 із проріджуванням за часом*

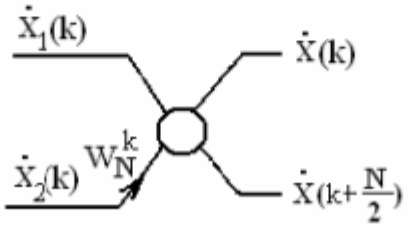



*Рис.4 "Метелик" ШПФ із децимацією за часом*

$$\dot{X}_1(k) = \dot{X}_3(k) + W_{N/2}^{k}\,\dot{X}_4(k) = \dot{X}_3(k) + W_N^{2k}\,\dot{X}_4(k),$$

$$\dot{X}_1\left(k+\frac{N}{4}\right) = \dot{X}_3(k) - W_N^{2k}\,\dot{X}_4(k).$$

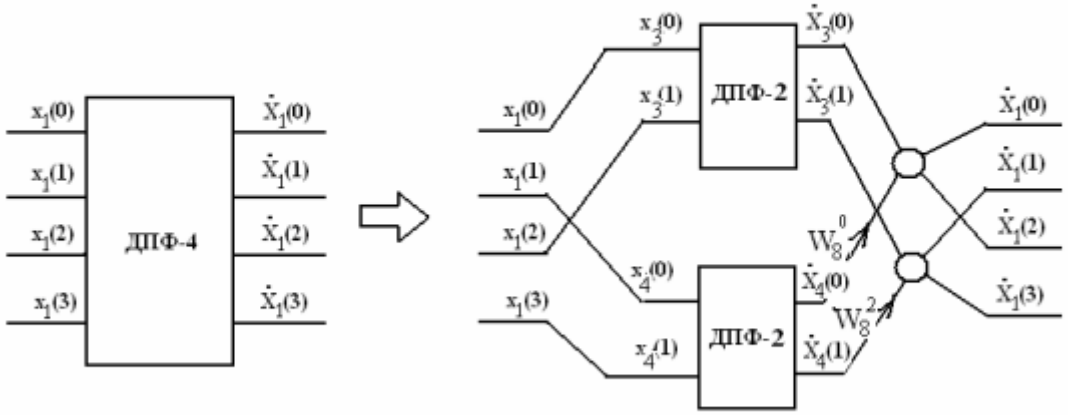



*Рис.5 Перетворення ШПФ-4*

Перетворення блоку "ДПФ-2": $\dot{X}_3(k)=\sum_{n=0}^{1}x_3(n)W_2^{nk}$ .

$$\dot{X}_3(0)=x_3(0)W_2^0+x_3(1)W_2^0$$

$$\dot{X}_3(1)=x_3(0)W_2^0+x_3(1)W_2^1$$

З обліком того, що $W_2^0=1$ та $W_2^4=-1$, після перетворення маємо:

$$\dot{X}_3(0)=x_3(0)+x_3(1)=x_3(0)+W_8^0x_3(1),$$

$$\dot{X}_3(1)=x_3(0)-x_3(1)=x_3(0)-W_8^0x_3(1).$$

Таким чином, ДПФ-2 – це метелик, у якому W=1 (рис.6).

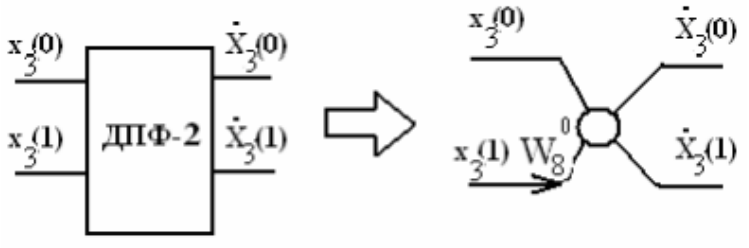



*Рис.6 Перетворення ШПФ-2*

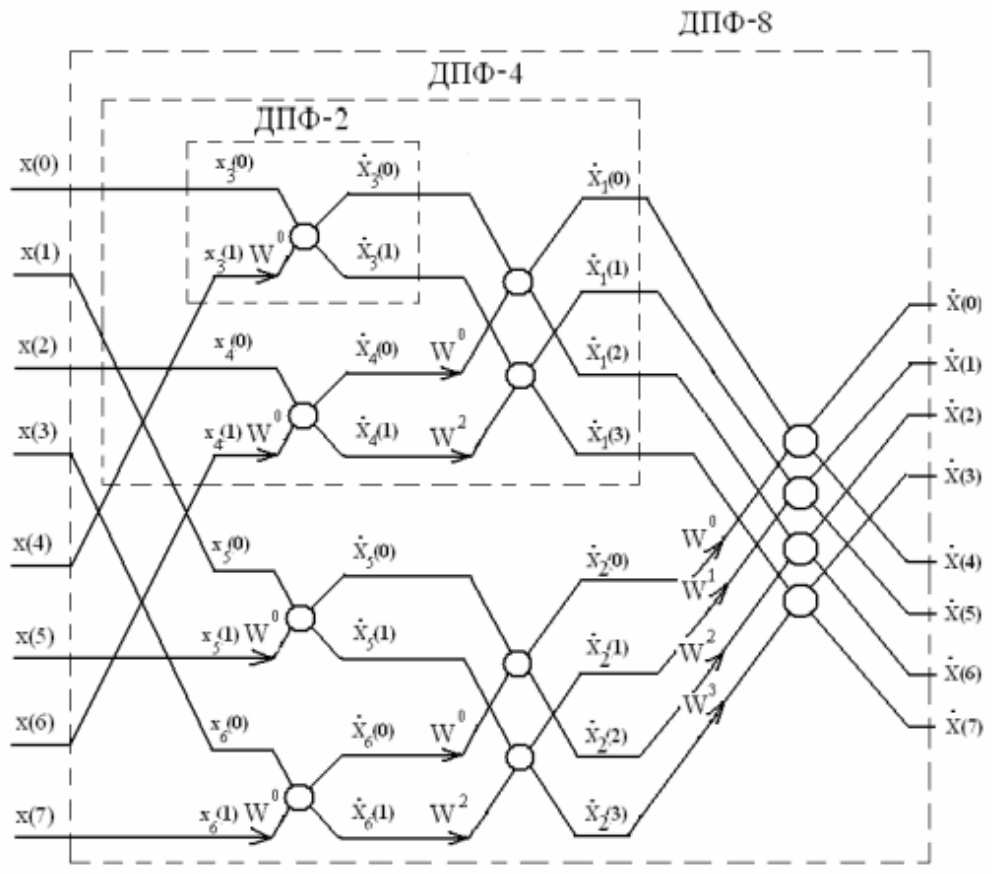



*Рис.7 ШПФ-8 з послідовною децимацією за часом в 2 рази*

Алгоритм **зворотного ШПФ** аналогічний алгоритму прямого ШПФ. Для цього досить поміняти в наведених формулах знак у показниках комплексних експонент і додати, якщо буде потреба, розподіл на N:

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\dot{X}(k)\cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\dot{X}(k)\cdot W_N^{-kn}=$$

$$=\frac{1}{N}\left[\sum_{m=0}^{N/2-1}\dot{X}(2m)\cdot W_N^{-2mn}+\sum_{m=0}^{N/2-1}\dot{X}(2m+1)\cdot W_N^{-(2m+1)n}\right]=$$

$$=\frac{1}{N}\left[\sum_{m=0}^{N/2-1}\dot{X}(2m)\cdot W_{N/2}^{-mn}+W_N^{-n}\sum_{m=0}^{N/2-1}\dot{X}(2m+1)\cdot W_{N/2}^{-mn}\right]$$

## ШПФ із проріджуванням за частотою

$$\dot{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}=\sum_{n=0}^{N/2-1}x(n)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}+\sum_{n=N/2}^{N-1}x(n)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}=$$

$$=\sum_{m=0}^{N/2-1}x(m)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}mk}+\sum_{m=0}^{N/2-1}x\left(m+\frac{N}{2}\right)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}\left(m+\frac{N}{2}\right)k}$$

У другій сумі є множник $e^{-j\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}k}=e^{-j\pi k}=(-1)^k$. У такий спосіб:

$$\dot{X}(k)=\sum_{m=0}^{N/2-1}x(m)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}mk}+(-1)^k\sum_{m=0}^{N/2-1}x\left(m+\frac{N}{2}\right)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}mk}=$$

$$=\sum_{m=0}^{N/2-1}x(m)\cdot W_N^{mk}+(-1)^k\sum_{m=0}^{N/2-1}x\left(m+\frac{N}{2}\right)\cdot W_N^{mk}=\sum_{m=0}^{N/2-1}\left[x(m)+(-1)^k x\left(m+\frac{N}{2}\right)\right]\cdot W_N^{mk}$$

Після об'єднання обох сум:

- для парних гармонік: $\dot{X}(2k)=\sum_{m=0}^{N/2-1}\left(x(m)+x\left(m+\frac{N}{2}\right)\right)\cdot W_{N/2}^{mk}$,

- для непарних гармонік:

$$\dot{X}(2k+1)=\sum_{m=0}^{N/2-1}\left(x(m)-x\left(m+\frac{N}{2}\right)\right)\cdot W_N^{(2k+1)m}=\sum_{m=0}^{N/2-1}\left[\left(x(m)-x\left(m+\frac{N}{2}\right)\right)\cdot W_N^{m}\right]\cdot W_{N/2}^{mk},$$

$k$=0, …, $N$/2-1

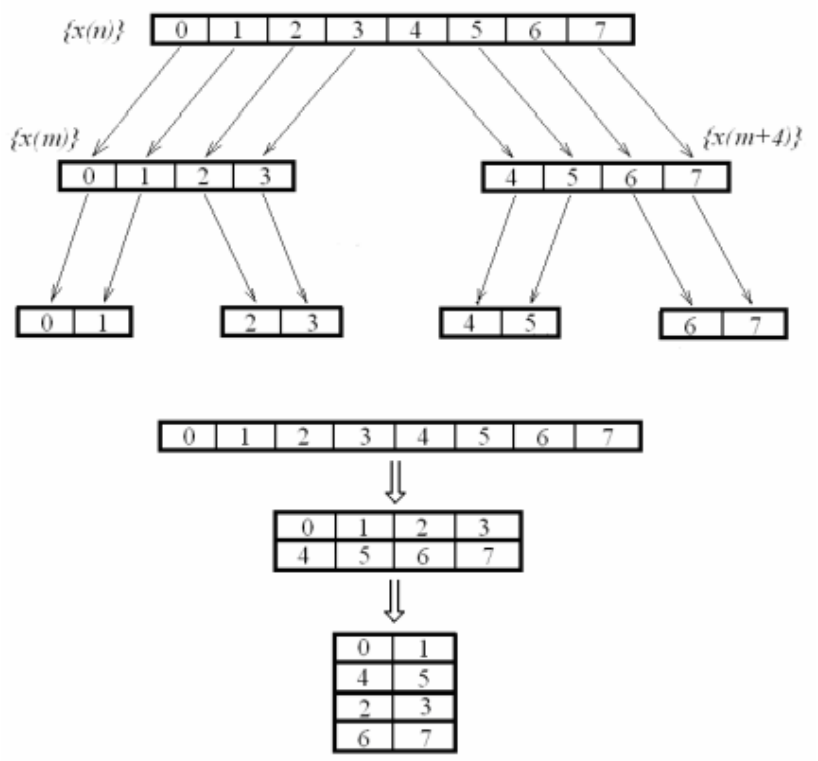



*Рис.8 Перетворення вхідного вектора відліків відповідно до алгоритму с децимацією за частотою*

$$x_1(m) = x(m) + x\left(m + \frac{N}{2}\right), \qquad x_2(m) = \left(x(m) - x\left(m + \frac{N}{2}\right)\right) W_N^m .$$

$$\dot{X}(2k) = \dot{X}_1(k) = \sum_{m=0}^{N/2-1} x_1(m) \cdot W_{N/2}^{mk} ,$$

$$\dot{X}(2k+1) = \dot{X}_2(k) = \sum_{m=0}^{N/2-1} x_2(m) \cdot W_{N/2}^{mk} ,$$

$k$=0,…,$N$/2-1...

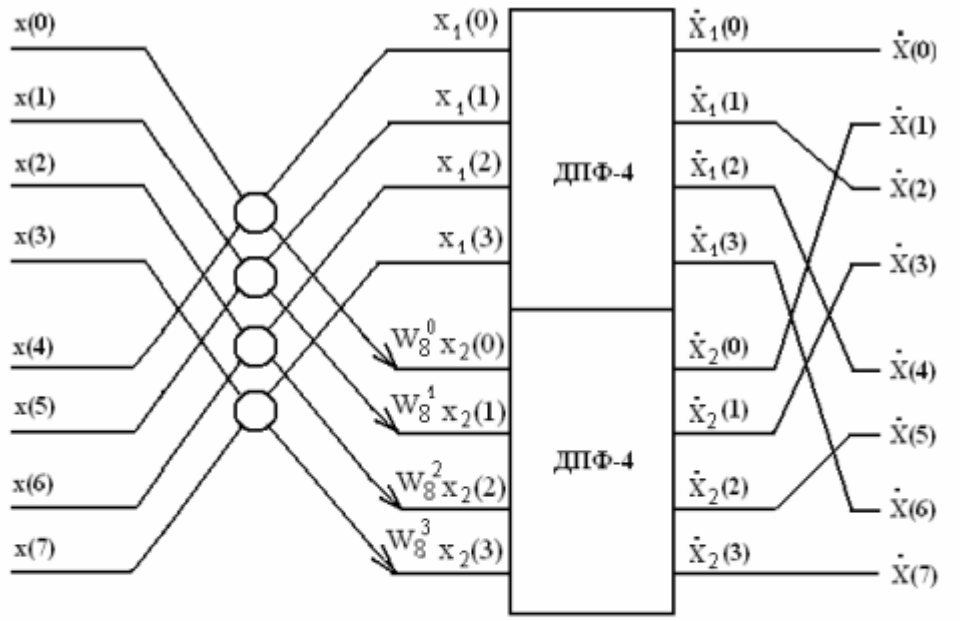



*Рис.9 Приклад обчислення ШПФ-8 з децимацією за частотою*

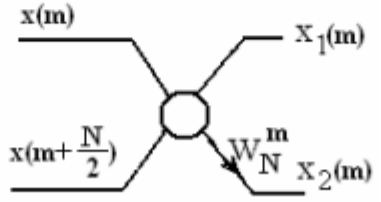



*Рис.10 "Метелик" ШПФ із децимацією за частотою*

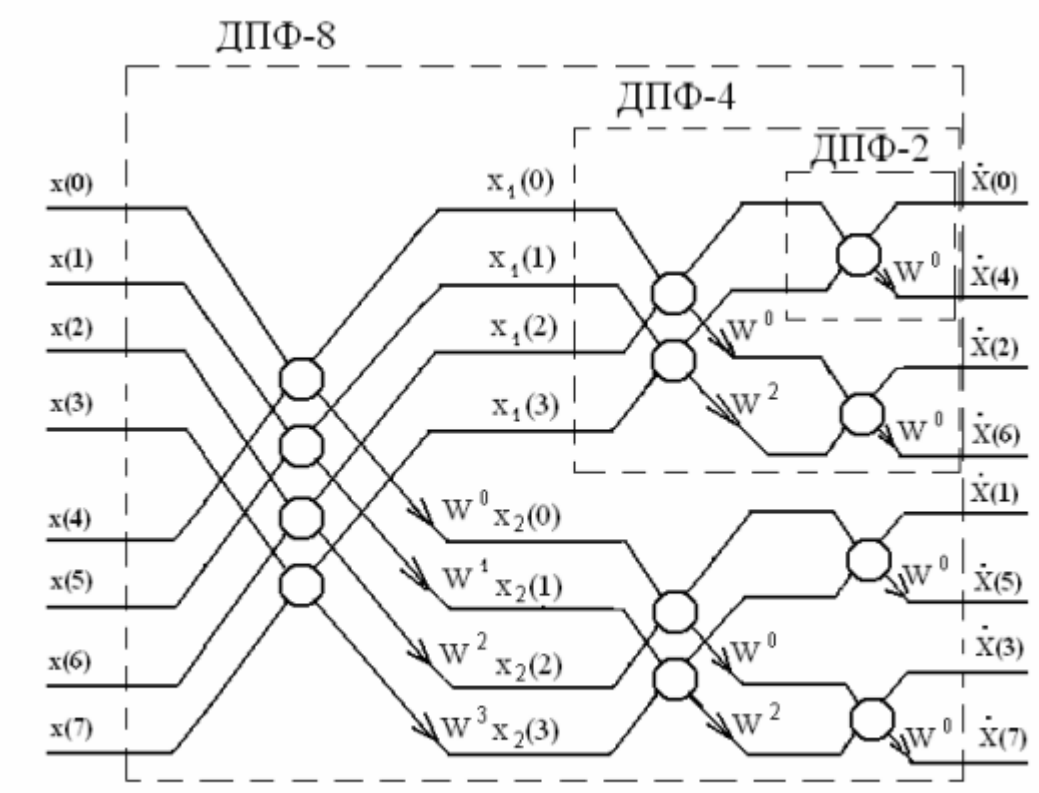



*Рис.11 ШПФ-8 з послідовною децимацією за частотою в 2 рази*

Для **зворотного ШПФ із децимацією за частотою:**

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\dot{X}(k)\cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk}=\frac{1}{N}\left[\sum_{k=0}^{N/2-1}\dot{X}(k)\cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk}+\sum_{k=N/2}^{N-1}\dot{X}(k)\cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk}\right]=$$

$$=\frac{1}{N}\left[\sum_{m=0}^{N/2-1}\dot{X}(m)\cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nm}+\sum_{m=0}^{N/2-1}\dot{X}\left(m+\frac{N}{2}\right)\cdot e^{j\frac{2\pi}{N}n\left(m+\frac{N}{2}\right)}\right]$$

У результаті:

- для парних відліків: $x(2n)=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N/2-1}\left[\dot{X}(m)+\dot{X}\left(m+\frac{N}{2}\right)\right]\cdot W_{N/2}^{-nm}$,

- для непарних відліків: $x(2n+1)=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N/2-1}\left[\left(\dot{X}(m)-\dot{X}\left(m+\frac{N}{2}\right)\right)\cdot W_{N}^{-m}\right]\cdot W_{N/2}^{-nm}$,

$k$=0, …, $N$/2-1