## Лекція

## Дискретне перетворення Фур'є

Для переведення сигналів, які представлені *дискретними* значеннями (відліками), у частотну форму та зворотно застосовують *Дискретне Перетворення Фур'є (ДПФ або DFT)*.

Теоретичною основою ДПФ є спектральна щільність дискретного сигналу. При цьому спектральну щільність необхідно представити у вигляді дельта-функцій з відповідними множниками і затримками:

$$\dot{S}_д(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}s_Д(t)\cdot e^{-j\omega\cdot t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\delta(t-nT_s)\right]\cdot e^{-j\omega\cdot t}dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)\cdot e^{-j\omega\cdot t}dt .$$

Оскільки спектр дельта-функції дорівнює одиниці, а затримка сигналу в часі (t-nTs) приводить до множення спектра на комплексну експоненту затримки, те: $\dot{S}_д(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\cdot e^{-j\omega nT_s}$.

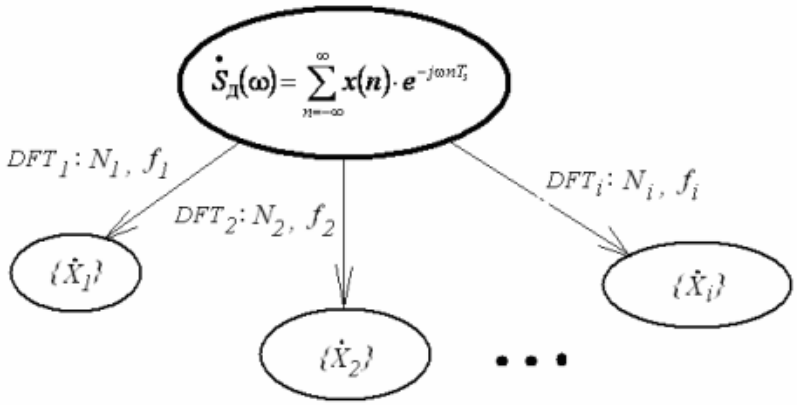



*Рис.1 Вибір коефіцієнтів з безлічі щільності*

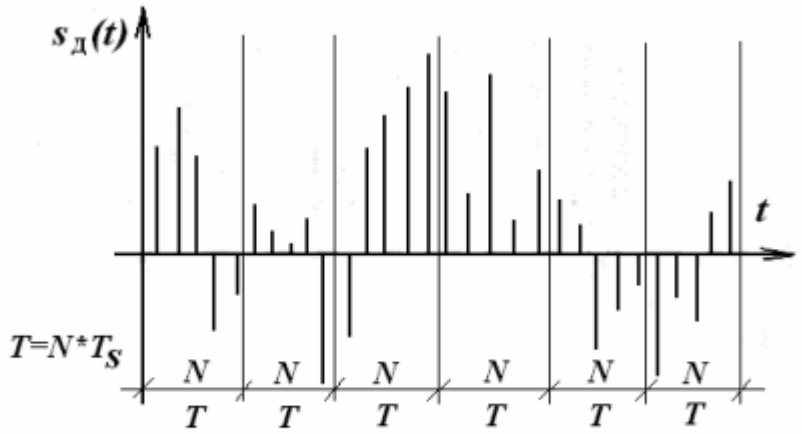



*Рис.2 Розбивка сигналу, який дискретизовано, на інтервали відповідно до розміру ДПФ*

$$\dot{X}(k)=\frac{1}{T}\int_0^T s_Д(t)\cdot e^{-jk\omega t}dt=\frac{1}{T}\int_0^T\left[\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cdot\delta(t-nT_s)\right]e^{-jk\omega t}dt=$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\int_0^T\delta(t-nT_s)\cdot e^{-jk\omega t}dt=\frac{1}{T}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cdot e^{-jk\omega nT_s}=$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{T}nT_s}=\frac{1}{T_s\cdot N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Дискретне перетворення Фур'є (ДПФ)

$$\dot{X}(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn},\quad k=0,1,\ldots(N\text{-}1).$$

Зворотне дискретне перетворення Фур'є

$$x(n)=\sum_{k=0}^{N-1}\dot{X}(k)\cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kn},\quad n=0,1,\ldots(N\text{-}1)\ldots$$

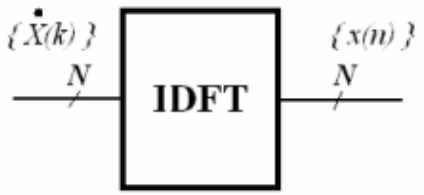



*Рис.4 Умовне графічне позначення зворотного ДПФ*

**Форми запису ДПФ**

$$\dot{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn};\quad x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\dot{X}(k)\cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$\dot{X}(k)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn};\quad x(n)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1}\dot{X}(k)\cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kn}.$$

$$\dot{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cdot\left[\cos(2\pi kn/N)-j\sin(2\pi kn/N)\right].$$

Оскільки $\cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right)=\cos(\omega t)=\cos(2\pi ft)=\cos(2\pi f_k t_n)=\cos(2\pi f_k nT_s)$,

те $\frac{2\pi}{N}kn=2\pi f_k nT_s$, що справедливо й для синусоїдальної складової.

Отже, $f_k=\frac{1}{NT_s}k=k\frac{f_s}{N}$ - частота гармоніки $k$, тобто $\dot{X}(k)=\dot{S}\left(k\frac{\omega_s}{N}\right)$.

Приклад

- $\dot{X}(0)$: $f_0 = 0 \cdot (16000/16) = 0$кГц,
- $\dot{X}(1)$: $f_1 = 1 \cdot (16000/16) = 1$кГц,
- $\dot{X}(2)$: $f_2 = 2 \cdot (16000/16) = 2$кГц,

. . .

- $\dot{X}(8)$: $f_8 = 8 \cdot (16000/16) = 8$кГц,

. . .

- $\dot{X}(14)$: $f_{14} = 14 \cdot (16000/16) = 14$кГц,
- $\dot{X}(15)$: $f_{15} = 15 \cdot (16000/16) = 15$кГц

**Наприклад**. У результаті цифрування на частоті $f_s = 8$кГц одного періоду сигналу отримані відліки: $x(0)$=0,3536, $x(1)$=0,3536, $x(2)$=0,6464, $x(3)$=1,0607, $x(4)$=0,3536, $x(5)$=-1,0607, $x(6)$=-1,3536, $x(7)$=-0,3536.

Результат ДПФ ($N$=8):

$$\dot{X}(0) = \sum_{n=0}^{7} x(n)\left[\cos(2\pi 0n/8) - j\sin(2\pi 0n/8)\right] = \sum_{n=0}^{7} x(n)\left[\cos(2\pi 0n/8)\right] = \sum_{n=0}^{7} x(n) = 0.$$

$$\dot{X}(1) = \sum_{n=0}^{7} x(n)\cdot\left[\cos(2\pi 1n/8) - j\sin(2\pi 1n/8)\right] =$$

$$= x(0)\cdot\left[\cos(2\pi 1\cdot 0/8) - j\sin(2\pi 1\cdot 0/8)\right] + x(1)\cdot\left[\cos(2\pi 1\cdot 1/8) - j\sin(2\pi 1\cdot 1/8)\right] +$$

$$+ x(2)\cdot\left[\cos(2\pi 1\cdot 2/8) - j\sin(2\pi 1\cdot 2/8)\right] + .... + x(7)\cdot\left[\cos(2\pi 1\cdot 7/8) - j\sin(2\pi 1\cdot 7/8)\right] =$$

$$= 0.0 - j4.0 = 4\cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$\dot{X}(2) = \sum_{n=0}^{7} x(n)\cdot\left[\cos(2\pi 2n/8) - j\sin(2\pi 2n/8)\right] = 1.414 + j1.414 = 2\cdot e^{j\frac{\pi}{4}}.$$

$$\dot{X}(3) = \sum_{n=0}^{7}\left[x(n)\cdot\cos(2\pi 3n/8) - j\cdot x(n)\cdot\sin(2\pi 3n/8)\right] = 0.0 - j0.0\ .$$

$$\dot{X}(4) = \sum_{n=0}^{7}\left[x(n)\cdot\cos(2\pi 4n/8) - j\cdot x(n)\cdot\sin(2\pi 4n/8)\right] = 0.0 - j0.0.$$

$$\dot{X}(5) = \sum_{n=0}^{7}\left[x(n)\cdot\cos(2\pi 5n/8) - j\cdot x(n)\cdot\sin(2\pi 5n/8)\right] = 0.0 + j0.0.$$

$$\dot{X}(6) = \sum_{n=0}^{7}\left[x(n)\cdot\cos(2\pi 6n/8) - j\cdot x(n)\cdot\sin(2\pi 6n/8)\right] = 1.414 - j1.414 = 2\cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}.$$

$$\dot{X}(7) = \sum_{n=0}^{7} x(n)\cdot\left[\cos(2\pi 7n/8) - j\sin(2\pi 7n/8)\right] = 0.0 + j4.0 = 4\cdot e^{j\frac{\pi}{2}}\ .$$

Для ДПФ справедливо: $\left|\dot{X}(k)\right| = \sqrt{\dot{X}^2_{Re}(k) + \dot{X}^2_{Im}(k)}$ - модулі гармонійних складових (амплітудний спектр), $\dot{X}_{\varphi}(k) = \arctan\left(\dot{X}_{Im}(k) \Big/ \dot{X}_{Re}(k)\right)$ - фазовий кут гармонік відносно косинусоїди відповідної частоти (фазовий спектр), $\dot{X}_{PS}(k) = \left|\dot{X}(k)\right|^2$ - потужність спектра.

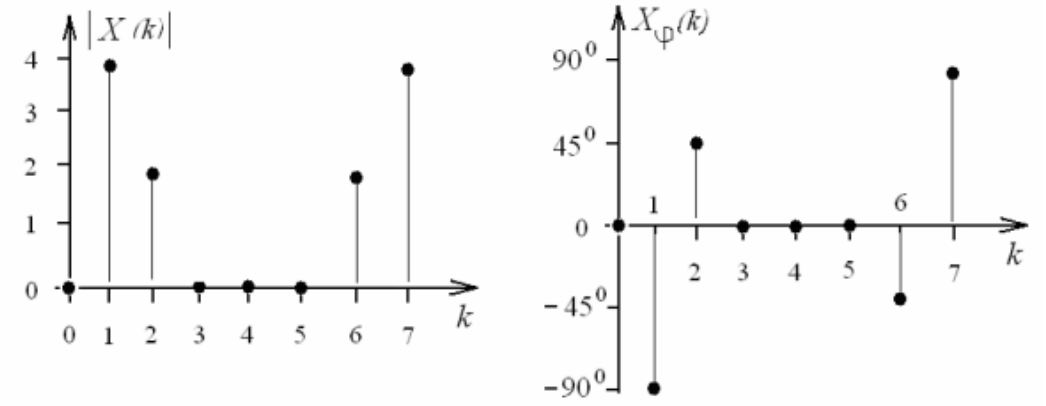



*Рис.5 Амплітудний і фазовий спектри*

## 2. Властивості ДПФ

**1. Періодичність.** Дискретний спектр періодичний, а один період спектра містить $N$ гармонік. Це слідує з вираження:

$$\dot{X}(k+N)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+N)n}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}Nn}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}=\dot{X}(k).$$

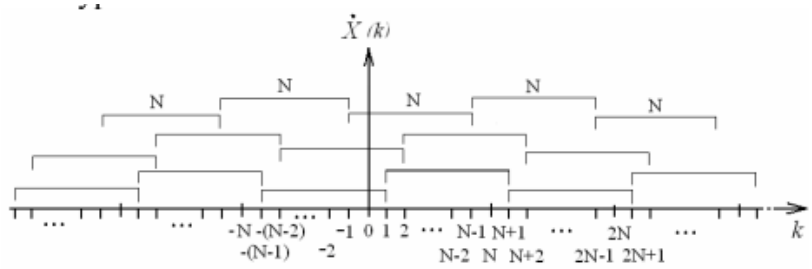



*Рис.6 Періодичність спектра (k=0...( N-1) - основні коефіцієнти)*

**2. Симетричність**.

$$\dot{X}(N-k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-k)n}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}Nn}\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}(-k)n}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}(-k)n}=\dot{X}(-k).$$

Амплітудний спектр дійсного сигналу з парною кількістю відліків є сполучено-симетричним відносно $k=N/2$, а частота гармоніки дорівнює половині частоти дискретизації, що відповідає критерію Найквіста.

Наприклад, для ДПФ-8 ($N$=8, $f_s$=8кГц): Коефіцієнт $\dot{X}(4)$ відповідає гармоніці із частотою 4кГц і дорівнює

$$\dot{X}(4)=x(0)-x(1)+x(2)-x(3)+x(4)-x(5)+x(6)-x(7).$$

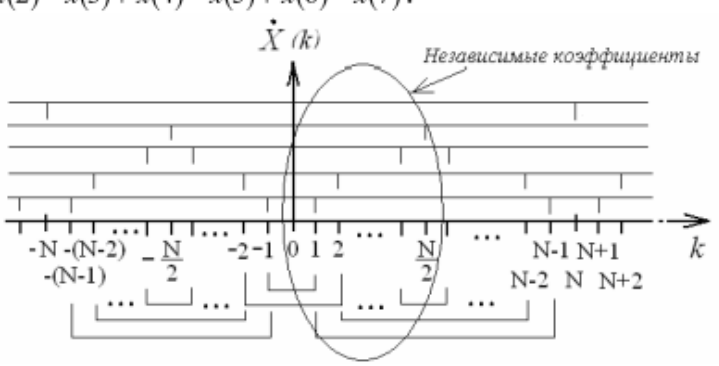



*Рис.7 Симетричність і періодичність спектра*

**3. Модульність.** Якщо у вхідному сигналі, який представлений дійсними числами, є присутнім синусоїдальний компонент $s_i\ (t)$ з амплітудою $A_i$ і періодом, який целочисельно кратний інтервалу з $N$ відліків, то модуль відповідного спектрального коефіцієнта ДПФ дорівнює $\left|\dot{X}(i)\right| = \frac{A_i}{2} N$, а при наявності у формулі множника $1/N$ перед сумою - $\left|\dot{X}(i)\right| = \frac{A_i}{2}$.

Якщо на вхід ДПФ надходить комплексна синусоїда з амплітудою $\mathrm{A_i} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ при цілій кількості періодів на $N$ відліках, то модуль відповідного коефіцієнта ДПФ дорівнює $\left|\dot{X}(i)\right| = A_i \cdot N$, а при наявності у формулі множника $1/N$ перед сумою - $\left|\dot{X}(i)\right| = A_i$. Таким чином, має місце:

| $\left\|\dot{X}(i)\right\|$ | Є присутнім 1/N | Відсутній 1/N |
|---|---|---|
| Комплексний сигнал | $\mathrm{A_i}$ | $\mathrm{A_i} \cdot \mathrm{N}$ |
| Дійсний сигнал | $\frac{\mathrm{A_i}}{2}$ | $\frac{\mathrm{A_i}}{2} \cdot \mathrm{N}$ |

**Наприклад**, по завершенні ДПФ деякого сигналу $s(t)$ отримані амплітудний і фазовий спектри (рис.5). Відомо, що частота дискретизації дорівнює $f_s = 8\text{кГц}$, а розмір ДПФ $N$=8.

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) + \ldots + s_i(t) + \ldots = A_0 + \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cdot \cos\left(2\pi f_i t + \varphi_i\right) .$$

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) = A_1 \cdot \cos\left(2\pi 1000 t + \varphi_1\right) + A_2 \cdot \cos\left(2\pi 2000 t + \varphi_2\right).$$

$$s(t) = \cos\left(2\pi 1000 t - \frac{\pi}{2}\right) + 0.5 \cdot \cos\left(2\pi 2000 t + \frac{\pi}{4}\right).$$

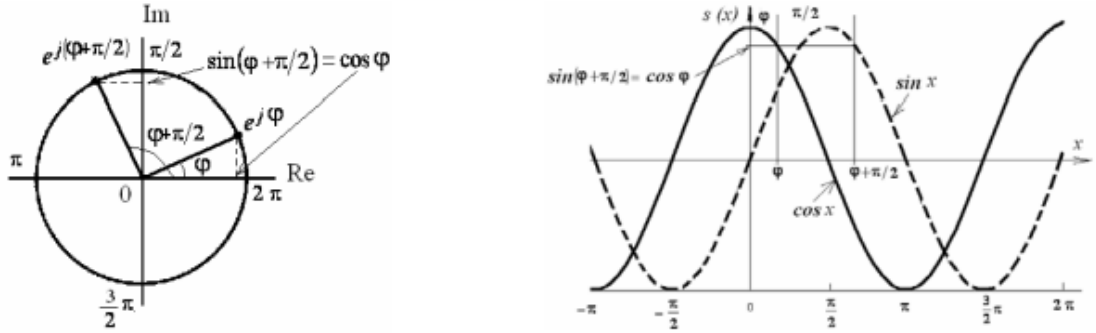



*Рис.8 Співвідношення між синусоїдою та косинусоїдою*

$$s(t)=\sin(2\pi\cdot 1000\cdot t)+0.5\sin(2\pi\cdot 2000\cdot t+3\pi/4).$$

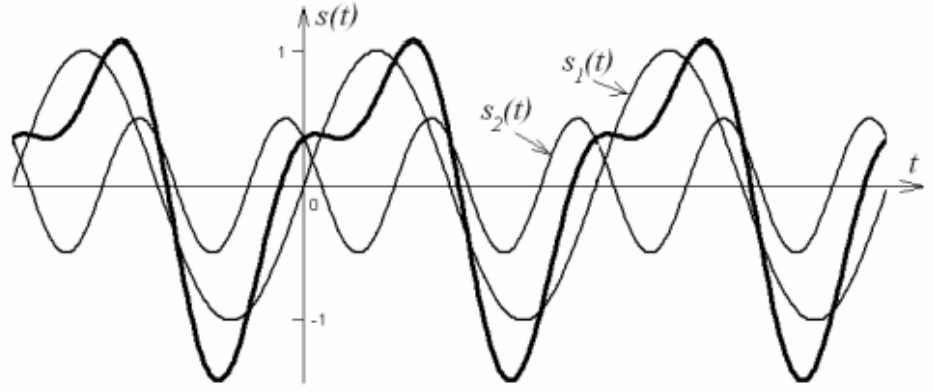



*Рис.9 Приклад гармонійного сигналу і його складових*

**5. Зсув.** Зсув послідовності $\{x[n]\}$ на $\Delta n$ тактів рівнозначний множенню або діленню спектра вихідної послідовності $\dot{X}(k)$ на експоненту $e^{-j\frac{2\pi}{N}k\Delta n}$.

При зсуві вправо утворюється послідовність $x_r(n)=x(n-\Delta n)=x(r)$, спектр якої дорівнює:

$$\dot{X}_r(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n-\Delta n)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}=\sum_{r=-\Delta n}^{N-1-\Delta n}x(r)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}(r+\Delta n)k}=e^{-j\frac{2\pi}{N}\Delta nk}\sum_{r=-\Delta n}^{N-1-\Delta n}x(r)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}rk}.$$

При зсуві вліво утворюється послідовність $x_l(n)=x(n+\Delta n)=x(l)$, спектр якої дорівнює:

$$\dot{X}_l(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n+\Delta n)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}=\sum_{l=\Delta n}^{N-1+\Delta n}x(l)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}(l-\Delta n)k}=e^{j\frac{2\pi}{N}\Delta nk}\sum_{l=\Delta n}^{N-1+\Delta n}x(l)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}lk}.$$

Результуюче вираження:

$$\dot{X}_l(k)=e^{j\frac{2\pi}{N}\Delta nk}\cdot\dot{X}(k)=\dot{X}(k)/e^{-j\frac{2\pi}{N}\Delta nk}.$$

**Наприклад**, для розрахунку ДПФ беруться значення з послідовності відліків сигналу попереднього приклада на $\Delta n$=3 такти пізніше, що можна розглядати як зсув вихідної послідовності на 3 такти вліво, тобто третій вихідний відлік відповідає нульовому в новій послідовності, четвертий – першому, п'ятий - другому і т.д. (рис.10). Значення відліків зрушеного вліво сигналу: $x(0)$=1,0607, $x(1)$=0,3536, $x(2)$=-1,0607, $x(3)$=-1,3536, $x(4)$=-0,3536, $x(5)$=0,3536, $x(6)$=0,3536, $x(7)$=0,6464.

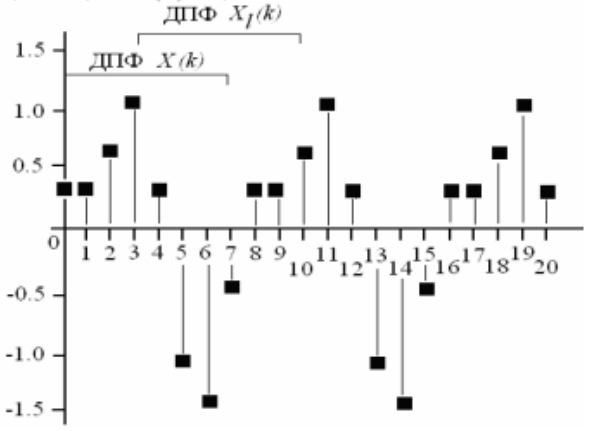



*Рис.10 Послідовність відліків*

Результат ДПФ зрушеного вліво сигналу (рис.11): $\dot{X}(0)=0$, $\dot{X}(1)=4\cdot e^{j\frac{\pi}{4}}$, $\dot{X}(2)=2\cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}$, $\dot{X}(3)=0.0-j0.0$, $\dot{X}(4)=0.0-j0.0$, $\dot{X}(5)=0.0-j0.0$, $\dot{X}(6)=2\cdot e^{j\frac{\pi}{4}}$, $\dot{X}(7)=4\cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}$.

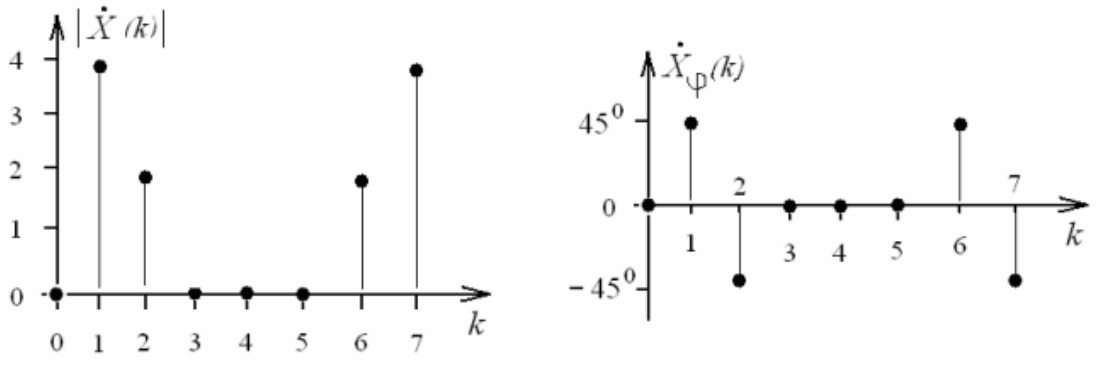



*Рис.11 Амплітудний і фазовий спектри зрушеного сигналу*

Використовуючи властивість зсуву можна перевірити правильність обчислення нового ДПФ:

$$\dot{X}_1(1)=\dot{X}(1)/e^{-j\frac{2\pi}{N}\Delta nk}=4e^{-j\frac{\pi}{2}}\cdot e^{j\frac{2\pi}{8}3\cdot 1}=4e^{j\left(\frac{6\pi-4\pi}{8}\right)}=4e^{j\frac{\pi}{4}},$$

$$\dot{X}_1(2)=\dot{X}(2)/e^{-j\frac{2\pi}{N}\Delta nk}=2e^{j\frac{\pi}{4}}\cdot e^{j\frac{2\pi}{8}3\cdot 2}=2e^{j\left(\frac{\pi+6\pi}{4}\right)}=2e^{-j\frac{\pi}{4}},$$

що збігається з результатами.

**6. Додавання нулів.** При практичній реалізації припустиме доповнення сигналу нульовими відліками, якщо його довжина менше розміру ДПФ.

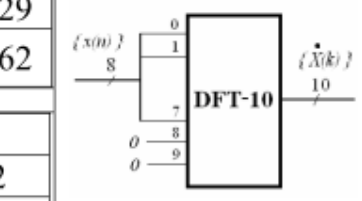
| $N$ | $f_s$, кГц | $f_{DFT}$, Гц | Коефіцієнт N/2 | | Коефіцієнт N max | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Номер | Частота, кГц | Номер | Частота, кГц |
| 8 | 16 | 2000 | 4 | 8 | 7 | 14 |
| 16 | 16 | 1000 | 8 | 8 | 15 | 15 |
| 1024 | 16 | 15.625 | 512 | 8 | 1023 | 15.98 |

**Наприклад**, розмір ДПФ дорівнює 10, а сигнал має 48 відліків (6 періодів по 8 відліків). На вхід ДПФ сигнал подається фрагментами з 10 відліків: 0...9…9,10…19,20…29,30…39, а в останньому фрагменті, що починається з відліку 40, є тільки 8 відліків (з 40 до 47). У такому випадку до останнього фрагмента автоматично додаються два нульових відліку. У результаті утворюється наступний набір відліків (сигнал з попереднього приклада): $x(0)$=0,3536, $x(1)$=0,3536, $x(2)$=0,6464, $x(3)$=1,0607, $x(4)$=0,3536, $x(5)$=-1,0607, $x(6)$=-1,3536, $x(7)$=-0,3536, $x(8)$=0, $x(9)$=0. Результат ДПФ показано на рис.12.

Значення коефіцієнтів і частоти відповідних гармонік ДПФ (основна частота ДПФ дорівнює $f=f_s/N=8000/10=0.8$кГц ):

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_k$ | 0 | 0.8 | 1.6 | 2.4 | 3.2 |
| $X(k)$ | 0 | 4.0324 | 2.6518 | 1.2857 | 0.2429 |
| $X_\varphi(k)[\pi]$ | 0 | -0.288 | 0.7723 | -0.1979 | 0.0862 |

| $k$ | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_k$ | 4.0 | 4.8 | 5.6 | 6.4 | 7.2 |
| $X(k)$ | 0 | 0.2429 | 1.2857 | 2.6518 | 4.0324 |
| $X_\varphi(k)[\pi]$ | 0 | -0.0862 | 0.1979 | -0.7723 | 0.288 |



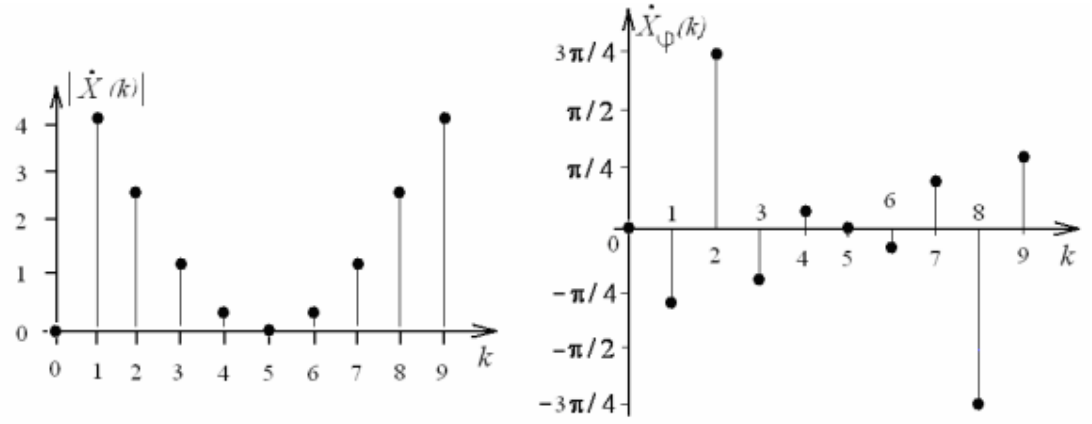




*Рис.12 Амплітудний і фазовий спектри для послідовності с двома додатковими нулями*

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) + s_3(t) + s_4(t) = 0.8 \cdot \cos(2\pi 800t - 0.3\pi) + 0.53 \cdot \cos(2\pi 1600t + 0.77\pi) + \\ + 0.26 \cdot \cos(2\pi 2400t - 0.2\pi) + 0.05 \cdot \cos(2\pi 3200t + 0.09\pi)$$

**7. ДПФ добутку послідовностей.** Спектр послідовності $y(n) = x_1(n) \cdot x_2(n)$, яка отримана в результаті поелементного множення двох послідовностей рівної довжини, формується за виразом

$\dot{Y}(m) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \dot{X}_1(k) \cdot \dot{X}_2(m-k)$, що являє собою циклічну згортку спектрів $\dot{X}_1(k)$ і $\dot{X}_2(k)$ вихідних послідовностей. При розрахунку такого спектра спектральні коефіцієнти $\dot{X}_2(k)$ з номерами $m$, що виходять за межі діапазону (0,…,N-1), приймають значення згідно властивості періодичності спектра, тобто $\dot{X}_2(k) = \dot{X}_2(k \pm N)$.

**8. Енергія спектра.** Спектр ДПФ зберігає інформацію про енергію вихідного сигналу, що відтворено в дискретному аналогу рівності Парсеваля:

$$E = \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \left| \dot{X}(k) \right|^2 .$$

## Віконне ДПФ

**Наприклад**, гармонійний сигнал має значення: $x(0)=0{,}3536$, $x(1)=0{,}3536$, $x(2)=0{,}6464$, $x(3)=1{,}0607$, $x(4)=0{,}3536$, $x(5)=-1{,}0607$, $x(6)=-1{,}3536$, $x(7)=-0{,}3536$ (рис.13). Вираження для вихідного безперервного сигналу має вигляд: $s(t)=\sin(2\pi\cdot 1000\cdot t)+0.5\sin(2\pi\cdot 2000\cdot t+3\pi/4)$.

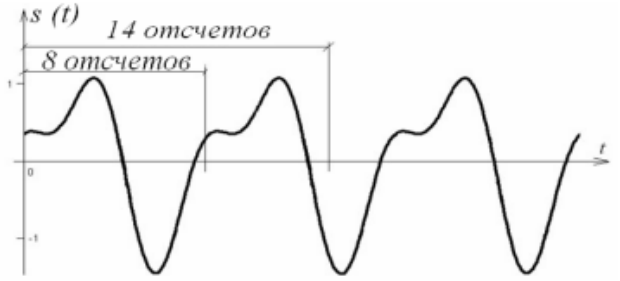
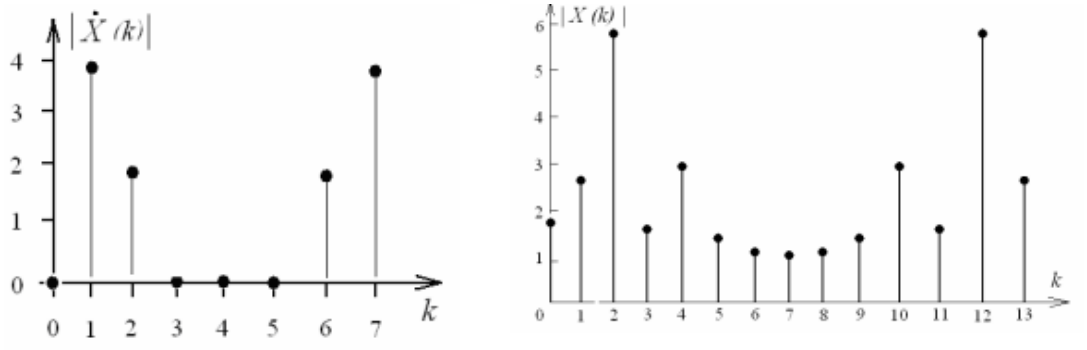



*Рис.13 Приклад гармонійного сигналу*



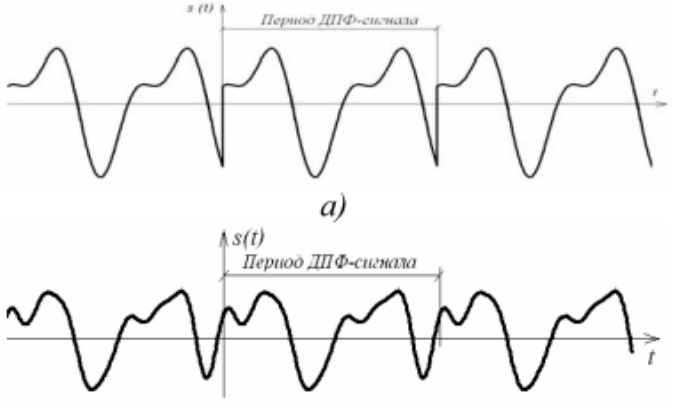

*а)* *б)*

*Рис.14 Амплітудний спектр сигналу: а) без розтікання, б) з розтіканням*

Значення відліків оригінального та відновленого сигналу:

| *Відлік* | *x(0)* | *X(1)* | *x(2)* | *x(3)* | *x(4)* | *x5)* | *x(6)* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *s (t)* | 0.3536 | 0.3536 | 0.6464 | 1.0607 | 0.3536 | -1.0607 | -1.3536 |
| $s_{dft}$ *(t)* | 0.5469 | 0.4042 | 0.8399 | 1.1112 | 0.5470 | -1.0101 | -1.1603 |

| *Відлік* | *x(7)* | *x(8)* | *x(9)* | *x(10)* | *x(11)* | *x(12)* | *x(13)* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *s (t)* | -0.3536 | 0.3536 | 0.3536 | 0.6464 | 1.0607 | 0.3536 | -1.0607 |
| $s_{dft}$ *(t)* | -0.3031 | 0.5470 | 0.4040 | 0.8397 | 1.1113 | 0.5469 | -1.0103 |




*а)*

*б)*

*Рис.15 Приклад ДПФ-сигналу: а) вхідний, б) відновлений*

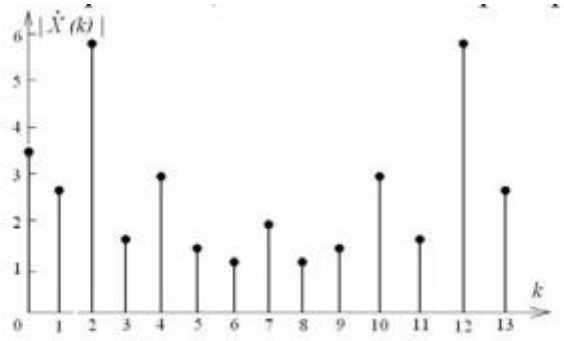



*Рис.16 Амплітудний спектр відновленого ДПФ-сигналу*

$x(0)$=-1,3536, $x(1)$=-0,3536, $x(2)$=0,3536, $x(3)$=0,3536, $x(4)$=0,6464, $x(5)$=1,0607, $x(6)$=0,3536, $x(7)$=-1,0607, $x(8)$=-1,3536, $x(9)$=-0,3536, $x(10)$=0,3536, $x(11)$=0.3536, $x(12)$=0,6464, $x(13)$=1,0607. Відповідний ДПФ-сигнал показаний на рис.17а (спектр - на рис.18а).

Третій фрагмент представлений відліками: $x(0)$=0,3536, $x(1)$=-1,0607, $x(2)$=-1,3536, $x(3)$=-0,3536, $x(4)$=0,3536, $x(5)$=0.3536, $x(6)$=0,6464, $x(7)$=1,0607. $x(8)$=0,3536,$x(9)$=-1,0607,$x(10)$=-1,3536,$x(11)$=-0,3536,$x(12)$=0,3536,$x(13)$=0,3536. Відповідний ДПФ-сигнал показаний на рис.17б (спектр - на рис.18б).

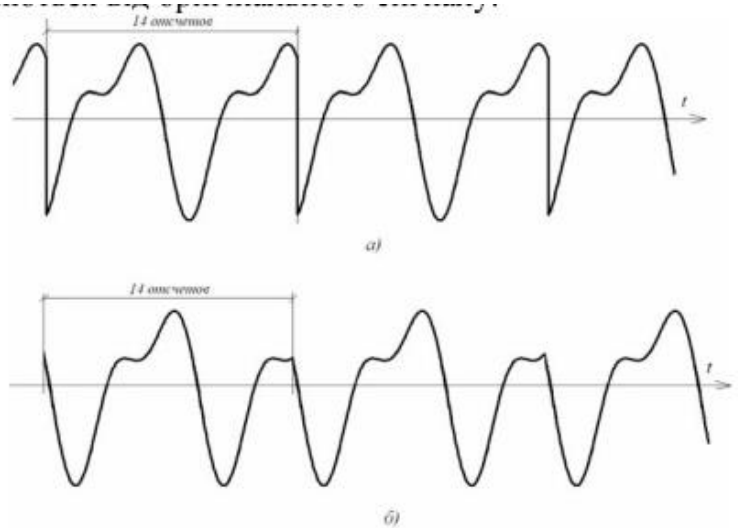
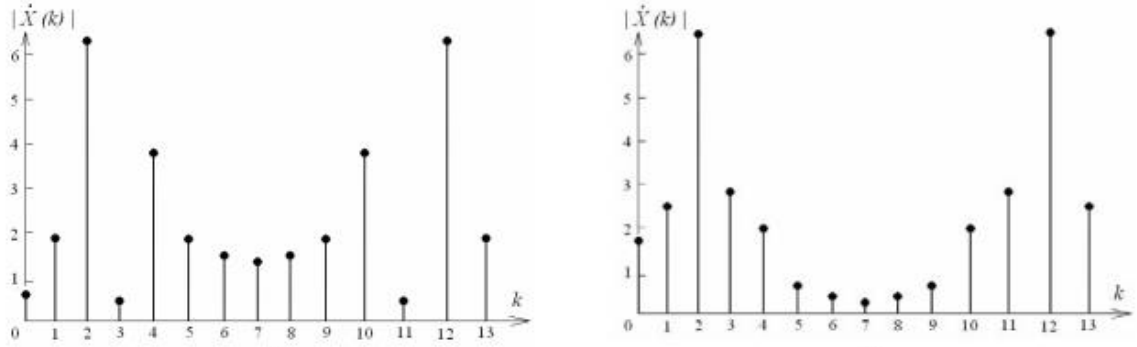



*Рис.17 ДПФ-сигнал для другого (а) і третього (б) набору відліків*




*а)* *б)*

*Рис.18 Спектр ДПФ-сигналу для другого (а) і третього (б) набору відліків*

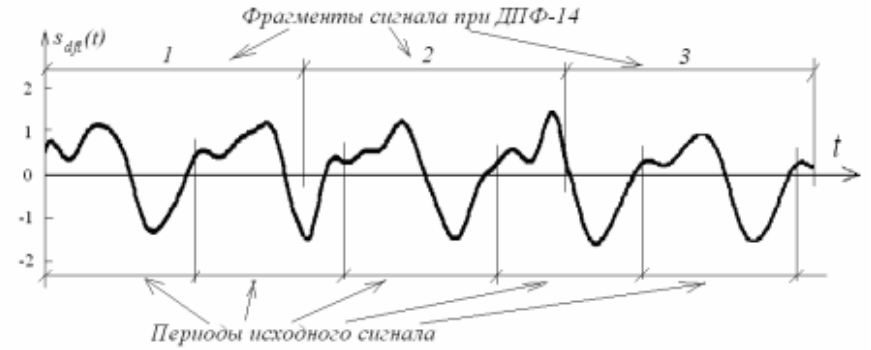



*Рис.19 Приклад відновленого сигналу*

Формула ДПФ при використанні вагової функції має вигляд:

$$\dot{X}_v(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot v(n) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$ , де *v(n)* – віконна функція.

Послідовне застосування вагових функцій до різних інтервалів сигналу враховується введенням у вираження параметра зсуву:

$$\dot{X}_v(k,b) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot v(n-b) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn},$$

де $b$ – параметр зсуву віконної функції уздовж осі часу.

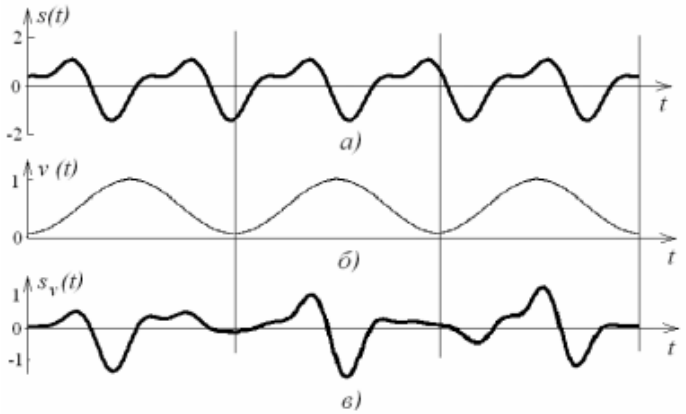



*Рис.20 "Зважування" сигналу: а) оригінальний сигнал, б) Хемінг-функція, в) "зважений" сигнал*

Значення відліків оригінального сигналу, “зваженого” і відновленого після зважування показані в таблиці (перший фрагмент):

| *Відлік* | *x(0)* | *x(1)* | *x(2)* | *x(3)* | *x(4)* | *x5)* | *x(6)* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *s (t)* | 0.3536 | 0.3536 | 0.6464 | 1.0607 | 0.3536 | -1.0607 | -1.3536 |
| $s_v(t)$ | 0.0283 | 0.0469 | 0.1801 | 0.5140 | 0.2486 | -0.9380 | -1.3355 |
| $s_{vdft}$ *(t)* | -0.0011 | 0.0086 | 0.1509 | 0.4759 | 0.2193 | -0.9761 | -1.3649 |

| *Відлік* | *x(7)* | *x(8)* | *x(9)* | *x(10)* | *x(11)* | *x(12)* | *x(13)* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *s (t)* | -0.3536 | 0.3536 | 0.3536 | 0.6464 | 1.0607 | 0.3536 | -1.0607 |
| $s_v(t)$ | -0.3489 | 0.3127 | 0.2486 | 0.3132 | 0.2956 | 0.0469 | -0.0849 |
| $s_{vdft}$ *(t)* | -0.3869 | 0.2832 | 0.2107 | 0.2840 | 0.2576 | 0.0177 | -0.1228 |

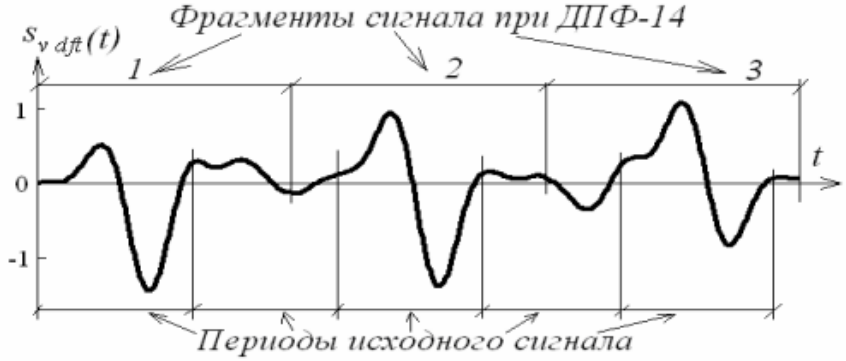



*Рис.21 Приклад сигналу, відновленого після зважування без обліку коефіцієнтів втрат*