

# Дискретне перетворення Фур'є

## 1. Теоретичні основи ДПФ

Для переведення сигналів, які представлені *дискретними* значеннями (відліками), у частотну форму та зворотно застосовують *Дискретне Перетворення Фур'є (ДПФ або DFT)*.

Теоретичною основою ДПФ є спектральна щільність дискретного сигналу. При цьому спектральну щільність необхідно представити у вигляді дельта-функцій з відповідними множниками і затримками:

$$\dot{S}_d(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_d(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \delta(t - nT_s) \right] \cdot e^{-j\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) e^{-j\omega t} dt .$$

Оскільки спектр дельта-функції дорівнює одиниці, а затримка сигналу в часі ( $t - nT_s$ ) приводить до множення спектра на комплексну експоненту

затримки, те:

$$\dot{S}_d(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n T_s}$$

Таким чином, спектральна щільність представляється нескінченним рядом комплексних чисел. При ДПФ із нескінченної безлічі значень спектральної щільності, яка сформована на частоті дискретизації, залежно від параметрів ДПФ вибирається кінцевий набір значень спектральних коефіцієнтів (рис.1).

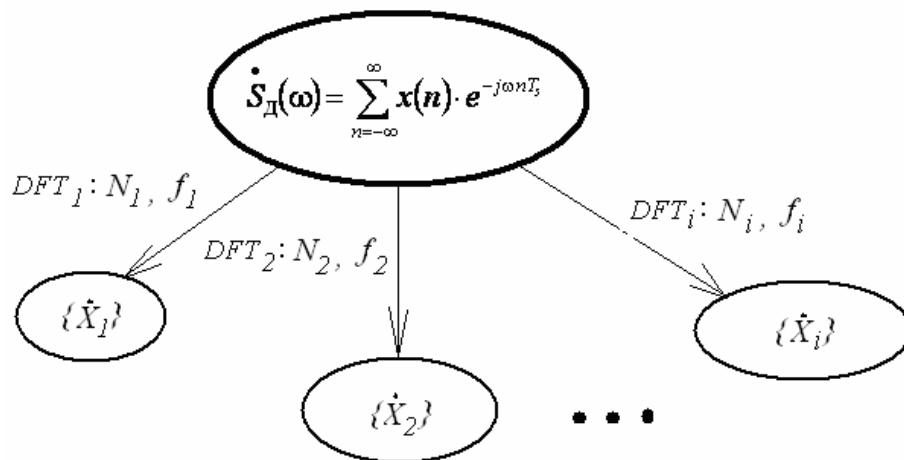


Рис.1 Вибір коефіцієнтів з безлічі щільності

При практичній реалізації ДПФ вхідна послідовність відліків розбивається на фрагменти кінцевої довжини (рис.2). При цьому будь-яка послідовність відліків  $\{x(n)\}$  відповідно до теорії перетворення Фур'є розглядається як періодична з періодом, рівним розміру ДПФ, тобто справедливо  $x(n+N) = x(n)$  для будь-якого  $n$ . В одиницях часу період дискретного сигналу дорівнює  $T = T_s \cdot N$ , де  $T_s$  – крок дискретизації.

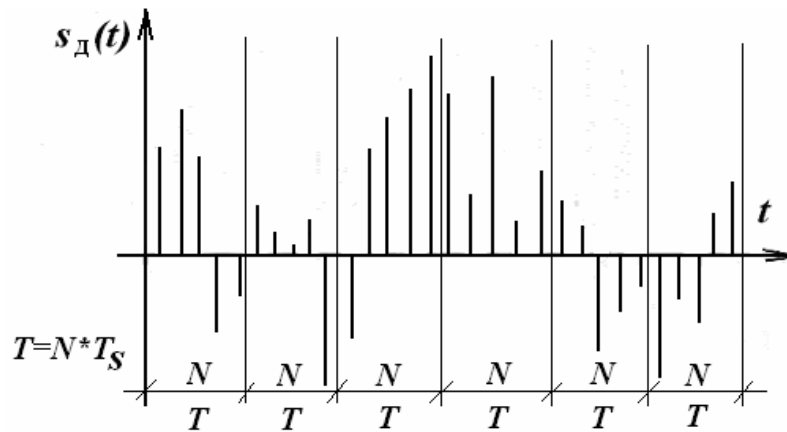
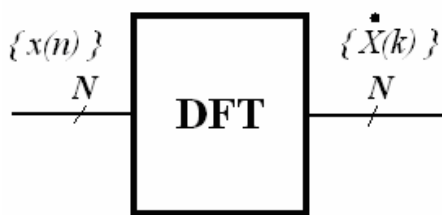


Рис.2 Розбивка сигналу, який дискретизовано, на інтервали відповідно до розміру ДПФ

Оскільки ДПФ трактується як перетворення фрагмента періодичного сигналу, то результати представляються у вигляді наступних спектральних коефіцієнтів ( $k$  – номер гармоніки):

$$\begin{aligned} \dot{X}(k) &= \frac{1}{T} \int_0^T s_d(t) \cdot e^{-jk\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot \delta(t - nT_s) \right] e^{-jk\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \int_0^T \delta(t - nT_s) \cdot e^{-jk\omega t} dt = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-jk\omega nT_s} = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-jk \frac{2\pi}{T} nT_s} = \frac{1}{T_s \cdot N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \end{aligned}$$



Таким чином, у блоці ДПФ із  $N$  відліків сигналу розраховується деяка кількість спектральних коефіцієнтів. Виходячи із властивостей ДПФ кількість спектральних коефіцієнтів дорівнює кількості відліків, тобто  $k=0 \dots (N-1)$  (рис.3).

Рис.3 Умовне графічне позначення ДПФ

В отриманому вираженні реальний масштаб часу присутній тільки в множнику  $1/T_s$  перед оператором підсумовування. При аналізі дискретних перетворень звичайно оперують номерами відліків і спектральних гармонік без прив'язки до дійсного масштабу часу та частоти. Тому множник  $1/T_s$  видаляють, тобто вважають частоту дискретизації нормалізованою (рівною одиниці).

Вираження, що вийшло, називається Дискретним Перетворенням Фур'є (ДПФ або DFT):

$$\dot{X}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}, \quad k=0, 1, \dots, (N-1).$$

Формула зворотного ДПФ (IDFT) має вигляд:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \dot{X}(k) \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n=0,1,\dots,(N-1)\dots$$

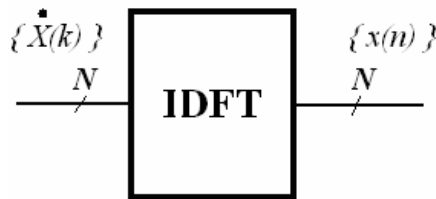


Рис.4 Умовне графічне позначення зворотного ДПФ

Оскільки множник  $1/N$  виконує функцію масштабного параметра, то при вказівці тільки взаємного співвідношення між значеннями гармонік його можна видалити. Але при відновленні цей факт ураховують уведенням коефіцієнта, тобто друга пара виражень для ДПФ виглядає в такий спосіб:

$$\dot{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}; \quad x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \dot{X}(k) \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Для уніфікації алгоритмів і пристроїв прямого та зворотного ДПФ використовується третій варіант представлення формул, при якому вираження відрізняються тільки знаком у ступені експоненти:

$$\dot{X}(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}; \quad x(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \dot{X}(k) \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Вираження для ДПФ можна представити в іншому виді, використовуючи формулу Ейлера:  $\dot{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot [\cos(2\pi kn / N) - j \sin(2\pi kn / N)]$ .

Кожне значення ДПФ являє собою суму добутків вхідної послідовності відліків сигналу на послідовність значень комплексних гармонік виду  $\cos(\varphi) - j \sin(\varphi)$ , тобто гармонійних сигналів деякої частоти. Значення частот гармонік ДПФ залежать від частоти дискретизації та кількості відліків, тобто параметрів цифрування.

$$\text{Оскільки} \quad \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) = \cos(\omega t) = \cos(2\pi f t) = \cos(2\pi f_k t_n) = \cos(2\pi f_k n T_s),$$

те  $\frac{2\pi}{N}kn = 2\pi f_k n T_s$ , що справедливо й для синусоїдальної складової.

$$\text{Отже, } f_k = \frac{1}{N T_s} k = k \frac{f_s}{N} - \text{частота гармоніки } k, \text{ тобто } \dot{X}(k) = \dot{S}\left(k \frac{\omega_s}{N}\right).$$

Частоти гармонік ДПФ відрізняються на значення  $f = \frac{f_s}{N}$ , яке є *основною частотою* ДПФ, від якої залежить *роздільна здатність* перетворення. Саме параметри  $f_s$  і  $N$ , що визначають основну частоту ДПФ, є критерієм відбору коефіцієнтів з нескінченного ряду значень спектральної щільності. При цьому

завжди всі спектральні коефіцієнти розраховуються в діапазоні частот  $0 \leq f_k < f_s$ . Верхня границя частот дорівнює  $f_s(N-1)/N$ , що встановлює частотний діапазон, у якому розраховуються  $N$  спектральних коефіцієнтів при  $N$  вхідних дискретних відліках.

Наприклад, для сигналу із частотою дискретизації  $f_s=16\text{кГц}$  при застосуванні ДПФ-16, тобто при  $N=16$ , основна частота ДПФ дорівнює  $1\text{кГц}$ , а частоти гармонік ДПФ для формування коефіцієнтів мають значення:

$$\begin{aligned} - \dot{X}(0): f_0 &= 0 \cdot (16000/16) = 0\text{кГц}, & - \dot{X}(8): f_8 &= 8 \cdot (16000/16) = 8\text{кГц}, \\ - \dot{X}(1): f_1 &= 1 \cdot (16000/16) = 1\text{кГц}, & & \dots \\ - \dot{X}(2): f_2 &= 2 \cdot (16000/16) = 2\text{кГц}, & - \dot{X}(14): f_{14} &= 14 \cdot (16000/16) = 14\text{кГц}, \\ & \dots & - \dot{X}(15): f_{15} &= 15 \cdot (16000/16) = 15\text{кГц} \end{aligned}$$

Коефіцієнт  $\dot{X}(0)$  вказує на наявність у сигналі та амплітуду гармонійної складової, що має частоту  $0\text{Гц}$  (постійна складова),  $\dot{X}(1)$  - на амплітуду гармонійної складової сигналу, що має частоту  $1\text{кГц}$ ,  $\dot{X}(2)$  - на амплітуду гармонійної складової сигналу, що має частоту  $2\text{кГц}$  і т.д. Як гармоніки ДПФ використовуються синусоїдальні коливання, які целочисельно розміщуються в інтервалі часу, що відповідає кількості відліків  $N$ , тобто періоду вихідного сигналу, рівному  $T = T_s \cdot N$ . Для розглянутого приклада  $T = N \cdot T_s = 16 \cdot \frac{1}{16000} = 0.001$ , тобто в інтервалі, який дорівнює  $1\text{мс}$ , целочисельно розміщуються гармоніки із частотами  $1\text{кГц}$  (один період коливань в інтервалі),  $2\text{кГц}$  (два періоди) і т.д. аж до  $15\text{кГц}$  (п'ятнадцять періодів).

Таким чином, кожне значення спектрального коефіцієнта є сумою добутків вхідної послідовності відліків на косинусоїду та синусоїду (експоненту), частота яких така, що на інтервалі з  $N$  відліків укладається  $k$  їхніх повних періодів. Якщо частоти, які є в сигналі, не збігаються кратно із частотами гармонік ДПФ, то інформація про такі частоти розподіляється між всіма спектральними коефіцієнтами, у першу чергу, між коефіцієнтами, найближчими по частоті.

Для ДПФ справедливо:  $\left| \dot{X}(k) \right| = \sqrt{\dot{X}_{\text{Re}}^2(k) + \dot{X}_{\text{Im}}^2(k)}$  - модулі гармонійних складових (амплітудний спектр),  $\dot{X}_{\varphi}(k) = \arctan\left(\dot{X}_{\text{Im}}(k) / \dot{X}_{\text{Re}}(k)\right)$  - фазовий кут гармонік відносно косинусоїди відповідної частоти (фазовий спектр),  $\dot{X}_{\text{PS}}(k) = \left| \dot{X}(k) \right|^2$  - потужність спектра.

**Наприклад.** У результаті цифрування на частоті  $f_s = 8\text{кГц}$  одного періоду сигналу отримані відліки:  $x(0)=0,3536$ ,  $x(1)=0,3536$ ,  $x(2)=0,6464$ ,  $x(3)=1,0607$ ,  $x(4)=0,3536$ ,  $x(5)=-1,0607$ ,  $x(6)=-1,3536$ ,  $x(7)=-0,3536$ .

Результат ДПФ ( $N=8$ ):

$$\dot{X}(0) = \sum_{n=0}^7 x(n) [\cos(2\pi 0n/8) - j \sin(2\pi 0n/8)] = \sum_{n=0}^7 x(n) [\cos(2\pi 0n/8)] = \sum_{n=0}^7 x(n) = 0.$$

$$\begin{aligned} \dot{X}(1) &= \sum_{n=0}^7 x(n) \cdot [\cos(2\pi 1n/8) - j \sin(2\pi 1n/8)] = \\ &= x(0) \cdot [\cos(2\pi 1 \cdot 0/8) - j \sin(2\pi 1 \cdot 0/8)] + x(1) \cdot [\cos(2\pi 1 \cdot 1/8) - j \sin(2\pi 1 \cdot 1/8)] + \\ &+ x(2) \cdot [\cos(2\pi 1 \cdot 2/8) - j \sin(2\pi 1 \cdot 2/8)] + \dots + x(7) \cdot [\cos(2\pi 1 \cdot 7/8) - j \sin(2\pi 1 \cdot 7/8)] = \\ &= 0.0 - j4.0 = 4 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

$$\dot{X}(2) = \sum_{n=0}^7 x(n) \cdot [\cos(2\pi 2n/8) - j \sin(2\pi 2n/8)] = 1.414 + j1.414 = 2 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}.$$

$$\dot{X}(3) = \sum_{n=0}^7 [x(n) \cdot \cos(2\pi 3n/8) - j \cdot x(n) \cdot \sin(2\pi 3n/8)] = 0.0 - j0.0.$$

$$\dot{X}(4) = \sum_{n=0}^7 [x(n) \cdot \cos(2\pi 4n/8) - j \cdot x(n) \cdot \sin(2\pi 4n/8)] = 0.0 - j0.0.$$

$$\dot{X}(5) = \sum_{n=0}^7 [x(n) \cdot \cos(2\pi 5n/8) - j \cdot x(n) \cdot \sin(2\pi 5n/8)] = 0.0 + j0.0.$$

$$\dot{X}(6) = \sum_{n=0}^7 [x(n) \cdot \cos(2\pi 6n/8) - j \cdot x(n) \cdot \sin(2\pi 6n/8)] = 1.414 - j1.414 = 2 \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}.$$

$$\dot{X}(7) = \sum_{n=0}^7 x(n) \cdot [\cos(2\pi 7n/8) - j \sin(2\pi 7n/8)] = 0.0 + j4.0 = 4 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}.$$

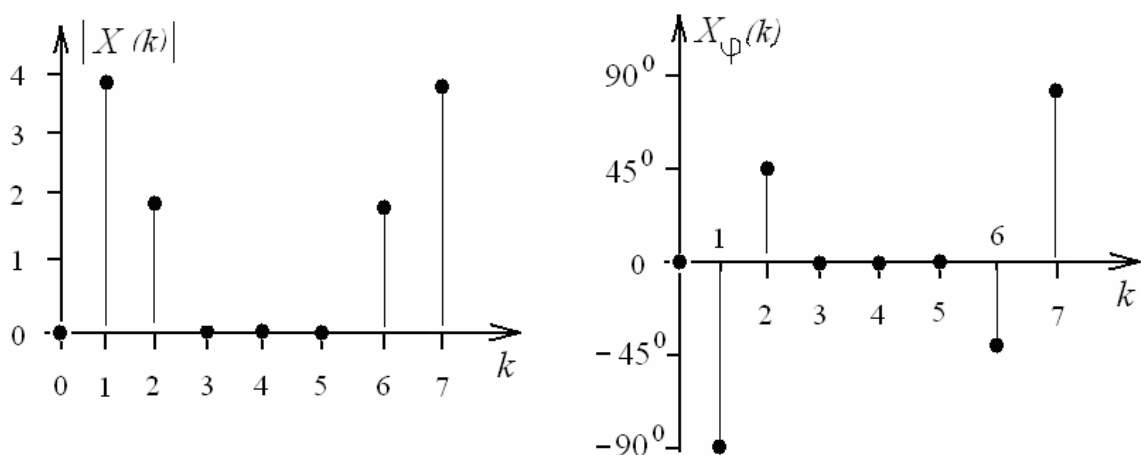


Рис.5 Амплітудний і фазовий спектри

## 2. Властивості ДПФ

**1. Періодичність.** Дискретний спектр періодичний, а один період спектра містить  $N$  гармонік. Це слідує з вираження:

$$\dot{X}(k+N) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+N)n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}Nn} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \dot{X}(k).$$

Таким чином,  $\dot{X}(k+N) = \dot{X}(k)$ . Тому при ДПФ досить визначити  $N$  спектральних коефіцієнтів ( $k=0 \dots (N-1)$ ), які називаються *основними* коефіцієнтами Фур'є.

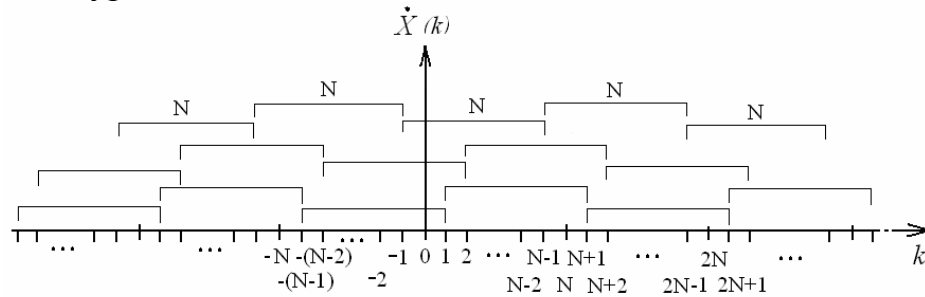


Рис.6 Періодичність спектра ( $k=0 \dots (N-1)$  - основні коефіцієнти)

### 2. Симетричність.

$$\dot{X}(N-k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-k)n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}Nn} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}(-k)n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}(-k)n} = \dot{X}(-k).$$

Таким чином,  $\dot{X}(N-k) = \dot{X}(-k)$ . Відповідно до теорії комплексних чисел спектр послідовності, яка представлена дійсними (речовинними) числами, справедливо  $\dot{X}(-k) = \dot{X}^*(k)$ , тобто ДПФ має властивість сполученої симетрії.

При цьому  $|\dot{X}(-k)| = |\dot{X}(k)|$ ,  $\dot{X}_\varphi(-k) = -\dot{X}_\varphi(k)$ .

У свою чергу, дійсна частина спектра  $X_{\text{Re}}(k)$  має парну, а мніма  $X_{\text{Im}}(k)$  – непарну симетрію.

У ДПФ- $N$  послідовності, яка представлена дійсними (речовинними) числами, перші  $N/2+1$  значень ( $\dot{X}(0) \dots \dot{X}(N/2)$ ) є *незалежними*, котрих досить для одержання представлення про спектр сигналу, а інша частина спектра – копія (рис.7).

Спектральні коефіцієнти  $\dot{X}(0)$  та  $\dot{X}(N/2)$  мають особливості:

а)  $\dot{X}(0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)$  - сума відліків на одному періоді, а при наявності

множника  $1/N$  перед сумою – середнє значення відліків на періоді.

б) Якщо  $N$  парне, то амплітуда гармоніки з номером  $N/2$  є сумою відліків зі знаками, що змінюються:

$$\dot{X}\left(\frac{N}{2}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N} \frac{N}{2} n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-jn\pi} = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n x(n) = x(0) - x(1) + \dots + x(N-2) - x(N-1)$$

Амплітудний спектр дійсного сигналу з парною кількістю відліків є сполучено-симетричним відносно  $k = N/2$ , а частота гармоніки дорівнює половині частоти дискретизації, що відповідає критерію Найквіста.

Наприклад, для ДПФ-8 ( $N=8, f_s=8\text{кГц}$ ): Коефіцієнт  $\dot{X}(4)$  відповідає гармоніці із частотою 4кГц і дорівнює

$$\dot{X}(4) = x(0) - x(1) + x(2) - x(3) + x(4) - x(5) + x(6) - x(7).$$

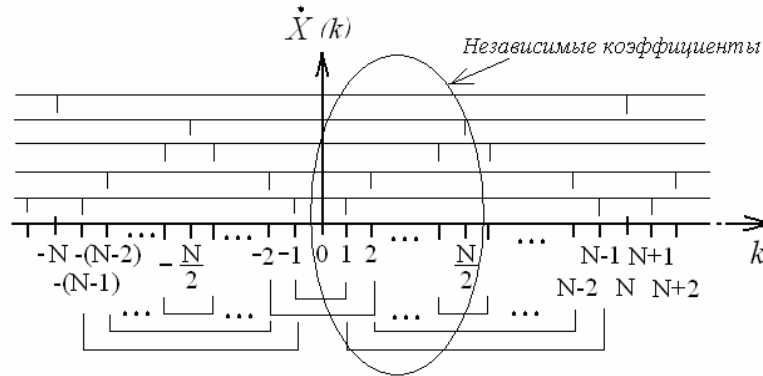


Рис.7 Симетричність і періодичність спектра

Властивість симетричності слідує з того, що вихідна послідовність представляється набором з  $N$  дійсних відліків, а спектр - набором з  $N/2$  комплексних чисел (друга половина однозначно пов'язана з першою), кожне з яких еквівалентно двом дійсним.

Якщо вихідна послідовність відліків не є дійсною та представлена, наприклад, комплексними числами, то симетрія спектра відсутня і  $N$  комплексним відлікам у тимчасовій області відповідає  $N$  комплексних відліків у спектрі.

**3. Модульність.** Якщо у вхідному сигналі, який представлений дійсними числами, є присутнім синусоїдальний компонент  $S_i(t)$  з амплітудою  $A_i$  і періодом, який цілочисельно кратний інтервалу з  $N$  відліків, то модуль відповідного спектрального коефіцієнта ДПФ дорівнює  $|\dot{X}(i)| = \frac{A_i}{2} N$ , а при наявності у формулі множника  $1/N$  перед сумою -  $|\dot{X}(i)| = \frac{A_i}{2}$ .

Якщо на вхід ДПФ надходить комплексна синусоїда з амплітудою  $A_i \cdot e^{j\omega t}$  при цілій кількості періодів на  $N$  відліках, то модуль відповідного коефіцієнта ДПФ дорівнює  $|\dot{X}(i)| = A_i \cdot N$ , а при наявності у формулі множника  $1/N$  перед сумою -  $|\dot{X}(i)| = A_i$ . Таким чином, має місце:

$ \dot{X}(i) $	Є присутнім $1/N$	Відсутній $1/N$
Комплексний сигнал	$A_i$	$A_i \cdot N$
Дійсний сигнал	$\frac{A_i}{2}$	$\frac{A_i}{2} \cdot N$

Якщо вхідний сигнал має постійну складову  $A_0$ , то модуль коефіцієнта ДПФ  $\left| \dot{X}(0) \right| = A_0 \cdot N$ , а при наявності множника  $1/N$  -  $\left| \dot{X}(0) \right| = A_0$ .

При використанні прямого та зворотного ДПФ, у формулах розрахунку яких присутні однакові множники, рівні  $1/\sqrt{N}$ , значення модулів коефіцієнтів відповідно змінюються.

**Наприклад**, по завершенні ДПФ деякого сигналу  $s(t)$  отримані амплітудний і фазовий спектри (рис.5). Відомо, що частота дискретизації дорівнює  $f_s = 8\text{кГц}$ , а розмір ДПФ  $N=8$ .

Методика визначення математичного вираження вихідного безперервного сигналу виглядає наступним чином.

У загальному випадку, вираження для безперервного сигналу має вигляд:

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) + \dots + s_i(t) + \dots = A_0 + \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cdot \cos(2\pi f_i t + \varphi_i) .$$

Отже, завдання зводиться до визначення характеристик кожного з окремих гармонійних коливань сигналу (амплітуда, частота, фаза) і постійної складової.

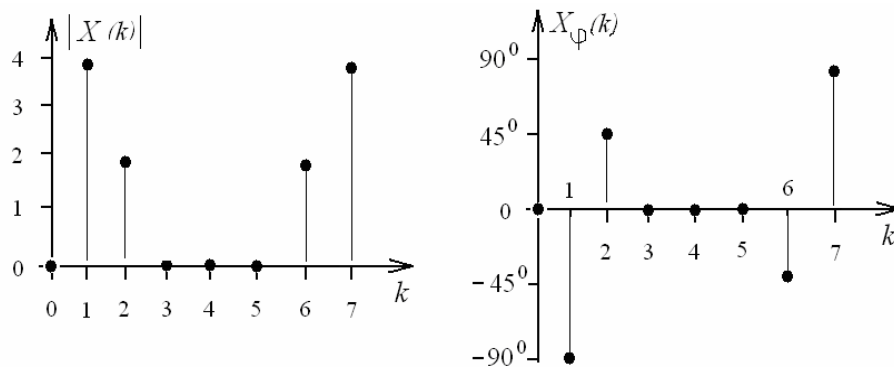


Рис.5 (копія) Амплітудний і фазовий спектри

Оскільки  $N=8$ , а сигнал речовинний, то для аналізу досить розглянути спектральні коефіцієнти від 0 до  $N/2$ , тобто від 0 до 4.

Значення  $\dot{X}(0) = 0$  вказує на відсутність постійної складової.

У сигналі присутні два гармонійних коливання, тому що відмінні від нуля тільки коефіцієнти  $\dot{X}(1)$  та  $\dot{X}(2)$ . Оскільки частота дискретизації дорівнює 8кГц при  $N=8$ , то результат ДПФ показує на амплітуди гармонійних складових із частотами 0кГц, 1кГц, 2кГц, ..., 7кГц. Із цього слідує, що ненульові коефіцієнти визначені на частотах 1кГц і 2кГц. Отже, можна затверджувати, що:

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) = A_1 \cdot \cos(2\pi 1000t + \varphi_1) + A_2 \cdot \cos(2\pi 2000t + \varphi_2) .$$

Оскільки  $\dot{X}(1) = 4$ , а  $\dot{X}(2) = 2$ , то відповідно до вираження  $\left| \dot{X}(i) \right| = \frac{A_i}{2} N$  амплітуди рівні:  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = 0.5$ .

Фази кожного з коливань зазначені у фазовому спектрі.



Таким чином, вираження приймає вигляд:

$$s(t) = \cos\left(2\pi 1000t - \frac{\pi}{2}\right) + 0.5 \cdot \cos\left(2\pi 2000t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Відомо, що фазовий зсув між косинусом і синусом дорівнює  $\pi/2$  (затримана на фазу  $\pi/2$  косинусоїда - це синусоїда тієї ж амплітуди) (рис.8).

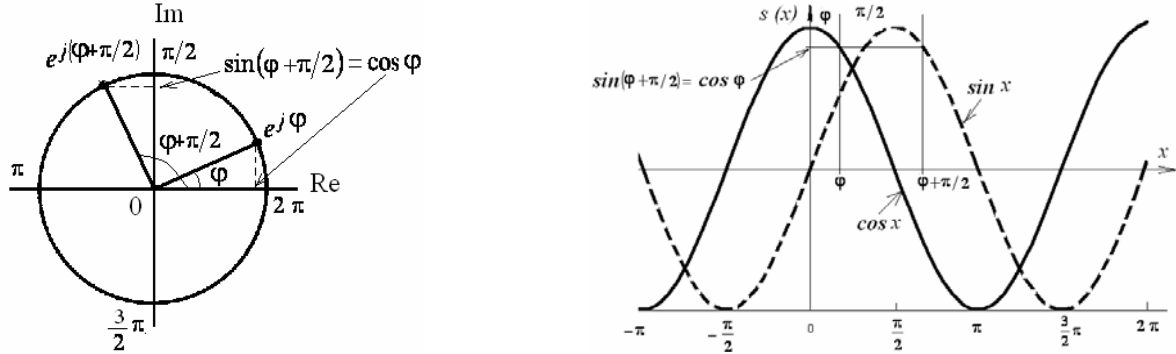


Рис.8 Співвідношення між синусоїдою та косинусоїдою

З урахуванням цього, вираження для вихідного безперервного сигналу (рис.9) можна перетворити до вигляду:

$$s(t) = \sin(2\pi \cdot 1000 \cdot t) + 0.5 \sin(2\pi \cdot 2000 \cdot t + 3\pi/4).$$

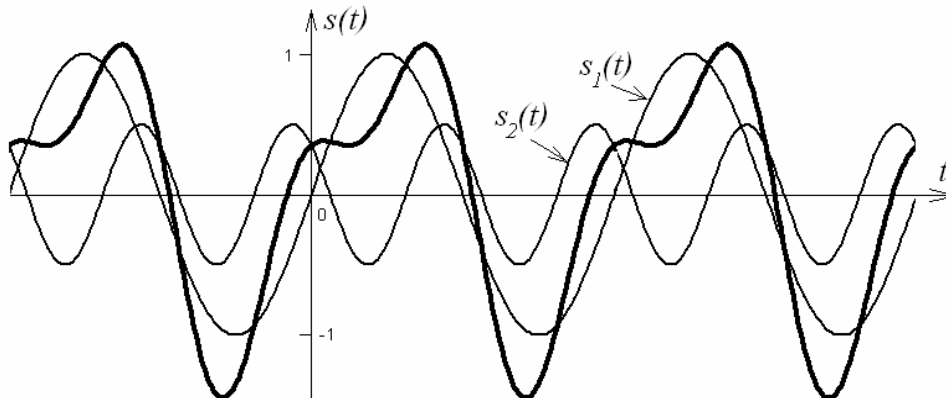


Рис.9 Приклад гармонійного сигналу і його складових

**4. Лінійність.** ДПФ заелементної суми послідовностей  $\{x_1(n)\}$  і  $\{x_2(n)\}$  однакової довжини  $N$  дорівнює сумі перетворень окремих послідовностей:

$$\begin{aligned} \dot{X}_{12}(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} [a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} a_1 x_1(n) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \sum_{n=0}^{N-1} a_2 x_2(n) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = a_1 \dot{X}_1(k) + a_2 \dot{X}_2(k) \end{aligned}$$

**5. Зсув.** Зсув послідовності  $\{x[n]\}$  на  $\Delta n$  тактів рівнозначний множенню або діленню спектра вихідної послідовності  $\dot{X}(k)$  на експоненту  $e^{-j\frac{2\pi}{N}k\Delta n}$ .

При зсуві вправо утворюється послідовність  $x_r(n) = x(n - \Delta n) = x(r)$ , спектр якої дорівнює:

$$\dot{X}_r(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n - \Delta n) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{r=-\Delta n}^{N-1-\Delta n} x(r) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}(r+\Delta n)k} = e^{-j\frac{2\pi}{N}\Delta nk} \sum_{r=-\Delta n}^{N-1-\Delta n} x(r) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}rk}$$

У свою чергу,

$$\begin{aligned} \sum_{r=-\Delta n}^{N-1-\Delta n} x(r) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}rk} &= \sum_{r=-\Delta n}^{-1} x(r) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}rk} + \sum_{r=0}^{N-1-\Delta n} x(r) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}rk} = \\ &= \sum_{r=N-\Delta n}^{N-1} x(r) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}rk} + \sum_{r=0}^{N-\Delta n-1} x(r) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}rk} = \sum_{r=0}^{N-1} x(r) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}rk} \end{aligned}$$

Отже,  $\dot{X}_r(k) = e^{-j\frac{2\pi}{N}\Delta nk} \cdot \sum_{r=0}^{N-1} x(r) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}rk} = e^{-j\frac{2\pi}{N}\Delta nk} \cdot \dot{X}(k).$

При зсуві вліво утворюється послідовність  $x_l(n) = x(n + \Delta n) = x(l)$ , спектр якої дорівнює:

$$\dot{X}_l(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n + \Delta n) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{l=\Delta n}^{N-1+\Delta n} x(l) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}(l-\Delta n)k} = e^{j\frac{2\pi}{N}\Delta nk} \sum_{l=\Delta n}^{N-1+\Delta n} x(l) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}lk}$$

Результуюче вираження:

$$\dot{X}_l(k) = e^{j\frac{2\pi}{N}\Delta nk} \cdot \dot{X}(k) = \dot{X}(k) / e^{-j\frac{2\pi}{N}\Delta nk}$$

Із цього слідує, що амплітудний спектр не змінюється, а фазовий змінюється залежно від моменту, починаючи з якого беруться відліки послідовності, яка має зсув.

**Наприклад,** для розрахунку ДПФ беруться значення з послідовності відліків сигналу попереднього прикладу на  $\Delta n=3$  такти пізніше, що можна розглядати як зсув вихідної послідовності на 3 такти вліво, тобто третій вихідний відлік відповідає нульовому в новій послідовності, четвертий – першому, п'ятий - другому і т.д. (рис.10). Значення відліків зрушеного вліво сигналу:  $x(0)=1,0607$ ,  $x(1)=0,3536$ ,  $x(2)=-1,0607$ ,  $x(3)=-1,3536$ ,  $x(4)=-0,3536$ ,  $x(5)=0,3536$ ,  $x(6)=0,3536$ ,  $x(7)=0,6464$ .

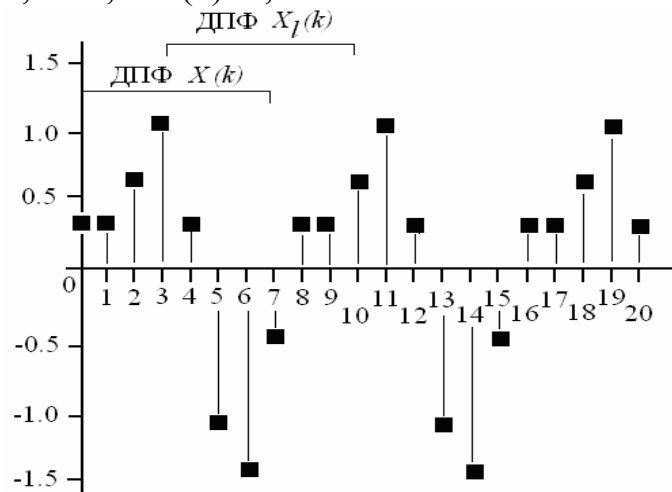


Рис.10 Послідовність відліків

Результат ДПФ зрушеного вліво сигналу (рис.11):  $\dot{X}(0) = 0$ ,  $\dot{X}(1) = 4 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}$ ,  $\dot{X}(2) = 2 \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}$ ,  $\dot{X}(3) = 0.0 - j0.0$ ,  $\dot{X}(4) = 0.0 - j0.0$ ,  $\dot{X}(5) = 0.0 - j0.0$ ,  $\dot{X}(6) = 2 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}$ ,  $\dot{X}(7) = 4 \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}$ .

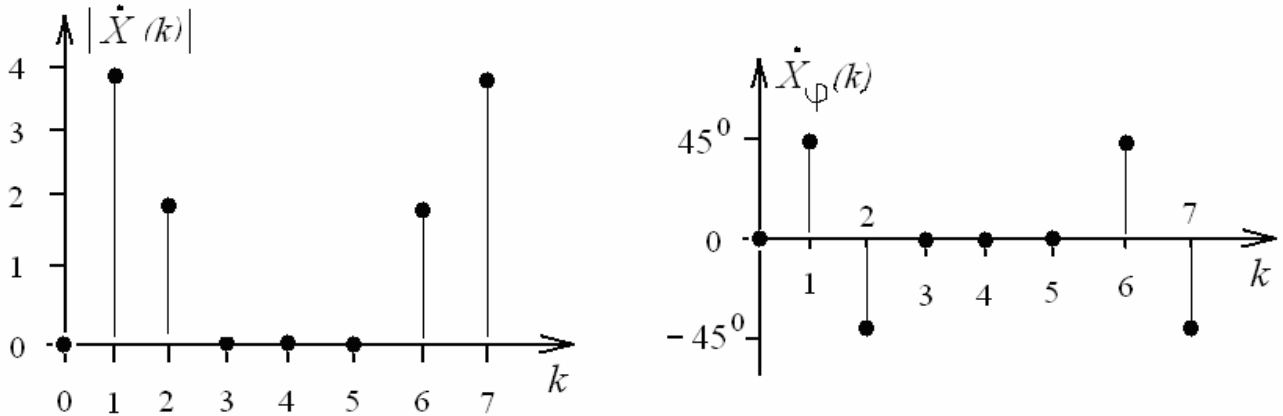


Рис.11 Амплітудний і фазовий спектри зрушеного сигналу

Використовуючи властивість зсуву можна перевірити правильність обчислення нового ДПФ:

$$\dot{X}_l(1) = \dot{X}(1) / e^{-j\frac{2\pi}{N}\Delta nk} = 4e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\frac{2\pi}{8}3 \cdot 1} = 4e^{j\left(\frac{6\pi - 4\pi}{8}\right)} = 4e^{j\frac{\pi}{4}},$$

$$\dot{X}_l(2) = \dot{X}(2) / e^{-j\frac{2\pi}{N}\Delta nk} = 2e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{j\frac{2\pi}{8}3 \cdot 2} = 2e^{j\left(\frac{\pi + 6\pi}{4}\right)} = 2e^{-j\frac{\pi}{4}},$$

що збігається з результатами.

**6. Додавання нулів.** При практичній реалізації припустиме доповнення сигналу нульовими відліками, якщо його довжина менше розміру ДПФ.

Це слідує з того, що ДПФ являє собою вибірку з безлічі значень спектральної щільності відповідно до частоти ДПФ, рівної  $f_s/N$ . При додаванні нулів збільшується розмір сигналу, зменшується частота ДПФ і розраховується більша кількість спектральних коефіцієнтів, але в тім же діапазоні частот  $0 \leq f_k < f_s$ , що залежить від частоти дискретизації, що при цьому не змінилася (трохи міняється тільки верхня границя частот, рівна  $f_s(N-1)/N$ ). Причому частота коефіцієнта  $N/2$ , точніше частота відповідної гармоніки ДПФ, як і раніше залишається рівній половині частоти дискретизації:

N	$f_s$ , кГц	$f_{DFT}$ , Гц	Коефіцієнт N/2		Коефіцієнт N max	
			Номер	Частота, кГц	Номер	Частота, кГц
8	16	2000	4	8	7	14
16	16	1000	8	8	15	15
1024	16	15.625	512	8	1023	15.98

Таким чином, при додаванні нулів до набору відліків вхідного сигналу, ДПФ сформує більшу кількість спектральних коефіцієнтів, що відповідають частотам в інтервалі від нуля до приблизно частоти дискретизації.

**Наприклад**, розмір ДПФ дорівнює 10, а сигнал має 48 відліків (6 періодів по 8 відліків). На вхід ДПФ сигнал подається фрагментами з 10 відліків: 0...9...9,10...19,20...29,30...39, а в останньому фрагменті, що починається з відліку 40, є тільки 8 відліків (з 40 до 47). У такому випадку до останнього фрагмента автоматично додаються два нульових відліку. У результаті утворюється наступний набір відліків (сигнал з попереднього приклада):  $x(0)=0,3536$ ,  $x(1)=0,3536$ ,  $x(2)=0,6464$ ,  $x(3)=1,0607$ ,  $x(4)=0,3536$ ,  $x(5)=-1,0607$ ,  $x(6)=-1,3536$ ,  $x(7)=-0,3536$ ,  $x(8)=0$ ,  $x(9)=0$ . Результат ДПФ показано на рис.12.

Значення коефіцієнтів і частоти відповідних гармонік ДПФ (основна частота ДПФ дорівнює  $f = f_s / N = 8000 / 10 = 0.8 \text{кГц}$ ):

$k$	0	1	2	3	4
$f_k$	0	0.8	1.6	2.4	3.2
$X(k)$	0	4.0324	2.6518	1.2857	0.2429
$X_\varphi(k)[\pi]$	0	-0.288	0.7723	-0.1979	0.0862
$k$	5	6	7	8	9
$f_k$	4.0	4.8	5.6	6.4	7.2
$X(k)$	0	0.2429	1.2857	2.6518	4.0324
$X_\varphi(k)[\pi]$	0	-0.0862	0.1979	-0.7723	0.288

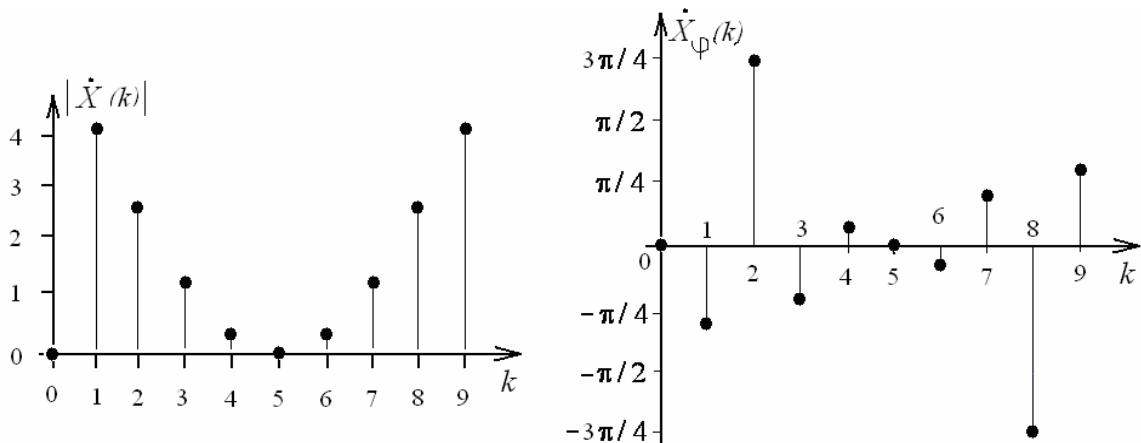


Рис.12 Амплітудний і фазовий спектри для послідовності з двома додатковими нулями

Відповідно до цього перетворення математична форма запису вихідного безперервного сигналу виглядає наступним чином:

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) + s_3(t) + s_4(t) = 0.8 \cdot \cos(2\pi 800t - 0.3\pi) + 0.53 \cdot \cos(2\pi 1600t + 0.77\pi) + 0.26 \cdot \cos(2\pi 2400t - 0.2\pi) + 0.05 \cdot \cos(2\pi 3200t + 0.09\pi)$$

Незважаючи на те, що вираження змінилося, вихідний безперервний сигнал за рахунок додавання двох нулів не змінився (додаткові нулі можна трактувати як паузу, тобто тишу, по закінченні корисного сигналу). Інакше, після виконання зворотного ДПФ послідовність відліків, а, отже, вихідний безперервний сигнал, відновлюється правильно.

**7. ДПФ добутку послідовностей.** Спектр послідовності  $y(n) = x_1(n) \cdot x_2(n)$ , яка отримана в результаті поелементного множення двох послідовностей рівної довжини, формується за вираженням

$$\dot{Y}(m) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \dot{X}_1(k) \cdot \dot{X}_2(m-k),$$

що являє собою циклічну згортку спектрів  $\dot{X}_1(k)$  і  $\dot{X}_2(k)$  вихідних послідовностей. При розрахунку такого спектра спектральні коефіцієнти  $\dot{X}_2(k)$  з номерами  $m$ , що виходять за межі діапазону  $(0, \dots, N-1)$ , приймають значення згідно властивості періодичності спектра, тобто  $\dot{X}_2(k) = \dot{X}_2(k \pm N)$ .

**8. Енергія спектра.** Спектр ДПФ зберігає інформацію про енергію вихідного сигналу, що відтворено в дискретному аналогу рівності Парсеваля:

$$E = \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \left| \dot{X}(k) \right|^2.$$

### 3. Віконне ДПФ

На практиці сигнал розбивається на фрагменти кінцевої довжини відповідно до розміру ДПФ, що рівнозначно множенню вихідного сигналу на віконну функцію, відліки якої дорівнюють одиниці в межах вікна й нулю - за його границями. Віконна функція пересувається по сигналу із кроком, рівним розміру ДПФ, забезпечуючи послідовне виділення фрагментів вихідного сигналу, які підлягають перетворенню.

Штучна розбивка сигналу на фрагменти вносить у спектр додаткові перекручування, викликані невідповідністю параметрів ДПФ характеристикам сигналів. Такий ефект називається *розтіканням спектра*.

При практичній реалізації розмір ДПФ, рівний  $N$ , фіксований, і дорівнює, наприклад,  $N=1024$ . При типовій частоті дискретизації, рівної 44,1кГц, незалежно від частотного набору сигналу, частоти ДПФ кратні основній частоті перетворення, рівної  $44100/1024=43,066$ Гц, а кількість спектральних коефіцієнтів на виході блоку ДПФ дорівнює 1024.

Частоти гармонік сигналів, що піддаються перетворенню, як правило, не кратні основній частоті ДПФ. Такі частоти не представлені в спектрі ДПФ у вигляді одного сплеску, а присутні як складові у всіх гармоніках ДПФ.

Інша причина перекручування спектра впливає із самої суті ДПФ, що припускає, що період сигналу дорівнює або цілочно кратно розміру ДПФ. Послідовність відліків при цьому розглядається періодично продовженою в часі. У дійсності ж розмір ДПФ, рівний, наприклад 512 або 1024, установлює інтервали пофрагментної розбивки послідовності відліків і не пов'язаний з періодичністю реального сигналу.

Це означає, що навіть періодичні гармонійні сигнали в реальному ДПФ перетворюються з перекручуваннями. У результаті ДПФ формується спектр в інтервалах фіксованої довжини, у яких сигнал має довільний вигляд, але в припущенні його періодичності та подоби із сигналом в інших фрагментах. Як наслідок, може виникнути значна різниця між початковими та кінцевими значеннями відліків в одному інтервалі при дискретній обробці, тобто виникають значні різкі зміни на переходах інтервалів, які розглядаються як додаткові високочастотні гармоніки, і спектр спотворюється.

**Наприклад**, гармонійний сигнал має значення:  $x(0)=0,3536$ ,  $x(1)=0,3536$ ,  $x(2)=0,6464$ ,  $x(3)=1,0607$ ,  $x(4)=0,3536$ ,  $x(5)=-1,0607$ ,  $x(6)=-1,3536$ ,  $x(7)=-0,3536$  (рис.13). Вираження для вихідного безперервного сигналу має вигляд:  $s(t) = \sin(2\pi \cdot 1000 \cdot t) + 0.5 \sin(2\pi \cdot 2000 \cdot t + 3\pi/4)$ .

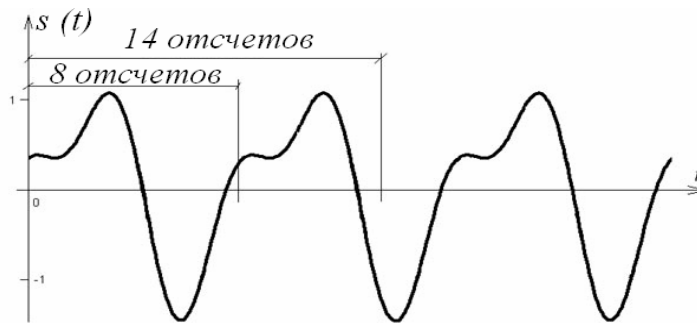


Рис.13 Приклад гармонійного сигналу

Якщо такий сигнал перетворити в блоці ДПФ-8, то в його спектрі чітко присутні тільки дві основні частоти, тому що в блок ДПФ попадає ціле число періодів вихідної послідовності відліків (гармонійного сигналу) (у випадку ДПФ-8 - 1 період, ДПФ-16 - 2 періоди, ДПФ-24 - 3 періоди і т.д.) і відсутнє розтікання спектра (рис.14а).

Якщо сигнал перетвориться в блоці ДПФ, розмір якого не кратний 8, і дорівнює, наприклад 14, то спектр буде відрізнятися від попереднього (рис.14б).

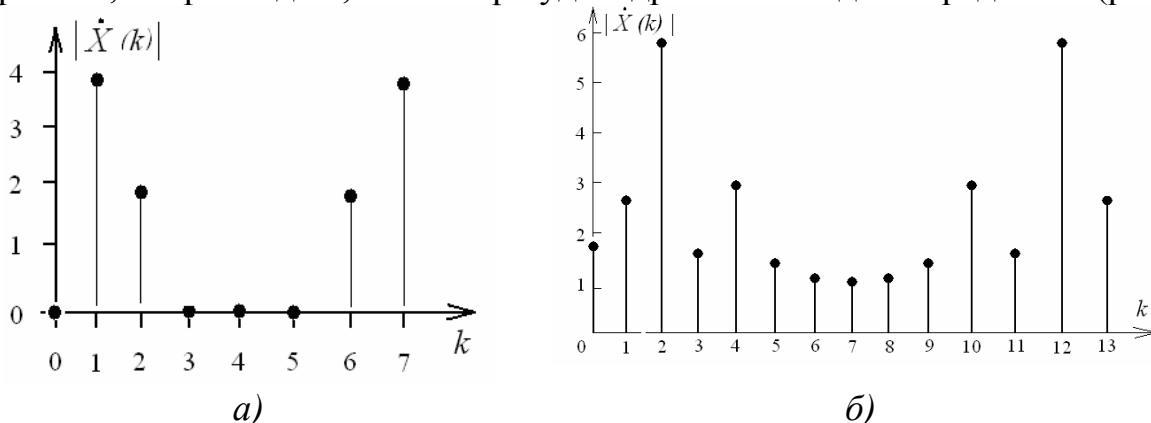


Рис.14 Амплітудний спектр сигналу: а) без розтікання, б) з розтіканням

При ДПФ-14 у блок перетворення послідовність надходить фрагментами з 14 вхідних відліків:  $x(0)=0,3536$ ,  $x(1)=0,3536$ ,  $x(2)=0,6464$ ,  $x(3)=1,0607$ ,  $x(4)=0,3536$ ,  $x(5)=-1,0607$ ,  $x(6)=-1,3536$ ,  $x(7)=-0,3536$ ,  $x(8)=0,3536$ ,  $x(9)=0,3536$ ,  $x(10)=0,6464$ ,  $x(11)=1,0607$ ,  $x(12)=0,3536$ ,  $x(13)=-1,0607$ . Для ДПФ саме цей фрагмент є тим часовим інтервалом, що цілочисельно відповідає періоду

сигналу, і, отже, при ДПФ затверджується, що сигнал має вигляд, показаний на рис.15а. Оскільки оригінальний сигнал і ДПФ-сигнал різні, то їхні спектри теж різні.

На відміну від оригінального сигналу, ДПФ-сигнал не гармонічний, є стрибок (розрив першого роду), що при ДПФ представлений високочастотними гармоніками. І чим більше розрізняються значення відліків сигналу на стиках періодів, тим більше “розтікається” спектр.

Внаслідок дискретного представлення вхідного сигналу та інтерполяції при відновленні, реальний ДПФ-сигнал виглядає трохи згладженим (рис.15б). Проте, ДПФ-сигнал істотно відрізняється від оригінального безперервного сигналу.

Значення відліків оригінального та відновленого сигналу:

Відлік	$x(0)$	$x(1)$	$x(2)$	$x(3)$	$x(4)$	$x(5)$	$x(6)$
$s(t)$	0.3536	0.3536	0.6464	1.0607	0.3536	-1.0607	-1.3536
$s_{dft}(t)$	0.5469	0.4042	0.8399	1.1112	0.5470	-1.0101	-1.1603

Відлік	$x(7)$	$x(8)$	$x(9)$	$x(10)$	$x(11)$	$x(12)$	$x(13)$
$s(t)$	-0.3536	0.3536	0.3536	0.6464	1.0607	0.3536	-1.0607
$s_{dft}(t)$	-0.3031	0.5470	0.4040	0.8397	1.1113	0.5469	-1.0103

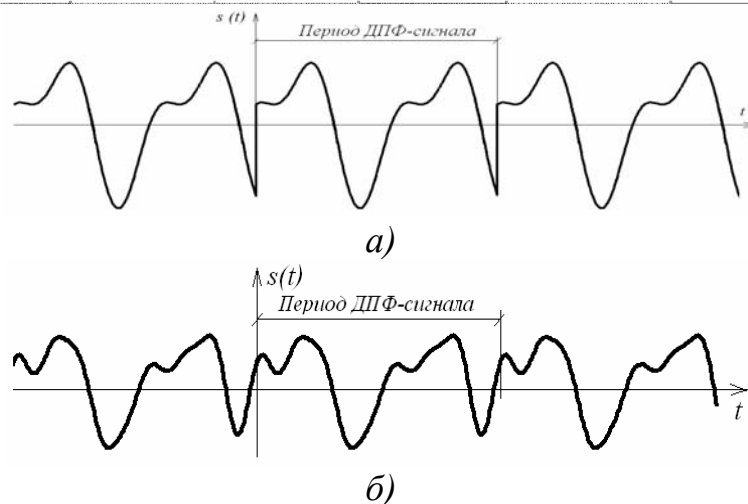


Рис.15 Приклад ДПФ-сигналу: а) вхідний, б) відновлений

Через зміну форми відновленого сигналу змінюється і його спектр (рис.16). Для розглянутого приклада: збільшилася нульова гармоніка (постійна складова сигналу) і сьома гармоніка, що відповідає критерію Найквіста.

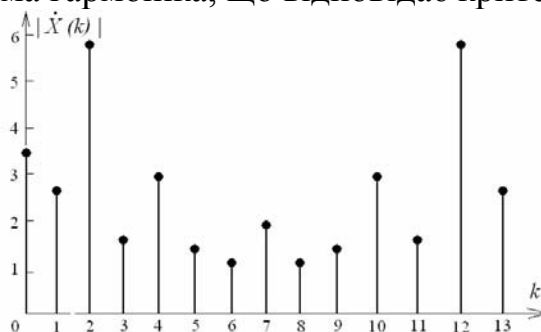


Рис.16 Амплітудний спектр відновленого ДПФ-сигналу

Аналогічні процеси відбуваються по відношенню й до інших фрагментів оригінального сигналу, що надійшли на вхід ДПФ-14. Після фрагменту, який розглянуто, наступними на вхід ДПФ-14 надійдуть відліки, що мають значення:  $x(0)=-1,3536$ ,  $x(1)=-0,3536$ ,  $x(2)=0,3536$ ,  $x(3)=0,3536$ ,  $x(4)=0,6464$ ,  $x(5)=1,0607$ ,  $x(6)=0,3536$ ,  $x(7)=-1,0607$ ,  $x(8)=-1,3536$ ,  $x(9)=-0,3536$ ,  $x(10)=0,3536$ ,  $x(11)=0,3536$ ,  $x(12)=0,6464$ ,  $x(13)=1,0607$ . Відповідний ДПФ-сигнал показаний на рис.17а (спектр - на рис.18а).

Третій фрагмент представлений відліками:  $x(0)=0,3536$ ,  $x(1)=-1,0607$ ,  $x(2)=-1,3536$ ,  $x(3)=-0,3536$ ,  $x(4)=0,3536$ ,  $x(5)=0,3536$ ,  $x(6)=0,6464$ ,  $x(7)=1,0607$ ,  $x(8)=0,3536$ ,  $x(9)=-1,0607$ ,  $x(10)=-1,3536$ ,  $x(11)=-0,3536$ ,  $x(12)=0,3536$ ,  $x(13)=0,3536$ . Відповідний ДПФ-сигнал показаний на рис.17б (спектр - на рис.18б).

Сигнал відновлюється за фрагментами на основі значень спектральних коефіцієнтів. Форма відновленого сигналу показана на рис.19. Аналогічно першому фрагменту, другий і третій фрагменти відновленого сигналу також істотно відрізняються від оригінального сигналу.

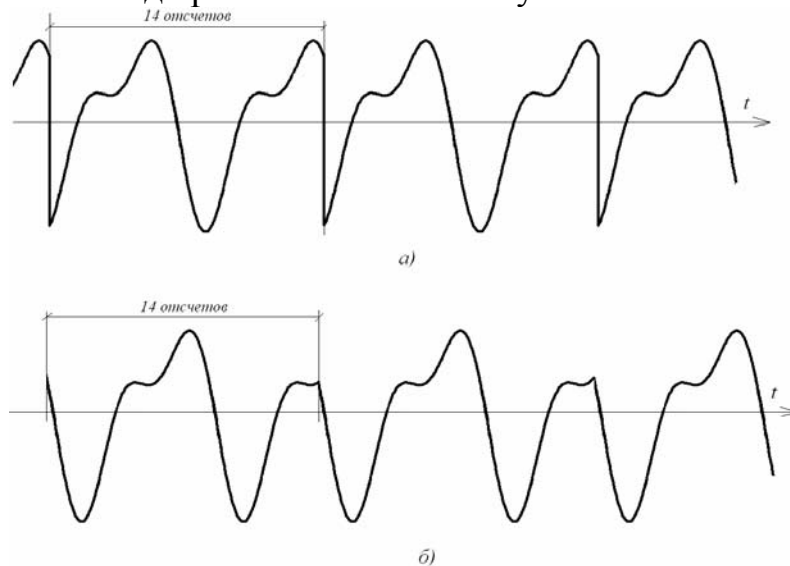


Рис.17 ДПФ-сигнал для другого (а) і третього (б) набору відліків

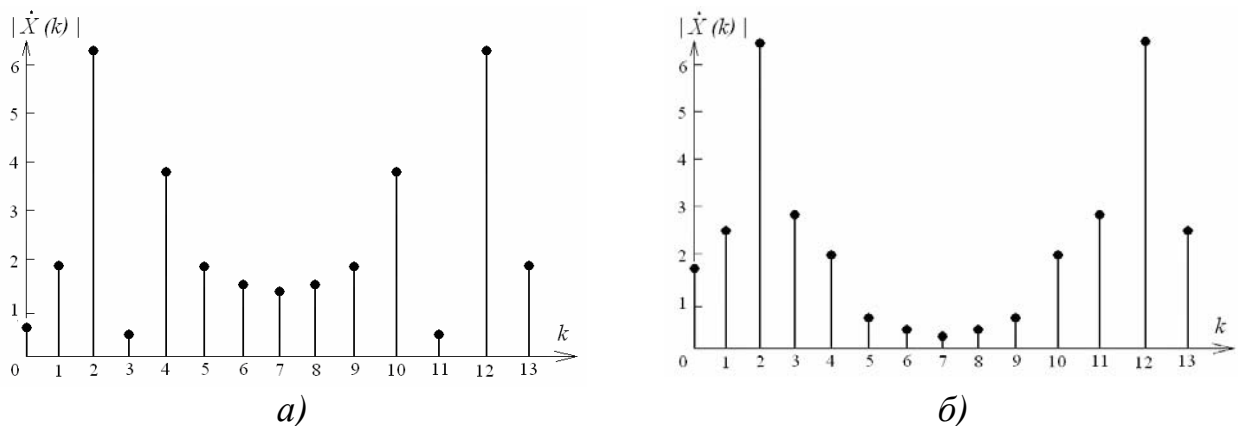


Рис.18 Спектр ДПФ-сигналу для другого (а) і третього (б) набору відліків



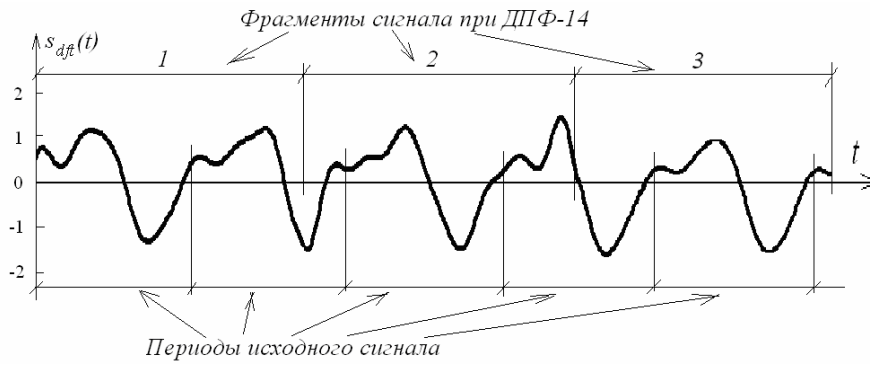


Рис.19 Приклад відновленого сигналу

При практичній реалізації ДПФ застосовують спеціальні *віконні функції* (*weighting functions*), які зменшують розтікання спектра. Перед розрахунком ДПФ сигнал множиться на речовинну ненегативну вагову функцію, що має плавний характер зміни і спадає до країв фрагмента (вікна), розмір якого дорівнює блоку ДПФ. Різновид ДПФ із використанням віконної функції називається *віконним ДПФ*.

Формула ДПФ при використанні вагової функції має вигляд:

$$\dot{X}_v(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot v(n) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \text{ де } v(n) \text{ – віконна функція.}$$

Послідовне застосування вагових функцій до різних інтервалів сигналу враховується введенням у вираження параметра зсуву:

$$\dot{X}_v(k, b) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot v(n - b) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn},$$

де  $b$  – параметр зсуву віконної функції уздовж осі часу.

Застосування віконних функцій послабляє ефекти, пов'язані з виникненням стрибків сигналу при періодичному повторенні послідовності відліків.

Наприклад, “зважування” вихідної послідовності відліків віконною функцією Хемінга, яка має максимум у середині (при  $n=N/2$ ) і плавно спадає до країв ( $n=0$  і  $n=N-1$ ), рівносильне зміні форми безперервного сигналу на інтервалі, рівному розміру блоку ДПФ (рис.20).

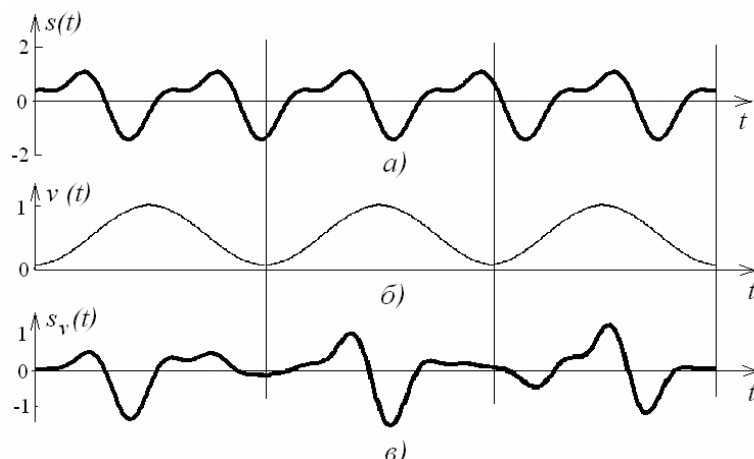


Рис.20 “Зважування” сигналу: а) оригінальний сигнал, б) Хемінг-функція, в) “зважений” сигнал

Застосування будь-якої віконної функції не припускає точного відновлення сигналу. Наприклад, відновлений після зважування сигнал значно відрізняється від оригінального сигналу (рис.21).

Значення відліків оригінального сигналу, “зваженого” і відновленого після зважування показані в таблиці (перший фрагмент):

Відлік	$x(0)$	$x(1)$	$x(2)$	$x(3)$	$x(4)$	$x(5)$	$x(6)$
$s(t)$	0.3536	0.3536	0.6464	1.0607	0.3536	-1.0607	-1.3536
$s_v(t)$	0.0283	0.0469	0.1801	0.5140	0.2486	-0.9380	-1.3355
$s_{vdf}(t)$	-0.0011	0.0086	0.1509	0.4759	0.2193	-0.9761	-1.3649

Відлік	$x(7)$	$x(8)$	$x(9)$	$x(10)$	$x(11)$	$x(12)$	$x(13)$
$s(t)$	-0.3536	0.3536	0.3536	0.6464	1.0607	0.3536	-1.0607
$s_v(t)$	-0.3489	0.3127	0.2486	0.3132	0.2956	0.0469	-0.0849
$s_{vdf}(t)$	-0.3869	0.2832	0.2107	0.2840	0.2576	0.0177	-0.1228

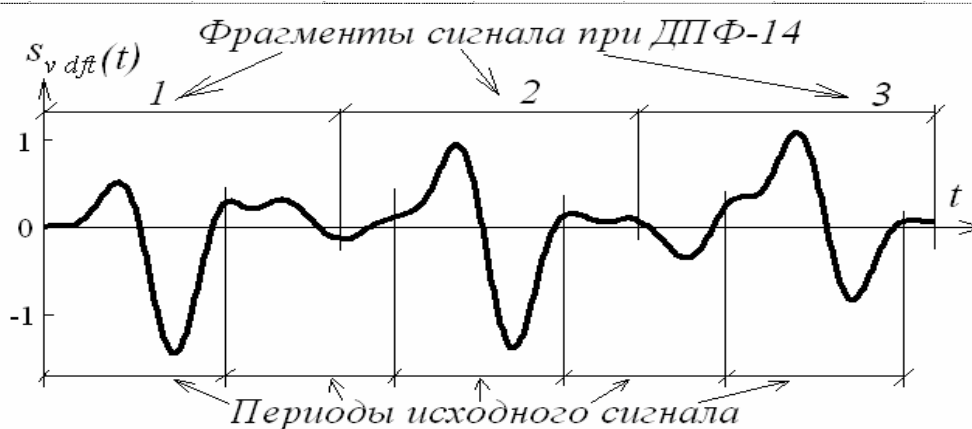


Рис.21 Приклад сигналу, відновленого після зважування без обліку коефіцієнтів втрат

Для точного відновлення зваженого сигналу треба врахувати деякий коефіцієнт втрат, що відповідає вікну, яке було використане. Розрахунок таких коефіцієнтів є складовою частиною теорії віконних функцій.

Оскільки розтікання спектра - неминучий ефект при ДПФ реальних послідовностей кінцевої довжини, то усунути його повністю не представляється можливим.

Мінімізувати наслідок розтікання спектра можна також на наступному етапі обробки сигналу при призначенні рівня “корисних” частот цифрового спектра.

#### 4. Двовимірне ДПФ

При обробці сигналів, які по своїй суті двовимірні, наприклад, у завданнях обробки графіки та відео, застосовується двовимірне ДПФ (2ДПФ). Вхідними даними для перетворення є кінцева прямокутна матриця розмірами  $L \times M$ , яка містить набір дискретних відліків (рис.22). Кожний відлік має 2 координати, що визначають його розташування в матриці. Числове значення відліка відповідає значенню вихідного безперервного сигналу (наприклад, рівню яскравості в зображенні). Результатом 2ДПФ є прямокутна матриця розмірів  $L \times M$ , яка містить значення спектральних коефіцієнтів.

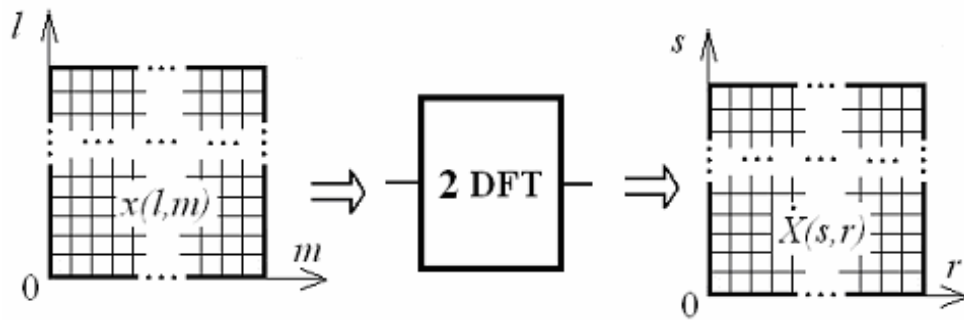


Рис.22 Двовимірне ДПФ

Безпосередній розрахунок 2ДПФ вимагає значних обчислень. Тому 2ДПФ обчислюється за допомогою одномірних перетворень роздільно по стовпцях і рядкам (рис.23).

На першому етапі двовимірного перетворення визначається значення проміжної матриці, що є результатом одномірного ДПФ:

$$\dot{X}_1(s, m) = \sum_{l=0}^{L-1} x(l, m) \cdot W_L^{sl}$$

Виразення представляє покрокове одномірне ДПФ кожного *стовпця* вихідної матриці з використанням матриці перетворення  $W_L$ , у результаті чого формується нова двовимірна матриця. Кожний крок перетворення являє собою множення квадратної матриці  $W_L$  на вектор-стовпець вихідної матриці, номер якого дорівнює  $m$ , у результаті чого формується новий вектор-стовпець (рис.24). Кількість кроків дорівнює кількості стовпців  $M$  вихідної матриці.

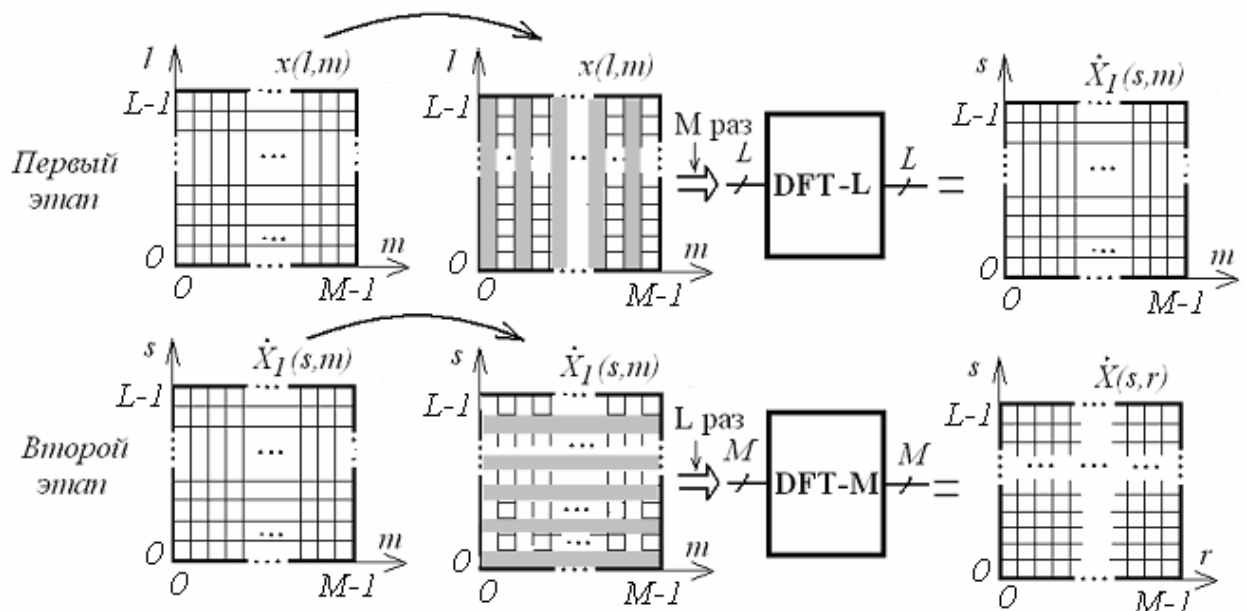


Рис.23 Реалізація двовимірного ДПФ за допомогою двох одномірних ДПФ

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_1(0,m) \\ \dot{X}_1(1,m) \\ \dot{X}_1(2,m) \\ \dot{X}_1(3,m) \\ \dots \\ \dot{X}_1(L-1,m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-j\frac{2\pi}{L}sl} \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} \mathbf{X} \begin{pmatrix} x(0,m) \\ x(1,m) \\ x(2,m) \\ x(3,m) \\ \dots \\ x(L-1,m) \end{pmatrix}$$

$L \times L$

Рис.24 Перший етап двовимірного ДПФ

На другому етапі двовимірного перетворення виконується покрокове множення вектор-рядків проміжної матриці на квадратну матрицю  $W_M$ , у результаті чого визначається результат 2ДПФ (рис.25). Відповідно до правил матричних перетворень вираження має вигляд:

$$\dot{X}(s,r) = \sum_{m=0}^{M-1} \dot{X}_1(s,m) \cdot W_M^{mr}$$

Номер вектор-рядка дорівнює  $s$ , а кількість кроків перетворення дорівнює кількості рядків  $L$  вихідної матриці.

$$\begin{pmatrix} \dot{X}(s,0) & \dot{X}(s,1) & \dot{X}(s,2) & \dot{X}(s,3) & \dots & \dot{X}(s,M-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{X}_1(s,0) & \dot{X}_1(s,1) & \dot{X}_1(s,2) & \dot{X}_1(s,3) & \dots & \dot{X}_1(s,M-1) \end{pmatrix} \mathbf{X} \begin{pmatrix} e^{-j\frac{2\pi}{M}mr} \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

$M \times M$

Рис.25 Другий етап двовимірного ДПФ

Таким чином, обчислення двовимірного  $L \times M$  ДПФ формулюється відповідно до вираження

$$\dot{X}(s,r) = \sum_{m=0}^{M-1} \left[ \sum_{l=0}^{L-1} x(l,m) W_L^{sl} \right] \cdot W_M^{mr} \quad \text{або}$$

$$\dot{X}(s,r) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{L-1} x(l,m) W_L^{sl} W_M^{mr} = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{L-1} x(l,m) e^{-j\frac{2\pi}{L}sl} e^{-j\frac{2\pi}{M}mr},$$

де  $M$  і  $L$  – розміри прямокутної матриці.

Порядок одномірних ДПФ (по рядках і стовпцям) не важливий для одержання вірного результату. Наприклад, 2ДПФ може бути отримане відповідно до вираження

$$\dot{X}(s,r) = \sum_{l=0}^{L-1} \left[ \sum_{m=0}^{M-1} x(l,m) W_M^{mr} \right] \cdot W_L^{sl},$$

яке здійснює спочатку ДПФ по рядках, а потім по стовпцях.

Припустимо виконати перетворення двічі тільки по вектор-стовпцям із проміжним транспонуванням таблиці.

**Зворотне 2ДПФ** обчислюється відповідно до вираження:

$$x(l, m) = \frac{1}{ML} \sum_{r=0}^{M-1} \sum_{s=0}^{L-1} \dot{X}(s, r) e^{j\frac{2\pi}{L}sl} e^{j\frac{2\pi}{M}mr} = \frac{1}{ML} \sum_{r=0}^{M-1} \sum_{s=0}^{L-1} \dot{X}(s, r) W_L^{-sl} W_M^{-mr}.$$

Зворотне 2ДПФ можна обчислювати за допомогою одномірних перетворень по рядках і стовпцям аналогічно методиці обчислення прямого 2ДПФ.

**Наприклад**, двовимірний сигнал представлений наступною матрицею:

1	2	6	3	0	0
0	0	7	8	9	0
0	5	9	10	11	0
0	4	8	12	13	0
0	2	7	9	8	0

На першому етапі 2ДПФ застосовується матриця розміром 5x5, а ДПФ обчислюється по стовпцях.

Результат перетворення:

1	13	37	72	41	0
1	-4.7 + j1.3	-3.4 - j0.6	-9.5 + j2.1	-14.2 + j0.2	0
1	3.2 + j2.1	-0.1 + j1.0	-4.0 - j1.3	-6.3 - j2.5	0
1	3.2 - j2.1	-0.1 - j1.0	-4.0 + j1.3	-6.3 + j2.5	0
1	-4.7 - j1.3	-3.4 + j0.6	-9.5 - j2.1	-14.2 - j0.2	0

На другому етапі 2ДПФ застосовується матриця розміром 6x6, а ДПФ обчислюється по строках. Результат перетворення:

134,0	-73,5 - j7,8	-2,5 - j14,7	24,0	-2,5 + j14,7	-73,5 + j7,8
-30,8 + j3,1	17,4 - j6,6	4,4 + j15,0	-2,4 - j3,8	0,7 - j11,7	16,6 + j4,0
-6,2 - j0,7	14,6 - j5,0	-2,5 + j1,1	-4,6 - j2,4	-0,2 - j4,3	4,9 + j11,3
-6,2 + j0,7	4,9 - j11,3	-0,2 + j4,3	-4,6 + j2,4	-2,5 - j1,1	14,6 + j5,0
-30,8 - j3,1	16,6 - j4,0	0,7 + j11,7	-2,4 + j3,8	4,4 - j15	17,4 + j6,6

Амплітудний спектр:

134	73.9	14.9	24.0	14.9	73.9
31.0	18.6	15.6	4.5	11.7	17.0
6.2	15.4	2.7	5.2	4.3	12.3
6.2	12.3	4.3	5.2	2.7	15.4
31.0	17.0	11.7	4.5	15.6	18.6

Фазовий спектр:

0	-3.0	-1.7	0	1.7	3.0
3.0	-0.4	1.3	-2.1	-1.5	0.2
-3.0	-0.3	2.7	-2.7	-1.6	1.2
3.0	-1.2	1.6	2.7	-2.7	0.3
-3.0	-0.2	1.5	2.1	-1.3	0.4

В 2ДПФ зберігаються властивості одномірного перетворення. Наприклад, властивість симетрії, що чітко проявилось в значеннях стовпців у матриці перетворення після першого етапу. На другому етапі мнима частина відсутня тільки в першому рядку вихідних даних, а інші рядки мають комплексне представлення. Тому симетрія присутня тільки в першому рядку результуючої матриці.

Незважаючи на це, через надмірність матриць ДПФ у результаті 2ДПФ однаково є присутня прихована симетричність.

При практичній реалізації в обробці графіки та відео матриця, як правило, має квадратну форму. Тоді вираження прямого і зворотного 2ДПФ приймають вид ( $N=M=L$ ):

$$\dot{X}(s, r) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} x(l, m) e^{-j\frac{2\pi}{N}sl} e^{-j\frac{2\pi}{N}mr} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} x(l, m) W_N^{sl} W_N^{mr}$$

$$x(l, m) = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} \sum_{s=0}^{N-1} \dot{X}(s, r) e^{j\frac{2\pi}{N}sl} e^{j\frac{2\pi}{N}mr} = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} \sum_{s=0}^{N-1} \dot{X}(s, r) W_N^{-sl} W_N^{-mr},$$

$$\text{або} \quad \dot{X}(k_1, k_2) = \frac{1}{N} \sum_{n_2=0}^{N-1} \sum_{n_1=0}^{N-1} x(n_1, n_2) e^{-j\frac{2\pi}{N}k_1n_1} e^{-j\frac{2\pi}{N}k_2n_2},$$

$$x(n_1, n_2) = \frac{1}{N} \sum_{k_2=0}^{N-1} \sum_{k_1=0}^{N-1} \dot{X}(k_1, k_2) e^{j\frac{2\pi}{N}n_1k_1} e^{j\frac{2\pi}{N}n_2k_2}.$$

### НАВЧАЛЬНА ЛІТЕРАТУРА З ТЕМИ

1. Сергиенко А.Б.. Цифровая обработка сигналов.-СПб.:Питер,2011.-768с.
2. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов.-М.: "Бином-Пресс",2007.-656с.