# **ЦІЛОЧИСЕЛЬНЕ ПРОГРАМУВАННЯ (ЦП)**

Приклад.

Розв’язати задачу ЦП методом відсікаючих площин (Гоморі).

$$F\left(x\_{1},x\_{2}\right)=x\_{1}+4x\_{2}\rightarrow max$$

$$\left\{\begin{array}{c}2x\_{1}+4x\_{2}\leq 7\\10x\_{1}+3x\_{2}\leq 15\\x\_{1},x\_{2}\geq 0\\x\_{1},x\_{2}-цілі\end{array}\right.$$

Відкинувши умову цілочисельності, розв’яжемо отриману задачу ЛП:

$$F\left(x\_{1},x\_{2}\right)=x\_{1}+4x\_{2}\rightarrow max$$

$$\left\{\begin{array}{c}2x\_{1}+4x\_{2}\leq 7\\10x\_{1}+3x\_{2}\leq 15\\x\_{1},x\_{2}\geq 0\end{array}\right.$$

Використовуємо метод симплекс-таблиць:

$$F\left(x\_{1},x\_{2}\right)=x\_{1}+4x\_{2}+0x\_{3}+0x\_{4}\rightarrow max$$

$$\left\{\begin{array}{c}2x\_{1}+4x\_{2}+1x\_{3}+0x\_{4}=7\\10x\_{1}+3x\_{2}+0x\_{3}+1x\_{4}=15\\x\_{1},…,x\_{4}\geq 0\end{array}\right.$$

Заповнимо вихідну симплекс-таблицю:

Таблиця 1

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | C | **–** | 1 | 4 | 0 | 0 |
|  | B | $$A\_{0}$$ | $$A\_{1}$$ | $$A\_{2}$$ | $$A\_{3}$$ | $$A\_{4}$$ |
| 0 | $$x\_{3}$$ | 7 | 2 | **4** | 1 | 0 |
| 0 | $$x\_{4}$$ | 15 | 10 | 3 | 0 | 1 |
|  | $$∆$$ | 0 | -1 | -4 | 0 | 0 |

Визначимо:

Напрямний стовпець – $A\_{2}$;

напрямний рядок – $x\_{3}$;

напрямний елемент – $x\_{32}=4$.

Таблиця 2

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | C | **–** | 1 | 4 | 0 | 0 |
|  | B | $$A\_{0}$$ | $$A\_{1}$$ | $$A\_{2}$$ | $$A\_{3}$$ | $$A\_{4}$$ |
| 4 | $$x\_{2}$$ | $$\frac{7}{4}$$ | $$\frac{1}{2}$$ | 1 | $$\frac{1}{4}$$ | 0 |
| 0 | $$x\_{4}$$ | $$\frac{39}{4}$$ | $$\frac{34}{4}$$ | 0 | $$-\frac{3}{4}$$ | 1 |
|  | $$∆$$ | 7 | 1 | 0 | 1 | 0 |

Отримано оптимальний розв’язок задачі:

$x\_{1}=0,x\_{2}=1\frac{3}{4},F\_{max}=7-$ не є цілочисельним.

Сформуємо правильне відсічення:

$$\frac{1}{2}x\_{1}+\frac{1}{4}x\_{3}\geq \frac{3}{4}$$

Виконаємо необхідні перетворення:

$$\frac{1}{2}x\_{1}+\frac{1}{4}x\_{3}-x\_{5}=\frac{3}{4}$$

$$-\frac{3}{4}=x\_{5}-\frac{1}{2}x\_{1}-\frac{1}{4}x\_{3}$$

Додамо сформоване додаткове обмеження в останню симплекс-таблицю у вигляді рядка; також у неї додається додатковий стовпець (через введення вільної змінної $x\_{5}$):

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | C | **–** | 1 | 4 | 0 | 0 | 0 |
|  | B | $$A\_{0}$$ | $$A\_{1}$$ | $$A\_{2}$$ | $$A\_{3}$$ | $$A\_{4}$$ | $$A\_{5}$$ |
| 4 | $$x\_{2}$$ | $$\frac{7}{4}$$ | $$\frac{1}{2}$$ | 1 | $$\frac{1}{4}$$ | 0 | 0 |
| 0 | $$x\_{4}$$ | $$\frac{39}{4}$$ | $$\frac{34}{4}$$ | 0 | $$-\frac{3}{4}$$ | 1 | 0 |
| 0 | $$x\_{5}$$ | $$-\frac{3}{4}$$ | $$-\frac{1}{2}$$ | 0 | $$-\frac{1}{4}$$ | 0 | 1 |
|  | $$∆$$ | 7 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
|  | $$θ$$ |  | 2 | **–** | 4 | **–** | **–** |

Напрямний рядок – $x\_{5}$;

напрямний стовпець – $A\_{1}$;

напрямний елемент – $x\_{51}=-\frac{1}{2}$.

Далі розв’язуємо задачу за допомогою двоїстого симплекс-методу.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | C | **–** | 1 | 4 | 0 | 0 | 0 |
|  | B | $$A\_{0}$$ | $$A\_{1}$$ | $$A\_{2}$$ | $$A\_{3}$$ | $$A\_{4}$$ | $$A\_{5}$$ |
| 4 | $$x\_{2}$$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | $$x\_{4}$$ | -3 | 0 | 0 | **-5** | 1 | 17 |
| 1 | $$x\_{1}$$ | $$\frac{3}{2}$$ | 1 | 0 | $$\frac{1}{2}$$ | 0 | -2 |
|  | $$∆$$ | $$\frac{11}{2}$$ | 0 | 0 | $$\frac{1}{2}$$ | 0 | 2 |
|  | $$θ$$ |  | **–** | **–** | $$\frac{1}{10}$$ | **–** | **–** |

Напрямний рядок – $x\_{4}$;

напрямний стовпець – $A\_{3}$;

напрямний елемент – $x\_{43}=-5$.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | C | **–** | 1 | 4 | 0 | 0 | 0 |
|  | B | $$A\_{0}$$ | $$A\_{1}$$ | $$A\_{2}$$ | $$A\_{3}$$ | $$A\_{4}$$ | $$A\_{5}$$ |
| 4 | $$x\_{2}$$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | $$x\_{3}$$ | $$\frac{3}{5}$$ | 0 | 0 | 1 | $$-\frac{1}{5}$$ | $$-\frac{17}{5}$$ |
| 1 | $$x\_{1}$$ | $$\frac{12}{10}$$ | 1 | 0 | 0 | $$\frac{1}{10}$$ | $$-\frac{3}{10}$$ |
|  | $$∆$$ | $$\frac{52}{10}$$ | 0 | 0 | 0 | $$\frac{1}{10}$$ | $$\frac{37}{10}$$ |

Отримано оптимальний розв’язок: $x\_{1}=\frac{12}{10},x\_{2}=1,F\_{max}=\frac{52}{10}$, але він ще не є цілочисельним. Тому формуємо наступну додаткову умову-обмеження:

$$\frac{1}{10}x\_{4}+\frac{7}{10}x\_{5}\geq \frac{2}{10}$$

$$\frac{1}{10}x\_{4}+\frac{7}{10}x\_{5}-x\_{6}=\frac{2}{10}$$

$$-\frac{2}{10}=x\_{6}-\frac{1}{10}x\_{4}-\frac{7}{10}x\_{5}$$

Та додаємо її до останньої симплекс-таблиці:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | C | **–** | 1 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|  | B | $$A\_{0}$$ | $$A\_{1}$$ | $$A\_{2}$$ | $$A\_{3}$$ | $$A\_{4}$$ | $$A\_{5}$$ | $$A\_{6}$$ |
| 4 | $$x\_{2}$$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | $$x\_{3}$$ | $$\frac{3}{5}$$ | 0 | 0 | 1 | $$-\frac{1}{5}$$ | $$-\frac{17}{5}$$ | 0 |
| 1 | $$x\_{1}$$ | $$\frac{12}{10}$$ | 1 | 0 | 0 | $$\frac{1}{10}$$ | $$-\frac{3}{10}$$ | 0 |
| 0 | $$x\_{6}$$ | $$-\frac{2}{10}$$ | 0 | 0 | 0 | $$-\frac{1}{10}$$ | $$-\frac{7}{10}$$ | 1 |
|  | $$∆$$ | $$\frac{52}{10}$$ | 0 | 0 | 0 | $$\frac{1}{10}$$ | $$\frac{37}{10}$$ | 0 |
|  | $$θ$$ |  | **–** | **–** | **–** | 1 | $$\frac{37}{7}$$ | **–** |

Напрямний рядок – $x\_{6}$;

напрямний стовпець – $A\_{4}$;

напрямний елемент – $x\_{64}=-\frac{1}{10}$.

Розв’язуємо далі двоїстим симплекс-методом:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | C | **–** | 1 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|  | B | $$A\_{0}$$ | $$A\_{1}$$ | $$A\_{2}$$ | $$A\_{3}$$ | $$A\_{4}$$ | $$A\_{5}$$ | $$A\_{6}$$ |
| 4 | $$x\_{2}$$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | $$x\_{3}$$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | -2 | -2 |
| 1 | $$x\_{1}$$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 |
| 0 | $$x\_{4}$$ | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | -10 |
|  | $$∆$$ | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 1 |

! Отримано оптимальний цілочисельний розв’язок задачі!

$$x\_{1}=1,x\_{2}=1,F\_{max}=5.$$

**УРА!**

Цілочисельне програмування (ЦП)

$$F=\sum\_{j=1}^{n}c\_{j}x\_{j}\rightarrow max$$

$$\left\{\begin{array}{c}\sum\_{j=1}^{n}a\_{ij}x\_{i}≶b\_{i},i=\overline{1,m}\\x\_{j}\geq 0,j=\overline{1,n} \\x\_{j}-цілі, j=\overline{1,n}\end{array}\right.$$

Метод відсікаючих площин (або правильних відсічень, або Гоморі).

Для i-ої змінної

$$\sum\_{j=m+1}^{n}γ\_{ij}x\_{j}\geq γ\_{i0},$$

$γ\_{ij}$ $x\_{ij}$ $j$ $i$

$γ\_{io}$ $i$ $x\_{io}$

$$\left.\begin{array}{c}γ\_{ij}=x\_{ij}-\left[x\_{ij}\right],x\_{ij}\geq \left[x\_{ij}\right]\\γ\_{io}=x\_{io}-\left[x\_{io}\right],x\_{io}\geq \left[x\_{io}\right]\end{array}\right\}⟹0<γ\_{ij}<1; 0<γ\_{io}<1$$

$$\sum\_{j=m+1}^{n}γ\_{ij}x\_{j}-x\_{n+1}=γ\_{io}$$

$$-γ\_{io}=x\_{n+1}-\sum\_{j=m+1}^{n}γ\_{ij}x\_{j}$$