

Лабораторна робота № 8

Вейвлет-аналіз

Мета: здобуття і закріплення навиків роботи в середовищі Matlab з пакетом розширення Wavelet Toolbox. Дослідження вейвлет-спектру типових сигналів (стаціонарних і нестаціонарних).

Теоретичне введення

У основі Фур'є-аналізу лежить твердження, що будь-яку 2π -періодичну функцію можна розкласти на складові, тобто може бути отримана суперпозицією цілочисельних розтягувань базисної функції e^{ix} .

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (1),$$

де c_n – коефіцієнти Фур'є

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (2).$$

Процес розкладання функції проілюстрований на рис.8.1

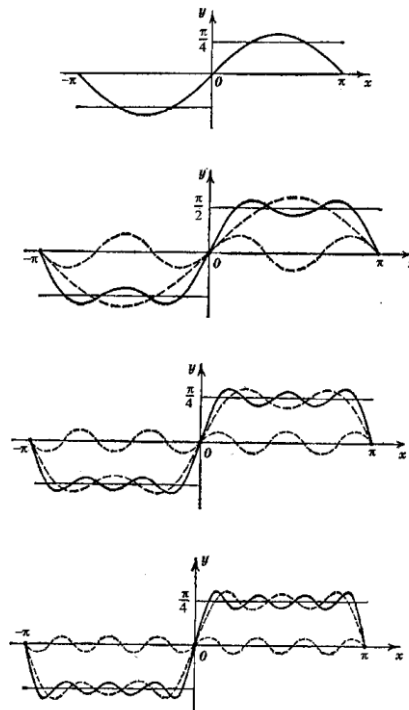


Рис. 8.1.

Перетворення Фур'є

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt$$

дає спектральну інформацію про сигнал і описує його поведінку в частотній області. При переході в частотну область повністю втрачається інформація про час, що робить непридатним метод спектрального аналізу при обробці нестационарних сигналів, в яких визначальне значення має момент часу, в який сталася та чи інша подія.

На відміну від короткочасного перетворення Фур'є, яке забезпечує рівномірну сітку в частотно-тимчасовій області, вейвлет-перетворення має нерівномірний дозвіл, що дозволяє досліджувати сигнал як локально, так і повністю.

Оскільки частота обернено пропорційна періоду, то потрібне вузьке вікно для локалізації що високочастотної складової сигналу і ширше для низькочастотної складової. Короткочасне перетворення Фур'є допустимо застосовувати для сигналу з порівняно вузькою смугою частот. Для широкосмугового сигналу хотілося б мати вікно, здатне змінювати свою ширину при зміні частоти

Введемо функцію $\varphi \in L^2(R)$, що задовольняє умову

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\varphi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$$

і назвемо її «базисним вейвлетом».

Відносно кожного базисного вейвлета інтегральне вейвлет-перетворення визначається як

$$(W_{\varphi} f)(b, a) = |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\varphi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt, \text{ где } a, b \in R; \quad a \neq 0$$

Позначимо

$$\varphi_{b;a}(t) = |a|^{-\frac{1}{2}} \varphi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

Інтегральне перетворення набуде вигляду

$$(W_{\varphi} f)(b, a) = \langle f, \varphi_{b;a} \rangle$$

Якщо центр і радіус функції-вікна φ , відповідно, рівні t^* і Δ_{φ} , то $\varphi_{b;a}(t)$ є функція-вікно з центром $b+at^*$ і радіусом. Отже, інтегральне вейвлет-перетворення локалізує аналоговий сигнал в тимчасовому вікні

$$[b+at^* - a\Delta_{\varphi}, b+at^* + a\Delta_{\varphi}].$$

Розглянемо

$$\frac{1}{2\pi} \hat{\varphi}_{b;a}(\omega) = \frac{|a|^{-\frac{1}{2}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \varphi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \frac{a|a|^{-\frac{1}{2}}}{2\pi} e^{-i\omega b} \hat{\varphi}(a\omega)$$

Хай центр і радіус функції-вікна $\hat{\varphi}$ рівні, відповідно, ω^* і $\Delta_{\hat{\varphi}}$.

Тоді, змістимо центр вікна на ω^* в 0 і позначимо

$$\eta(\omega) = \hat{\phi}(\omega + \omega^*)$$

Застосовуючи рівність Парсеваля

$$(W_\varphi f)(b, a) = \frac{a|a|^{-\frac{1}{2}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{ib\omega} \overline{\eta\left(a\left(\omega - \frac{\omega^*}{a}\right)\right)} d\omega$$

Очевидно, що вікно

$$\eta\left(a\left(\omega - \frac{\omega^*}{a}\right)\right) = \eta(a\omega - \omega^*) = \hat{\phi}(a\omega)$$

Має радіус $\frac{1}{a} \Delta_{\hat{\phi}}$.

Інтегральне вейвлет-перетворення також локалізує сигнал по частоті з вікном

$$\left[\frac{\omega^*}{a} - \frac{1}{a} \Delta_{\hat{\phi}}, \frac{\omega^*}{a} + \frac{1}{a} \Delta_{\hat{\phi}} \right]$$

Аналогічно перетворенню Габора введемо частотно-часове вікно для інтегрального вейвлет-перетворення:

$$\left[b + at^* - a\Delta_\varphi, b + at^* + a\Delta_\varphi \right] \times \left[\frac{\omega^*}{a} - \frac{1}{a} \Delta_{\hat{\phi}}, \frac{\omega^*}{a} + \frac{1}{a} \Delta_{\hat{\phi}} \right]$$

Видно, що вікно автоматично звужується при високочастотних явищах (малих масштабах) і розширюється при низькочастотних (великих масштабах).

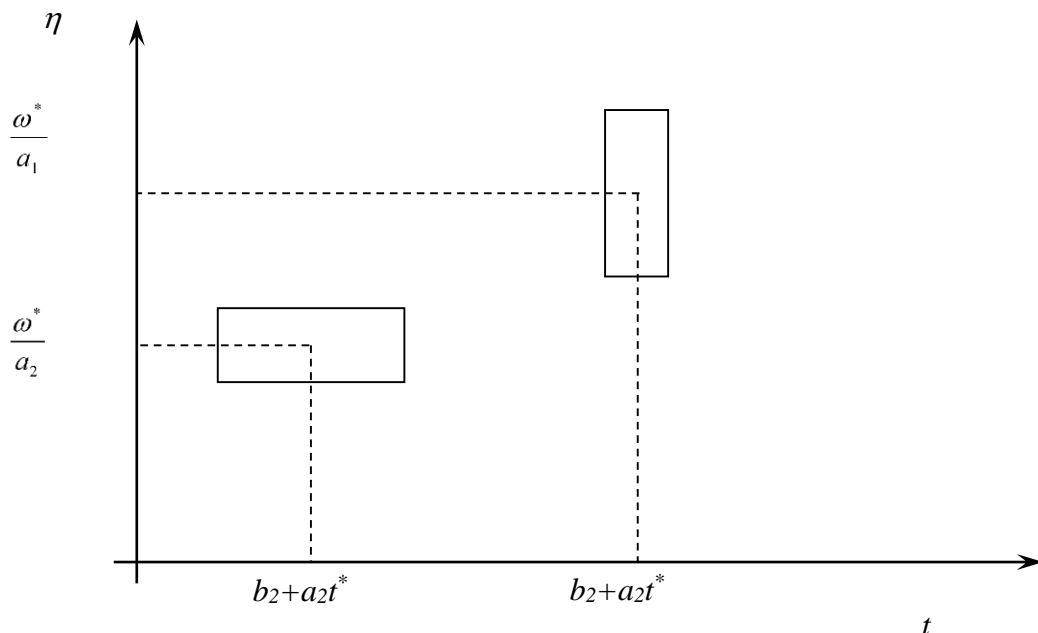


Рис. 8.2

Порядок виконання роботи:

1. Згенерувати стаціонарні, нестаціонарні сигнали і сигнали з шумом;

Приклад:

```
t=0:0.1:6*pi;
```

Стаціонарні сигнали

```
y=sin(t);
```

```
z=sin(t)+sin(2*t);
```

Сигнал з шумом

```
N=rand(1,189);
```

```
w=sin(t);
```

```
w=w+N;
```

Нестаціонарний сигнал

```
t=0:0.1:2*pi;
```

```
w(1:63)=sin(t);
```

```
w(64:126)=cos(t);
```

```
w(127:190)=cos(2*t);
```

Далі їх потрібно зберегти (кожен сигнал в окремому файлі), для цього у вікні робочої області виділяється потрібна змінна і в контекстному меню вибирається пункт Save Selection As..

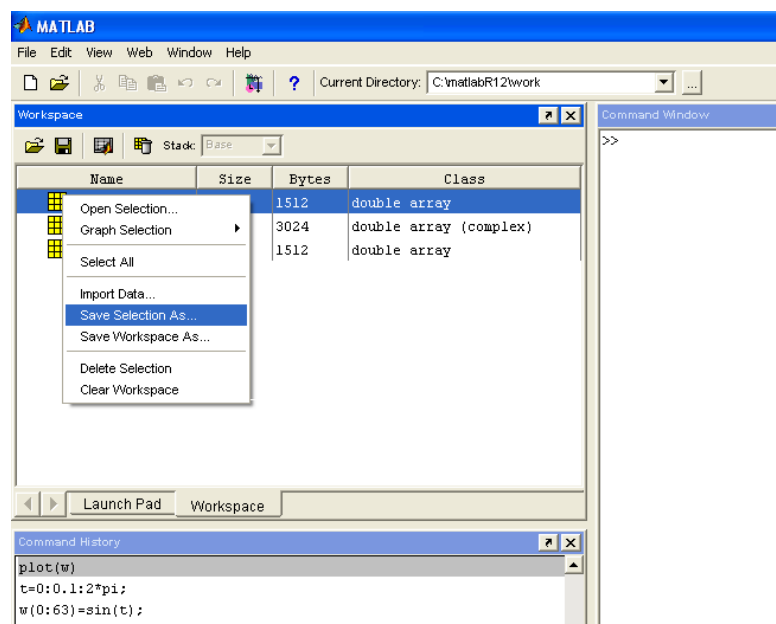


Рис. 8.3

2. Проаналізувати сигнали з використанням перетворення Фур'є, пояснити результати;

Для побудови Фур'є-спектру використовується функція

$\text{Fft}(\text{ім'я сигналу, число точок ДПФ})$

Приклад:

```
Y=fft(Sig,512)
```

```
A=abs(Y);
```

$plot(A(1:length(A)/2));$

3. Розглянути короткочасне перетворення Фур'є для аналізованого сигналу, пояснити результати;

Для побудови спектрограми використовується функція
 $Specgram(\text{имя сигнала})$

Приклад

$Specgram(\text{Sig})$

4. Проаналізувати отримані сигнали з використанням різних вейвлетів (не менше 3), пояснити результати, визначити «оптимальний» (що дає найбільшу інформацію) вейвлет для сигналу;

Для побудови вейвлет-спектру можна використовувати графічний інтерфейс, виклик якого здійснюється командою $wavemenu$.

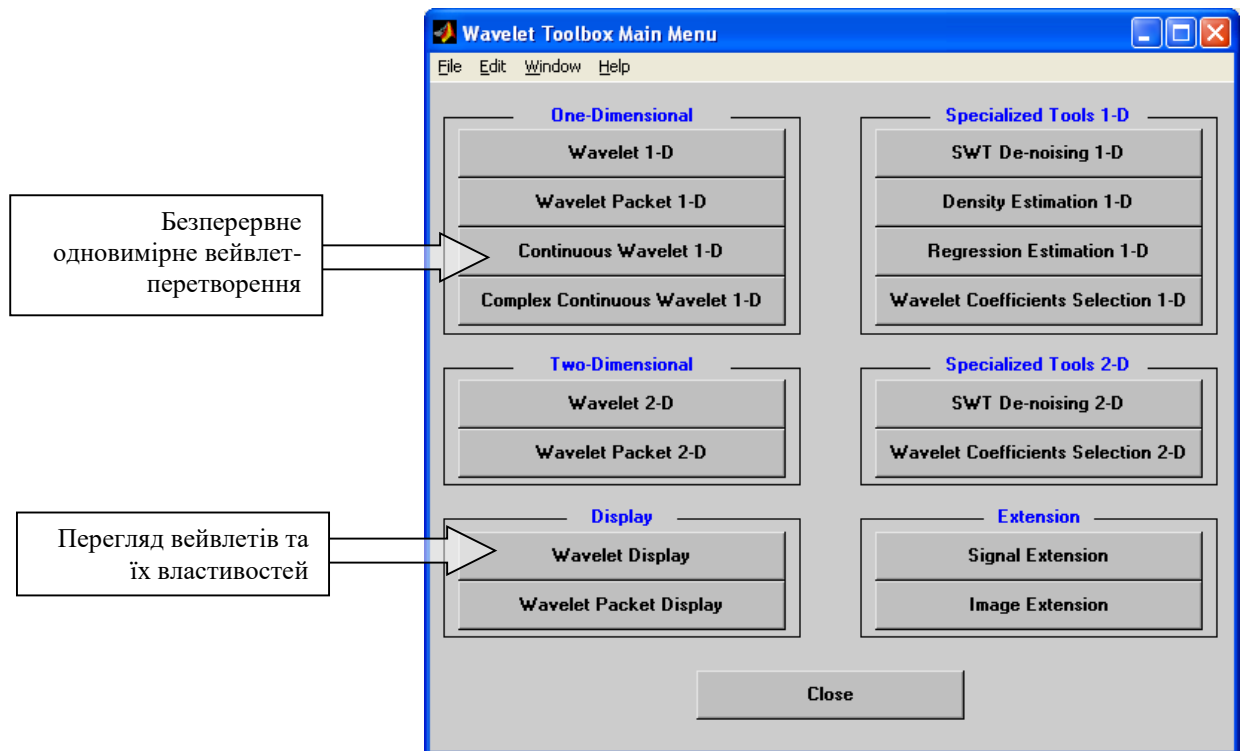


Рис. 8.4

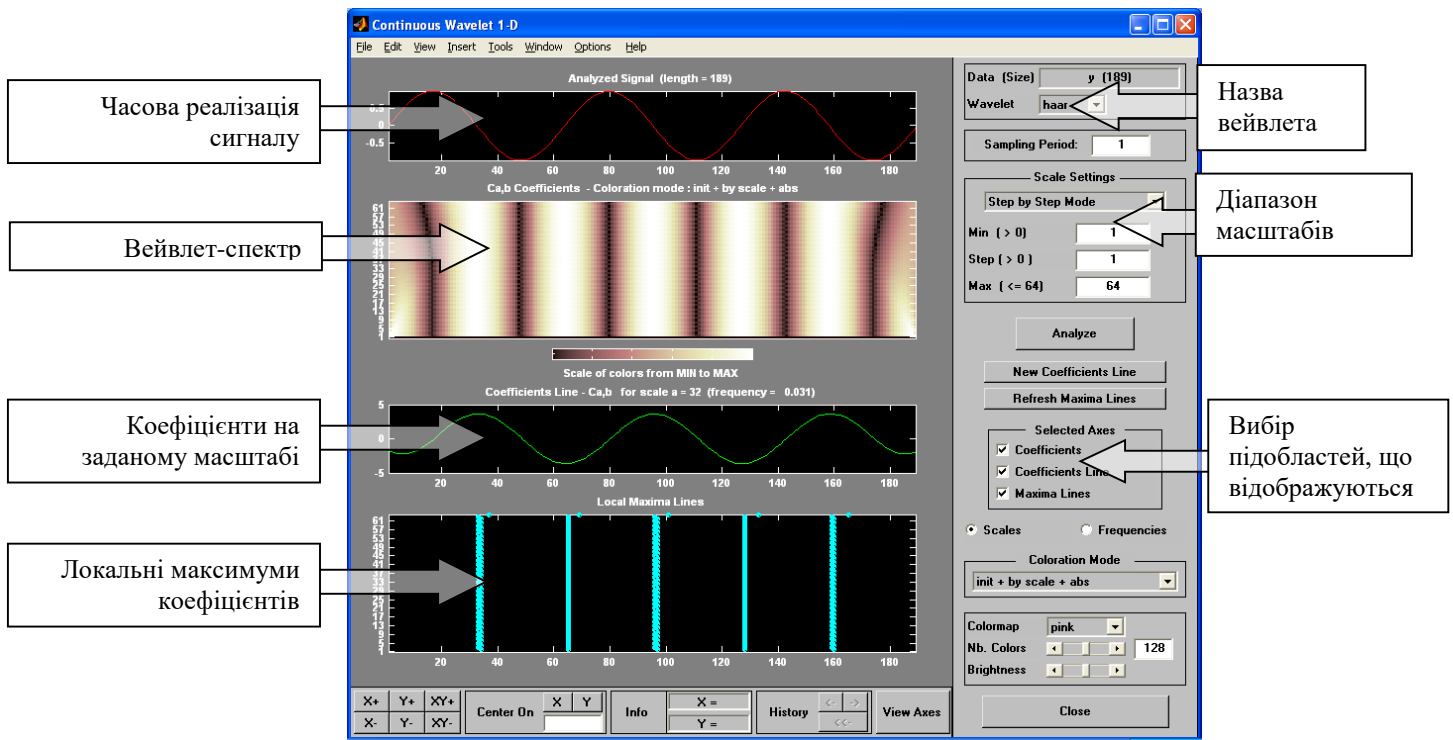


Рис. 8.5

Для завантаження сигналу використовується пункт меню File/load Signal

Нижче наведений приклад аналізу сигналу $z = \sin(t) + \sin(2*t)$. Видно, що сигнал містить дві частоти, розділених на масштабі ~ 70 . Вейвлет-коефіцієнти міняються періодично, що доводить періодичність сигналу.

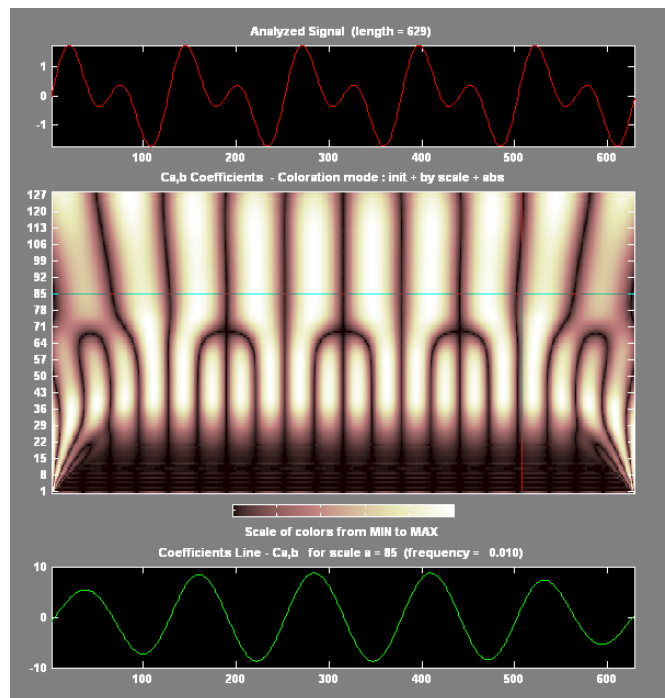


Рис. 8.6

При аналізі нестационарного сигналу вейвлет-спектр показує зміну частоти у момент часу 500, а також зміна, що відбулася у момент часу ~ 250 , причому можна зробити висновок, що частота сигналу в даному випадку залишилася незмінною.

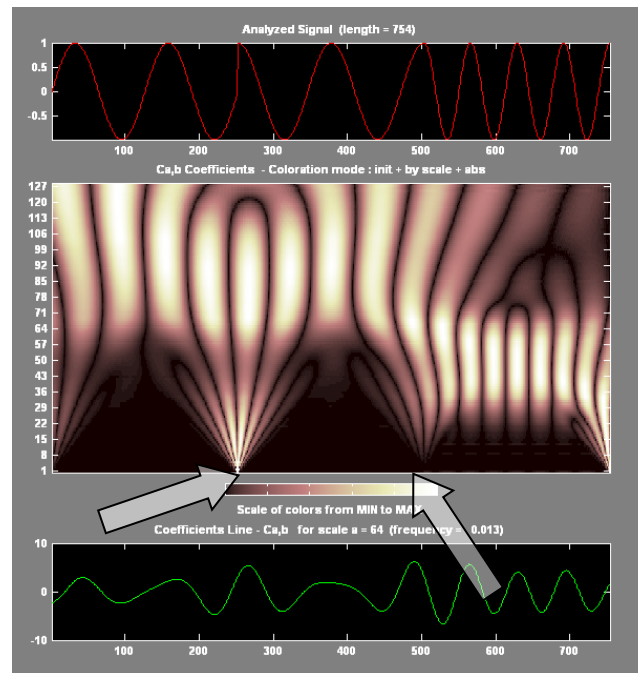


Рис. 8.7

5. Порівняти і пояснити результати Фур'є- і вейвлет-аналізів.

Вимоги до звіту.

Звіт повинен містити:

1. Часову реалізацію досліджуваних сигналів; Для побудови графіків використовується функція `plot(ім'я змінної)`
2. Фур'є-спектри сигналів;
3. Спектрограми сигналів;
4. Форми використовуваних вейвлетів;

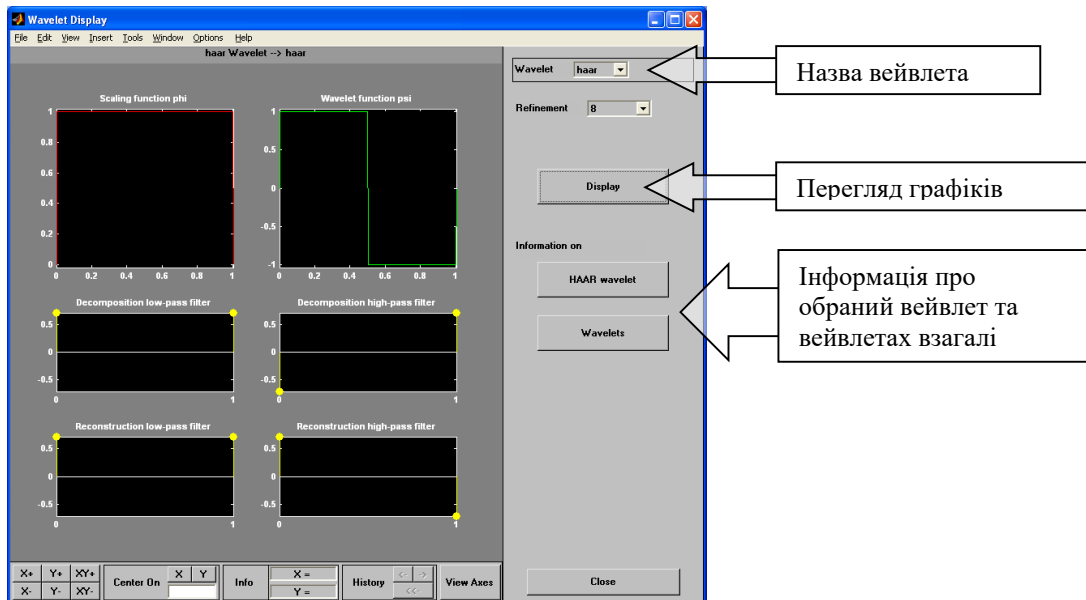


Рис. 8.8

5. Вейвлет-спектри сигналів;
6. Результати аналізу і порівняння.

Варіанти завдань

Для всіх варіантів

- t_1, t_2, t_3, t_4 вибираються так, щоб отримувані сигнали містили не менше 2-х періодів
- для генерації сигналу з шумом використовувати стаціонарний сигнал і шум з рівномірною щільністю розподілу.

Варіант №1

$$Y=3\sin(t)$$

$$w(t_1..t_2)=\sin(t); w(t_2..t_3)=\sin(5t); w(t_3..t_4)=\sin(10t);$$

Варіант №2

$$Y=\sin(5t)$$

$$w(t_1..t_2)=\sin(t); w(t_2..t_3)=\sin(10t); w(t_3..t_4)=\sin(5t);$$

Варіант №3

$$Y=\sin(10t)$$

$$w(t_1..t_2)=\sin(t); w(t_2..t_3)=\sin(5t); w(t_3..t_4)=\sin(10t);$$

Варіант №4

$$Y=\sin(t)+\sin(5t)$$

$$w(t_1..t_2)=50\sin(t); w(t_2..t_3)=\sin(5t); w(t_3..t_4)=50\sin(5t);$$

Варіант №5

$$Y=\sin(t)+\sin(10t)$$

$$w(t_1..t_2)=\text{square}(t); w(t_2..t_3)=\text{square}(10t); w(t_3..t_4)=\text{square}(5t);$$

Варіант №6

$$Y=\sin(10t)+\sin(2t)$$

$$w(t_1..t_2)=\text{sawtooth}(t); w(t_2..t_3)=\text{sawtooth}(10t); w(t_3..t_4)=\text{sawtooth}(5t);$$

Варіант №7

$$Y=\sin(t)+\sin(10t)+\sin(15t)$$

$w(t_1..t_2) = \text{sawtooth}(t, 0.5)$; $w(t_2..t_3) = \text{sawtooth}(10t, 0.5)$; $w(t_3..t_4) = \text{sawtooth}(5t, 0.5)$;

Вариант №8

$$Y = \sin(t) + \sin(15t)$$

$$w(t_1..t_2) = \text{sinc}(t)$$
; $w(t_2..t_3) = \text{sinc}(10t)$; $w(t_3..t_4) = \text{sinc}(5t)$;

Вариант №9

$$Y = \sin(t) + \cos(10t)$$

$$w(t_1..t_2) = \sin(t) + \cos(5t)$$
; $w(t_2..t_3) = \sin(t) + \cos(10t)$; $w(t_3..t_4) = \sin(t) + \cos(15t)$;

Вариант №10

$$Y = \sin(t) + \cos(20t)$$

$$w(t_1..t_2) = \sin(15t) + \cos(5t)$$
;

$$w(t_2..t_3) = \sin(10t) + \cos(10t)$$
; $w(t_3..t_4) = \sin(5t) + \cos(15t)$;