1. ПЛОСКІ ПРЯМОКУТНІ КООРДИНАТИ ГАУССА-КРЮГЕРА

Тема 1.1: Плоскі прямокутні координати Гаусса-Крюгера.

1. Плоскі координати в геодезії
2. Загальні відомості про геодезичні проекції
3. Основні рівняння конформної проекції Гаусса
4. Перетворення полярних координат

1. Плоскі координати в геодезії

Система координат і математична обробка матеріалів обмежених за територією геодезичних мереж, що прокладаються для геодезичного забезпечення інженерно-технічних, сільськогосподарських чи будь-яких інших видів робіт, повинні бути найбільш простими. Для інженерно-геодезичних робіт не є доцільним застосування системи геодезичних координат, не зважаючи на те, що вона є єдиною для всієї поверхні земного еліпсоїда, оскільки її координати отримуються шляхом досить складних обчислень і до того в дуговій мірі, а лінійні значення дугових одиниць змінюються зі зміною широти місця. Не кращий варіант є застосування для вказаних цілей просторових прямокутних координат. Найбільш простою є прямокутна система координат на площині, хоча з поверхнею земного еліпсоїда вона безпосередньо не зв’язана. Як відомо, тільки досить незначні ділянки земної поверхні (радіусом 5-15 км) можна приймати за площину, а для більших територій застосування плоских прямокутних координат можливе лише через проектування частин поверхні земного еліпсоїда на площину. Тому вибір проекції для перенесення геодезичних побудов з еліпсоїда на площину становить теоретично і практично важливу задачу для геодезії.

Проекції земного еліпсоїда на площині, що приймаються для перенесення і опрацювання результатів геодезичних вимірювань, називаються *геодезичними проекціями*.

2. Загальні відомості про геодезичні проекції

На відміну від картографічних проекцій, при яких головна задача полягає в зображенні земної поверхні на папері (площині) в виді карт, геодезичні проекції дають методи точного перенесення елементів поверхні еліпсоїда (ліній, кутів) на площину, тобто між поверхнею еліпсоїда та площиною встановлюється такого роду відповідність, коли кожній точці поверхні еліпсоїда відповідає одна і тільки одна точка площини, причому при неперервному русі точки по поверхні еліпсоїда відповідна їй точка на площині переміщується теж неперервно.

Загальні формули цього роду відповідності між поверхнею еліпсоїда та площиною або загальні формули геодезичних проекцій можуть бути написані в наступному виді

$$\begin{aligned} x &= f_1(B, L) \\ y &= f_2(B, L) \end{aligned}, \qquad (1.1)$$

де B і L – геодезичні координати, широта і довгота, що визначають положення точки на поверхні еліпсоїда, x та y – декартові (прямокутні) координати точки на площині, а f_1 і f_2 – довільні функції, неперервні в області l ($l = L - L_o$ – довгота, яка відрахована від деякого меридіана (L_o), прийнятого за початковий).

Очевидно, що формули (1.1) є загальними формулами переходу від геодезичних координат до прямокутних плоских. На практиці до функцій f_1 і f_2 ставлять вимоги, щоб при будь-яких значеннях B і L в заданій області поверхні еліпсоїда l мати цілком визначені як за знаком так і за величиною числа для x та для y.

Поверхня еліпсоїда не відноситься до числа тих поверхонь, які зображуються на площині без спотворень. Тому і проекція еліпсоїда на площину, що описується рівняннями (1.1) буде мати спотворення кутів та ліній. Існують проекції, що зберігають кути, але спотворюють довжини ліній і площі (фігури), і проекції, що спотворюють і довжини ліній, і кути, і площі. Розподіл спотворень залежить від виду функцій f_1 і f_2. Величина спотворень визначається розмірами тієї області поверхні еліпсоїда l, яка зображується на площині, причому в деяких випадках спотворення можуть бути і дуже значними. Оскільки мова йде про геодезичні проекції, то такі випадки не розглядаються.

Геодезичні побудови, як правило, створюються шляхом виміру кутів геометричних фігур, а лінійні виміри виконуються, наприклад, в тріангуляції тільки щоб задати масштаб мережі.

Якщо координати опорних геодезичних пунктів задані в проекції, то графічні матеріали знімань виходять теж в проекції і тільки їх числові дані в виді безпосередньо виміряних довжин сторін і кутів знімальних ходів треба виправляти за перехід до проекції. Викладеним і обґрунтовується умова: *кути (при перенесенні їх з еліпсоїда на площину проекції) повинні зберігати свої величини, а враховуватись повинні лише спотворення довжин ліній.*

Такі проекції, в яких відсутні кутові спотворення, називаються *конформними (рівнокутними)*.

Неминучі спотворення фігур при переході з еліпсоїда на площину в будь-якій проекції будуть зростати із збільшенням розмірів частини поверхні еліпсоїда, що зображується на площині. В геодезичних роботах, що проводяться переважно на значних територіях і з високою точністю, виникає необхідність враховувати ці спотворення.

Відсутність кутових спотворень не є головною перевагою конформних проекцій перед неконформними, адже геодезичні лінії еліпсоїда, що зображуються на площині, мають вигляд кривих, які в практиці геодезичних робіт використати досить трудно. Тому зображення геодезичної лінії на площині замінюють прямою лінією – хордою, яка з'єднує кінцеві точки цього зображення. Звідси виникає додаткова задача в конформних проекціях – визначення кута між зображенням геодезичної лінії та хорди, який називають *поправкою за кривину зображення геодезичної лінії* на площині.

Границя відношення довжини відрізка S на площині до довжини відповідного йому відрізка s на еліпсоїді, коли довжина останнього стрімко наближається до нуля, називається *масштабом зображення*. Його можна визначити як відношення нескінченно малого переміщення точки на еліпсоїді до відповідного переміщення точки на площині (*рис. 1.1*).

$$m = \frac{dS}{ds}. \tag{1.2}$$

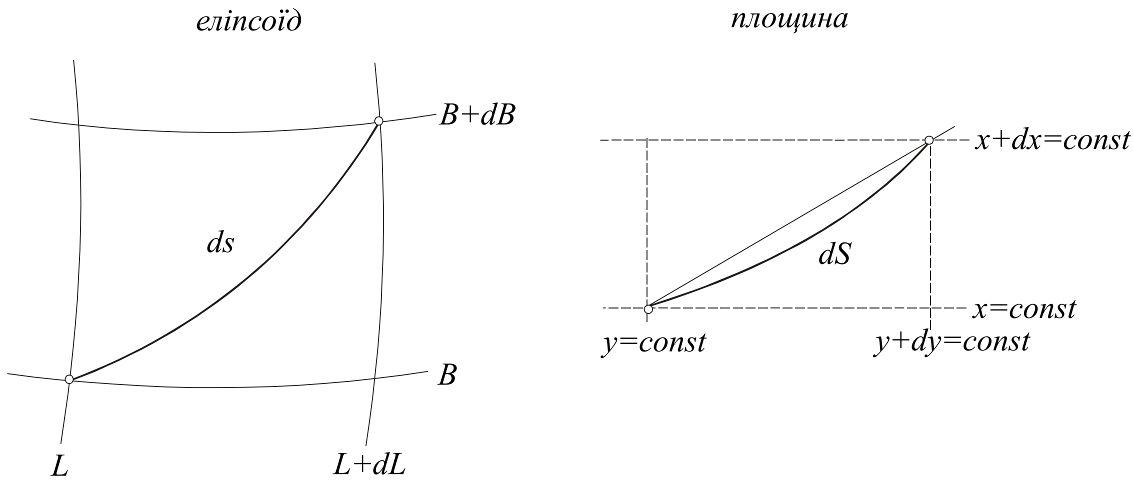

Рис. 1.1.

Масштаб m, в загальному випадку, буде величиною, яка змінюється як при переході від однієї точки до другої, так і при зміні напряму в одній і тій же точці. Іншими словами, в загальному випадку масштаб m буде функцією положення точки, тобто її координат і азимута. Оскільки в конформних проекціях зберігаються подібність нескінченно малих фігур, то масштаб є постійним в нескінченно малій області навколо точки. Це означає, що в конформних проекціях масштаб зображення в кожній даній точці не залежить від напряму лінійного елемента.

Із загального числа конформних проекцій ми розглянемо детально тільки проекцію Гаусса-Крюгера, яка найбільш широко використовується в практиці геодезичних і топографічних робіт багатьох країн.

Проекція Гаусса-Крюгера, яка отримала широке розповсюдження на початку 20-х років XX ст., була розроблена і впроваджена в практику Гауссом ще в 1820-30 рр. при зніманні території ганноверського герцогства. Проте Гаусс цю свою роботу не опублікував; лише в 1866 р. теорію проекції Гаусса опублікував Шрейбер. В 1912 і 1919 рр. австрійський геодезист Крюгер дав детальний виклад теорії проекції Гаусса з розробкою робочих формул. До речі, тодішня Австро-Угорщина була першою країною, яка запровадила проекцію Гаусса, і яку пізніше стали називати проекцією Гаусса-Крюгера.

Універсальна поперечна проекція Меркатора UTM (Universal Transverse Mercator projection), яка має застосування, головним чином, в західних (англомовних) країнах, особливо в США – просто інша версія проекції Гаусса-Крюгера; відрізняється від неї практично лише тим, що масштаб зображення вздовж осьового меридіана приймають рівним не одиниці, а 0,9996.

3. Основні рівняння конформної проекції Гаусса

Теорія геодезичних проекцій основана на встановленні взаємнооднозначної точкової відповідності між поверхнями земного еліпсоїда і площини таким чином, щоб відповідні кути геометричних фігур еліпсоїда і площини були рівними, а сторони пропорційними. Вказана відповідність визначається законом перетворення заданих геодезичних координат B, L в координати x, y на площині, чи навпаки. Загальні рівняння точкової відповідності можуть бути виражені функціональними залежностями (1.1).

При конформному зображені функції (1.1) повинні задовольняти умовам конформності. Розглянемо коротко ці умови.

Нехай точка *A'* є зображенням на площині деякої точки на еліпсоїді *A* (*рис. 1.2*). Дуги *A'B'* і *A'C'* – зображення диференціала дуги меридіана та дуги паралелі відповідно.

Кут γ є кутом повороту конформного зображення як меридіана, так і паралелі відносно прямолінійних координатних ліній на площині. Цей кут носить назву *зближення меридіанів* на площині.

Із подібних трикутників *A'B'B''* і *A'C'C''* можемо записати

$$\frac{A'B''}{A'B'} = \frac{A'C''}{A'C'} = \cos\gamma,$$
$$\frac{B'B''}{A'B'} = \frac{C'C''}{AC} = \sin\gamma. \qquad \text{(I)}$$

Згідно формули (1.2) для масштабу *m* отримаємо

$$m = \frac{A'B'}{MdB} = \frac{A'C'}{N\cos BdL}$$

звідки

$$A'B' = mMdB,$$
$$A'C' = mN\cos Bdl. \qquad \text{(II)}$$

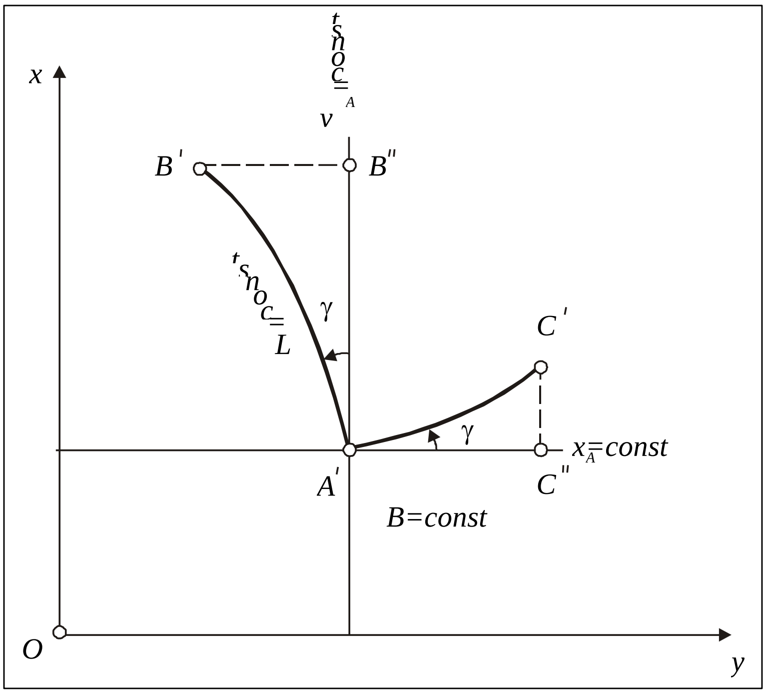

Рис. 1.2.

Для зображення диференціалів дуг меридіана і паралелі напишемо повні диференціали плоских прямокутних координат на основі рівнянь (1.1)

$$dx = \frac{\partial x}{\partial B}dB + \frac{\partial x}{\partial L}dL,$$
$$dy = \frac{\partial y}{\partial B}dB + \frac{\partial y}{\partial L}dL.$$

Застосувавши ці рівняння для зображення диференціала дуги меридіана $L = const$, отримаємо

$$dx_B = A'B'' = \frac{\partial x}{\partial B}dB,$$
$$dy_B = B'B'' = -\frac{\partial y}{\partial B}dB. \qquad \text{(III)}$$

Аналогічно для зображення диференціала дуги паралелі $B = const$, отримаємо

$$dx_L = C'C'' = \frac{\partial x}{\partial L} dL,$$
$$dy_L = A'C'' = \frac{\partial y}{\partial L} dL. \qquad \text{(IV)}$$

Підставимо значення сторін, що визначаються виразами (II), (III) і (IV) в рівняння (I). Отримаємо

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial B} dB}{mMdB} = \frac{\frac{\partial y}{\partial L} dL}{mN \cos B dL} = \cos\gamma,$$
$$\frac{-\frac{\partial y}{\partial B} dB}{mMdB} = \frac{\frac{\partial x}{\partial L} dL}{mN \cos B dL} = \sin\gamma.$$

Із наведених співвідношень отримаємо диференційні рівняння

$$\frac{\partial x}{\partial B} = \frac{M}{N \cos B} \frac{\partial y}{\partial L},$$
$$\frac{\partial y}{\partial B} = -\frac{M}{N \cos B} \frac{\partial x}{\partial L}, \qquad (1.3)$$

а також формули для визначення γ і m

$$tg\gamma = -\left(\frac{\partial y}{\partial B}\right) \Big/ \left(\frac{\partial x}{\partial B}\right) = \left(\frac{\partial x}{\partial L}\right) \Big/ \left(\frac{\partial y}{\partial L}\right), \qquad (1.4)$$

$$m = \frac{1}{N \cos B} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial L}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial L}\right)^2}. \qquad (1.5)$$

Диференційні рівняння (1.3) є тими умовами, які повинні задовольняти функції (1.1) при конформному зображенні еліпсоїда на площині.

Як вже було зазначено, точкова відповідність між поверхнею еліпсоїда і площиною повинна бути взаємною, тобто повинні існувати і зворотні функції

$$B = F_1(x, y),$$
$$L = F_2(x, y), \qquad (1.6)$$

що дозволять перейти від плоских прямокутних координат x, y до геодезичних B, L.

Умови, яким повинні задовольняти ці функції при конформному зображенні, визначаються наступними диференційними рівняннями

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{N \cos B}{M} \frac{\partial L}{\partial y},$$
$$\frac{\partial B}{\partial y} = -\frac{N \cos B}{M} \frac{\partial L}{\partial x}. \qquad (1.7)$$

Відповідно, зближення меридіанів γ і масштаб зображення m будуть визначатися наступними формулами

$$tg\gamma = \frac{N \cos B \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)}{M \left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)} = \frac{M \left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)}{N \cos B \left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)}, \qquad (1.8)$$

$$m^{-1} = \sqrt{M^2\left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)^2 + N^2\cos^2 B\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^2} =$$
$$\sqrt{M^2\left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)^2 + N^2\cos^2 B\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)^2}. \tag{1.9}$$

Рівняння (1.3) і (1.7) – основні рівняння конформного перетворення координат. Інтегрування їх виконується при початкових умовах, які задаються при зображенні еліпсоїда на площині чи навпаки.

В проекції Гаусса осьовий меридіан зображується прямою лінією, що приймається за вісь x з масштабом $m = 1$, тобто для точок осьового меридіана абсциси рівні дугам меридіана від екватора, а ординати – нулю. Якщо позначити дуги меридіана від екватора до точки заданої широти через X, то для точок осьового меридіана при $l = 0$ отримаємо

$$\left.\begin{array}{l} x = X \\ y = 0 \end{array}\right\}. \tag{1.10}$$

Крім того, додатнім значенням l повинні відповідати додатні значення y і від'ємним l – від'ємні y; додатнім і від'ємним l відповідають тільки додатні значення x (для північної півкулі Землі). Ці умови і визначають проекцію Гаусса.

4. Перетворення полярних координат

Одне із застосувань геодезичної лінії полягає в тому, що з її участю можна на поверхні еліпсоїда створити систему координат, в якій положення пунктів визначається довжиною геодезичної лінії s та кутом, що відраховується від заданого вихідного напряму. Якщо цей напрям збігається з меридіаном, то друга координата – кут, буде азимутом геодезичної лінії – A. Така система координат на еліпсоїді, аналогічна полярній системі координат на площині (довжина прямолінійного відрізка d та дирекційний кут α), називається *полярною геодезичною*.

Оскільки математичне опрацювання результатів геодезичних вимірювань значно простіше виконується на площині, ніж на еліпсоїді, то необхідно здійснити перетворення систем полярних координат, тобто знайти формули переходу від полярних координат s і A на еліпсоїді до відповідних їм координатам d і α на площині.

Нехай Q_1P – меридіан, що проходить через т. Q_1 (*рис. 1.3 а*); Q_1T – дотична до еліпсоїда і паралельна площині осьового меридіана. Кут γ' між напрямом меридіана Q_1P і дотичною Q_1T називається *геодезичним зближенням меридіанів* в т. Q_1. Кут в т. Q_1 між напрямом меридіана Q_1P і геодезичною лінією Q_1Q_2 є *геодезичний азимут* A_{12} цієї лінії; кут в т. Q_1 між напрямом дотичної Q_1T і напрямом геодезичної лінії Q_1Q_2 є *геодезичний дирекційний кут* α_{12}. Для поверхні еліпсоїда має місце очевидна рівність $A_{12} = \alpha'_{12} + \gamma'$.

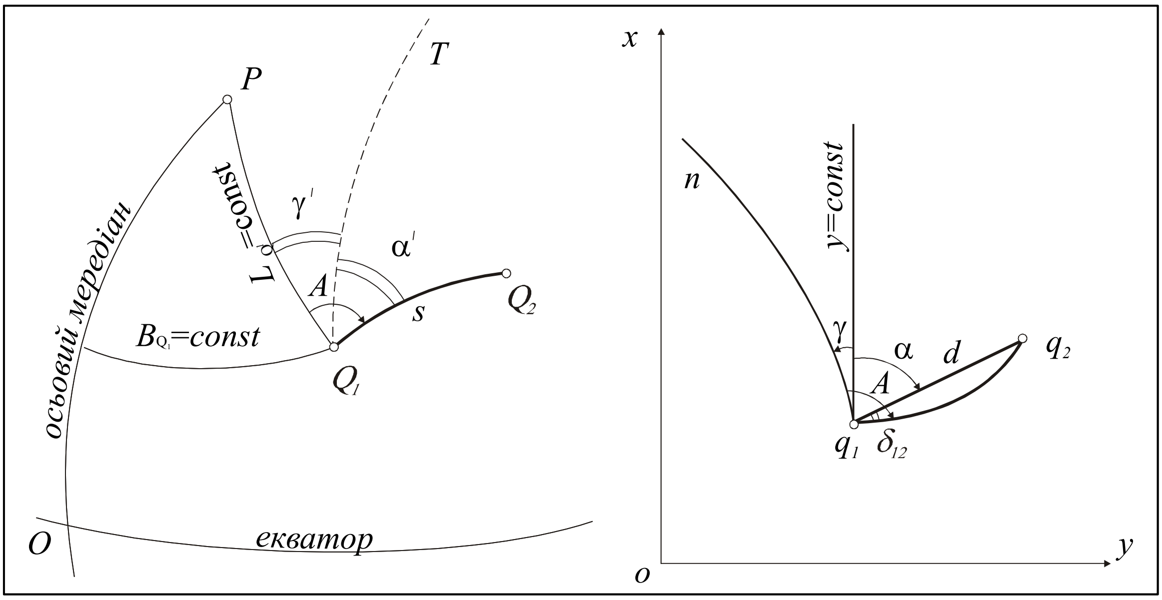

Рис. 1.3.

На *рис. 1.3 б* точки q_1 і q_2 – зображення точок Q_1 і Q_2 поверхні еліпсоїда; *op* – вісь абсцис, зображення осьового меридіана *OP*; q_1n – зображення меридіана Q_1P; крива q_1q_2 – зображення геодезичної лінії Q_1Q_2, *d* – хорда, що стягує цю криву між точками q_1 і q_2. Кут γ між координатною лінією *y = const* і зображенням меридіана q_1n називається *зближенням меридіанів на площині*; відраховується він від лінії *y = const*, тобто лінії, паралельної осі абсцис, в напрямі проти ходу годинникової стрілки. Напрямний кут α_{12}, відрахований від координатної лінії *y = const* за годинниковою стрілкою до заданого напряму – до хорди q_1q_2 – називається *дирекційним кутом на площині*. Кут δ_{12} між дотичною до кривої q_1q_2 в т. q_1 і хордою *d* називається *поправкою за кривину зображення геодезичної лінії на площині або редукцією напряму*; відраховується він від дотичної до кривої за ходом годинникової стрілки до хорди. На площині має місце рівність

$$\alpha_{12} = A_{12} - \gamma_1 - \delta_{12} \qquad (1.11)$$

Згідно формули (1.2) для визначення довжини кривої *S* (зображення геодезичної лінії на площині) необхідно знайти інтеграл

$$S = \int_{Q_1}^{Q_2} m ds. \qquad (1.12)$$

Якщо позначити різницю довжин кривої *S* та її хорди *d* через

$$\delta S = S - d, \qquad (1.13)$$

то довжина хорди *d* буде визначатися із рівняння

$$d = S - \delta S, \qquad (1.14)$$

де *S* обчислюється за формулою (1.12).

Поправки δ_{12} і δS залежать від довжини кривої *S* та її кривини і є поправками за кривину зображення геодезичної лінії, причому перша з них вводиться в напрям лінії *S*, а друга – в її довжину. В загальному випадку ці залежності складні, але для редукційних задач геодезії, що виникають при переході з еліпсоїда на площину, можна вивести наближені формули, які цілком задовольняють практичні вимоги.