### ***Метод потенціалів***

* ідея методу: спочатку будується початковий опорний план,

потім здійснюється його покращення доти, доки не задовольнятиметься ознака оптимальності плану.

* алгоритм методу складається з попереднього етапу та кінцевої кількості ітерацій.
* на попередньому етапі:

будується початковий опорний план ;

розраховується оціночна матриця

 і – потенціали пунктів відправлення, та пунктів призначення , відповідно.

Попередні потенціали обираються так, щоби для зв’язаних комунікаціями пар пунктів, для яких у плані , різниця потенціалів дорівнювала

Якщо в матриці немає від’ємних елементів, то є оптимальним планом.

Інакше - неоптимальним планом і його можливо покращити.

* алгоритм методу потенціалів

Попередній етап:

1. Визначається початковий опорний план одним із вже відомих методів – «північно-західного кута», «мінімального елемента».
2. Розраховується оціночна матриця .

Спочатку необхідно визначити початкові потенціали і .

Будується схема перевезень, яка відповідає початковому опорному плану , а саме:

зв’язуються комунікаціями пункти відправлення та пункти призначення, для яких ;

визначаються послідовно всі потенціали пунктів відправлення та пунктів призначення і відповідно за співвідношенням . Для зручності приймається .

Далі знаходяться елементи матриці за співвідношенням

Вочевидь, що елементи матриці , які відповідають базисним елементам плану , дорівнюватимуть 0.

Якщо в оціночній матриці усі елементи додатні, то план є оптимальним, інакше потрібно приступити до його покращення.

Ітерація :

1. Якщо в оціночній матриці усі елементи додатні, то план є оптимальним.

Інакше потрібно його покращувати.

1. Обирається найвід’ємніший елемент оціночної матриці .

Починаючи з відповідного йому елемента у матриці будується замкнений ланцюжок, до якого входитимуть елементи .

Визначається – мінімальний елемент серед усіх непарних у порядку розташування в ланцюжку, при цьому за 1-ий вважається наступний за елемент.

1. Будується новий план шляхом додавання до всіх парних елементів ланцюжка й віднімання від непарних елементів ланцюжка. Елементи матриці , які не входять до ланцюжка, переносяться до матриці без змінення.
2. Знаходиться оціночна матриця для отриманого нового плану за допомогою еквівалентних перетворень:

у матриці підкреслюються всі елементи, що відповідають ненульовим елементам матриці ;

у матриці закреслюється рядок, який містить елементи ;

якщо в цьому рядку є підкреслені елементи, то закреслюються стовбці, які відповідають таким елементам;

якщо в кожному закресленому стовпці є підкреслені елементи, то закреслюються рядки, які їм відповідають;

так продовжується доти, доки описана процедура виконувана;

далі до всіх елементів закреслених рядків додається , а від елементів закреслених стовпців віднімається – отримується нова оціночна матриця .

Якщо в матриці немає від’ємних елементів, то план є оптимальним.

Інакше потрібно перейти до наступної ітерації.

Приклад:

Для побудованого початкового опорного плану Т-задачі (за методом «північно-західного кута»)

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 60 | 0 | 0 | 0 |  |
| 10 | 5 | 40 | 0 |
| 0 | 0 | 5 | 35 |
| 0 | 0 | 0 | 35 |

представимо графічно відповідний план перевезень (для зручності обчислення потенціалів та ).

1

4

3

1

8

3

1

За відповідними маршрутами вказуємо вартості перевезень одиниці продукту з і-го пункту в j-й.

Приймаємо .

Визначаємо потенціали, використовуючи співвідношення

,

,

,

,

,

,

.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  | **1[60]** | 2 | 9 | 7 |
|  | **3[10]** | **4[5]** | **1[40]** | 5 |
|  | 6 | 4 | **8[5]** | **3[35]** |
|  | 2 | 3 | 3 | **1[35]** |

Далі розрахуємо елементи оціночної матриці за співвідношенням

:

,

,

,

,

,

,

,

,

,

,

,

,

,

,

,

.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 0 | 0 | 10 | 13 |  |
| 0 | 0 | 0 | 9 |
| -4 | -7 | 0 | 0 |
| -6 | -6 | -3 | 0 |

Оскільки в оціночній матриці є від’ємні елементи, то план – неоптимальний.

Найвід’ємніший елемент .

Тому, в матриці , починаючи з елемента (який відповідає в оціночній матриці найвід’ємнішому елементу ) будуємо ланцюжок:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 60 | 0 | 0 | 0 |  |
| 10 | 5[-] | 40[+] | 0 |
| 0 | **0[+]** | 5[-] | 35 |
| 0 | 0 | 0 | 35 |

Побудуємо новий план , змінюючи елементи, які входять до ланцюжка, на величину (мінімальний елемент серед непарних елементів, які входять до ланцюжка), :

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 60 | 0 | 0 | 0 |  |
| 10 | 0  | 45 | 0 |
| 0 | 5 | 0 | 35 |
| 0 | 0 | 0 | 35 |

Вироджений, тому замінюємо один із з ланцюжка на .

Виконаємо перетворення в матриці :

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | 0 | 10 | 13 |  |  |
|  |  |  | 9 |  |
| -4 |  | 0 |  | +7 |
| -6 | -6 | -3 |  | +7 |
|  |  |  |  |  | -7 |  |  |

Тоді отримаємо наступну оціночну матрицю :

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 0 | 0 | 10 | 6 |  |
| 0 | 0 | 0 | 2 |
| 3 | 0 | 7 | 0 |
| 1 | 1 | 4 | 0 |

В оціночній матриці немає від’ємних елементів, тому план є оптимальним.

Вартість перевезень дорівнюватиме:

.

Приклад 2:

Маємо таку Т-задачу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|   |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | 7 | 8 | 5 | 3 |  | 11 |
| 2 | 4 | 5 | 9 | 11 |
| 6 | 3 | 1 | 2 | 8 |
|  |  | 5 | 9 | 9 | 7 |  |  |

Перевіримо виконання умови балансу:

Умова балансу дотримується, отже модель задачі є закритою.

Розпочнемо з побудови початкового опорного плану, методом «північно-західного кута»:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 5 | 6 | 0 | 0 |  |
| 0 | 3 | 8 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 7 |

Отриманий план є невиродженим:

Представимо графічно план перевезень та визначимо потенціали пунктів:

7

4

8

5

1

2

,

,

,

,

,

.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  | **7[5]** | **8[6]** | 5 | 3 |
|  | 2 | **4[3]** | **5[8]** | 9 |
|  | 6 | 3 | **1[1]** | **2[7]** |

Розрахуємо елементи оціночної матриці:

,

,

,

,

,

.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 0 | 0 | -4 | -7 |  |
| -1 | 0 | 0 | 3 |
| 7 | 3 | 0 | 0 |

Оскільки в оціночній матриці є від’ємні елементи, тому - неоптимальний план.

Найвід’ємніший елемент .

Побудуємо в матриці ланцюжок, починаючи з елемента :

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 5 | 6[-] | 0 | **0[+]** |  |
| 0 | 3[+] | 8[-] | 0 |
| 0 | 0 | 1[+] | 7[-] |

Побудуємо новий план .

Визначимо

тоді

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 5 | 0 | 0 | 6 |  |
| 0 | 9 | 2 | 0 |
| 0 | 0 | 7 | 1 |

Виконаємо перетворення в матриці :

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | 0 | -4 |  |  | +7 |
| -1 |  |  | 3 |  |
| 7 | 3 |  |  |  |
|  |  | -7 |  |  |  |  |  |

Тоді отримаємо наступну оціночну матрицю :

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 0 | 7 | 3 | 0 |  |
| -8 | 0 | 0 | 3 |
| 0 | 3 | 0 | 0 |

Оскільки в оціночній матриці є від’ємний елемент, план - неоптимальний.

Найвід’ємніший елемент .

Побудуємо в матриці ланцюжок, починаючи з елемента :

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 5[-] | 0 | 0 | 6[+] |  |
| **0[+]** | 9 | 2[-] | 0 |
| 0 | 0 | 7[+] | 1[-] |

Побудуємо новий план .

Визначимо

тоді

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 4 | 0 | 0 | 7 |  |
| 1 | 9 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 8 | 0 |

Виконаємо перетворення в матриці :

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | 7 | 3 |  |  |  |
|  |  |  | 3 | +8 |
| 0 | 3 |  | 0 | +8 |
|  |  |  | -8 | -8 |  |  |  |

Тоді отримаємо наступну оціночну матрицю :

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 0 | -1 | -5 | 0 |  |
| 0 | 0 | 0 | 11 |
| 8 | 3 | 0 | 8 |

В оціночній матриці є від’ємні елементи, план - неоптимальний.

Найвід’ємніший елемент .

Побудуємо в матриці ланцюжок, починаючи з елемента :

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 4[-] | 0 | **0[+]** | 7 |  |
| 1[+] | 9 | 1[-] | 0 |
| 0 | 0 | 8 | 0 |

Побудуємо новий план .

Визначимо тоді

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 3 | 0 | 1 | 7 |  |
| 2 | 9 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 8 | 0 |

Перетворення в матриці :

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | -1 |  |  |  | +5 |
|  |  | 0 | 11 | +5 |
| 8 | 3 |  | 8 |  |
|  |  | -5 | -5 |  | -5 |  |  |

Наступна оціночна матриця :

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 0 | -1 | 0 | 0 |  |
| 0 | 0 | 5 | 11 |
| 3 | -2 | 0 | 3 |

Оскільки в оціночній матриці є від’ємні елементи, план - неоптимальний.

Найвід’ємніший елемент .

Ланцюжок у матриці (починаючи з елемента ):

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 3[-] | 0 | 1[+] | 7 |  |
| 2[+] | 9[-] | 0 | 0 |
| 0 | **0[+]** | 8[-] | 0 |

Новий план :

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 0 | 0 | 4 | 7 |  |
| 5 | 6 | 0 | 0 |
| 0 | 3 | 5 | 0 |

Перетворення в матриці :

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 0 | -1 |  |  |  | +2 |
|  |  | 5 | 11 |  |
| 3 |  |  | 3 | +2 |
|  |  |  |  | -2 | -2 |  |  |

Оціночна матриця :

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 2 | 1 | 0 | 0 |  |
| 0 | 0 | 3 | 9 |
| 5 | 0 | 0 | 3 |

Оскільки в оціночній матриці від’ємних елементів немає, тому опорний план – ОПТИМАЛЬНИЙ.

Отже, отриманий розв’язок задачі:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  | 7 | 8 | **5[4]** | **3[7]** |
|  | **2[5]** | **4[6]** | 5 | 9 |
|  | 6 | **3[3]** | **1[5]** | 2 |

Вартість перевезень дорівнюватиме:

.