4. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Система m *лінійних алгебраїчних рівнянь з* n *невідомими* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{7}$$

Систему (7) можна записати у *матричному* вигляді $AX = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ – *матриця системи*;

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$ – *вектор-стовпець вільних членів*;

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$ – *вектор-стовпець невідомих*.

Набір значень невідомих $x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$ називають *розв'язком* системи (7), якщо при підстановці їх у рівняння системи всі рівняння перетворюються у тотожності. Система рівнянь називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок. Якщо ж система не має жодного розв'язку, то вона називається *несумісною*.

4.1. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гаусса

Універсальним методом розв'язання систем лінійних рівнянь є *метод Гаусса*, який ще називають методом *послідовного виключення невідомих*. Цей метод ґрунтується на понятті *елементарних перетворень* системи, які полягають у наступному:

1) переставлення рівнянь системи;

2) множення рівнянь системи на довільні числа, відмінні від нуля;

3) додавання до одного рівняння системи іншого рівняння, помноженого на довільне число.

За допомогою елементарних перетворень систему (7) зводять до системи простішого (“східчастого”) вигляду, яка *рівносильна* заданій (це означає, що розв’язки систем співпадають):

$$\begin{cases} \bar{a}_{11}x_1 + \ldots + \bar{a}_{1n}x_n = \bar{b}_1 \\ \qquad \bar{a}_{2k}x_k + \ldots + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2 \\ \qquad\qquad \bar{a}_{3l}x_l + \ldots + \bar{a}_{3n}x_n = \bar{b}_3 \\ \qquad\qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad \bar{a}_{rs}x_s + \ldots + \bar{a}_{rn}x_n = \bar{b}_r \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = \bar{b}_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \quad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = \bar{b}_m \ . \end{cases} \tag{8}$$

Можливі такі випадки.

1. Якщо система містить хибні рівності виду $0 = b_t$, де $b_t \neq 0$, то вона несумісна.

2. Нехай система (8) не містить рівностей виду $0 = b_t$ $(b_t \neq 0)$. Тоді вона є сумісною. Тотожності виду $0 = 0$ відкидаємо. Припустимо, що $r < n$, тобто число рівнянь менше за число невідомих. Назвемо невідомі $x_1, x_k, x_l, \ldots, x_s$, з яких починаються перше, друге,..., r-те рівняння, *основними*, а всі інші невідомі – *вільними*. Основних невідомих за означенням r. Надаючи вільним невідомим довільних значень і підставляючи ці значення в рівняння системи, з r-го рівняння системи знайдемо x_s. Підставляючи це значення в перші $(r-1)$ рівнянь і, піднімаючись вгору по системі, знайдемо всі основні невідомі. Оскільки вільні невідомі можуть набувати будь-яких значень, система має безліч розв’язків.

3. Нехай в системі (8) $r = n$. Тоді вільних невідомих немає. В цьому випадку система (8) має “трикутний” вигляд

$$\begin{cases} \bar{a}_{11}x_1 + \ldots + \bar{a}_{1n}x_n = \bar{b}_1 \\ \qquad \bar{a}_{22}x_2 + \ldots + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2 \\ \qquad \ldots \qquad \ldots. \qquad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad \bar{a}_{nn}x_n = \bar{b}_n . \end{cases}$$

З останнього рівняння системи знайдемо x_n і, піднімаючись по системі вгору, знайдемо всі інші невідомі. Отже, в цьому випадку система має єдиний розв'язок.

Зауваження. При розв'язанні систем, в яких число рівнянь не менше трьох, доцільно виписати *розширену матрицю* системи $\left(A|B\right)$. Елементарні перетворення над рівняннями системи зводяться при цьому до відповідних дій над рядками розширеної матриці. Після зведення матриці $\left(A|B\right)$ до "східчастого" вигляду виписують систему рівнянь, яка відповідає отриманій матриці.

Розв'язати системи лінійних рівнянь методом Гаусса.

38. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1 \\ 3x_1 + 7x_2 = 2. \end{cases}$

⌈ Виключимо невідоме x_1 з другого рівняння. Для цього можна додати до другого рівняння перше рівняння, помножене на $\left(-\dfrac{3}{2}\right)$. Проте, щоб уникнути дій з дробами, краще помножити друге рівняння на 2 і додати до нього перше рівняння, помножене на (-3). Опускаючи запис вказаних обчислень, дістанемо систему, рівносильну заданій:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1 \\ \qquad -x_2 = 1. \end{cases}$$

З останнього рівняння маємо $x_2 = -1$. Підставляючи знайдене значення x_2 в перше рівняння, знаходимо x_1:

$$2x_1 + 5\cdot(-1) = 1, \quad x_1 = \frac{6}{2} = 3.$$

Отже, задана система має розв'язок $x_1 = 3$, $x_2 = -1$. ⌋

39. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$

⌈ Додамо до другого рівняння перше, помножене на (-3). В результаті дістанемо систему, рівносильну заданій:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ \quad -2x_2 - 4x_3 = -2. \end{cases} \qquad (*)$$

У цій системі x_3 – вільне невідоме. Надамо йому довільного значення c: $x_3 = c$, $c \in R$ (R – множина дійсних чисел). Тоді з другого рівняння системи ($*$) знаходимо x_2:

$$-2x_2 - 4c = -2, \quad x_2 = -\frac{1}{2}(4c - 2) = 1 - 2c.$$

З першого рівняння системи ($*$) знаходимо невідоме x_1:

$$x_1 + 1 - 2c + c = 2, \quad x_1 = 1 + c.$$

Отже, задана система має розв'язок $x_1 = 1 + c$, $x_2 = 1 - 2c$, $x_3 = c$, $c \in R$. ⌟

40. $\begin{cases} 3x_1 - \frac{21}{4}x_2 - \frac{3}{4}x_3 = 21 \\ 4x_1 - 7x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$

⌜ Додамо до другого рівняння перше, помножене на $\left(-\frac{4}{3}\right)$. Дістанемо систему

$$\begin{cases} 3x_1 - \frac{21}{4}x_2 - \frac{3}{4}x_3 = 21 \\ \qquad\qquad\qquad 0 = -23. \end{cases}$$

Друга рівність у цій системі є хибною. Це означає, що задана система несумісна. ⌟

41. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7 \\ 2x_1 + 9x_2 - 8x_3 = 16 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$

⌜ Розв'яжемо задану систему: а) виконуючи елементарні перетворення безпосередньо над рівняннями системи; б) використовуючи поняття розширеної матриці системи.

а) Виключимо невідоме x_1 з 2-го та 3-го рівнянь системи. Для цього виконаємо послідовно такі дії: 1) додамо до 2-го рівняння 1-ше рівняння, помножене на (-2); 2) додамо до 3-го рівняння 1-ше рівняння, помножене на (-4). В результаті дістанемо систему простішого вигляду, яка рівносильна заданій:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7 \\ \quad 3x_2 - 4x_3 = 2 \\ -15x_2 + 9x_3 = -21. \end{cases}$$

Виключимо невідоме x_2 з 3-го рівняння отриманої системи. Для цього додамо до 3-го рівняння 2-ге рівняння, помножене на 5. Дістанемо

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7 \\ \quad 3x_2 - 4x_3 = 2 \qquad\qquad (*) \\ \qquad -11x_3 = -11. \end{cases}$$

З останнього рівняння отриманої системи знаходимо $x_3 = 1$. Підставляємо це значення в 2-ге рівняння і знаходимо x_2:

$$3x_2 - 4 \cdot 1 = 2, \;\; 3x_2 = 6, \;\; x_2 = 2.$$

Підставимо знайдені значення x_2 та x_3 в 1-ше рівняння системи $(*)$ і знайдемо x_1:

$$x_1 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 7, \;\; x_1 = 7 - 4, \;\; x_1 = 3.$$

Оскільки задана система та система $(*)$ рівносильні, то маємо розв’язок заданої системи: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

б) Розв’яжемо систему, використовуючи поняття розширеної матриці. Розширена матриця заданої системи має вигляд

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 7 \\ 2 & 9 & -8 & 16 \\ 4 & -3 & 1 & 7 \end{array}\right).$$

Виключенню невідомого x_1 з 2-го та 3-го рівнянь системи відповідає утворення нулів у першому стовпці розширеної матриці. Для цього виконаємо послідовно такі дії над рядками матриці: 1) додамо до 2-го рядка матриці 1-й рядок, помножений на (-2); 2) додамо до 3-го рядка матриці 1-й рядок, помножений на (-4). Запишемо в умовних позначеннях вказані дії, а також їх результат – нову розширену матрицю:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 7 \\ 2 & 9 & -8 & 16 \\ 4 & -3 & 1 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-2)\;(-4) \\ \leftarrow\!\!\lrcorner \\ \longleftarrow\!\!\lrcorner \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -15 & 9 & -21 \end{array}\right).$$

До 3-го рядка отриманої матриці додамо 2-й рядок, помножений на 5 (виключаємо невідоме x_2 з 3-го рівняння системи):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -15 & 9 & -21 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ 5 \\ \hookleftarrow \end{matrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & -11 \end{array}\right).$$

Зауважимо, що у квадратній таблиці чисел, які записані ліворуч від риски, під діагоналлю стоять нулі.

Випишемо систему рівнянь, яка відповідає знайденій розширеній матриці:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7 \\ \quad 3x_2 - 4x_3 = 2 \\ \quad\quad -11x_3 = -11. \end{cases}$$

Отримали систему ($*$). Її розв’язок $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$. ⌟

Зауваження. Як бачимо з останнього прикладу, для розв’язування системи рівнянь зручно виписати розширену матрицю системи і виконати потрібні перетворення над рядками матриці для утворення нулів на місці певних елементів (це відповідає виключенню відповідних невідомих з рівнянь системи).

42. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 - 4x_2 - 7x_3 = 5 \\ 10x_1 + 2x_3 - x_3 = 8. \end{cases}$

⌜ Запишемо розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & -4 & -7 & 5 \\ 10 & 2 & -1 & 8 \end{array}\right).$$

Виконаємо послідовно такі дії над рядками цієї матриці: 1) додамо до 2-го рядка матриці 1-й рядок, помножений на (-2); 2) додамо до 3-го рядка 1-й рядок, помножений на (-5). Запишемо схематично ці дії, а також їх результат – нову розширену матрицю:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & -4 & -7 & 5 \\ 10 & 2 & -1 & 8 \end{array}\right) \begin{matrix} (-2) \quad (-5) \\ \hookleftarrow \\ \hookleftarrow \end{matrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -10 & -9 & -1 \\ 0 & -13 & -6 & -7 \end{array}\right).$$

Третій рядок цієї матриці помножимо на 10 і додамо до нього 2-й рядок, помножений на (-13). Запишемо схематично ці дії, а також їх результат – нову розширену матрицю:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -10 & -9 & -1 \\ 0 & -13 & -6 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (-13) \\ 10\hookleftarrow \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -10 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 57 & -57 \end{array}\right).$$

Запишемо систему рівнянь, яка відповідає знайденій розширеній матриці:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ \quad -10x_2 - 9x_3 = -1 \\ \qquad\quad 57x_3 = -57. \end{cases} \qquad (*)$$

Система $(*)$ рівносильна заданій. Розв'яжемо систему $(*)$. З останнього рівняння системи знаходимо $x_3 = (-57)/57 = -1$; з 2-го рівняння – $x_2 = \left(-1 + 9\cdot(-1)\right) : (-10) = (-10) : (-10) = 1$; з 1- го рівняння –

$$x_1 = \left(3 - (3\cdot 1 + (-1))\right) : 2 = \left(3 - 2\right) : 2 = \frac{1}{2}.$$

Таким чином, $x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 1,\ x_3 = -1$.

Перевірка:

$$\begin{cases} 4\cdot\frac{1}{2} - 4\cdot 1 - 7\cdot\left(-1\right) = 5 \\ 10\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot 1 - \left(-1\right) = 8 \\ 2\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot 1 + \left(-1\right) = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = 5 \\ 8 = 8 \\ 3 = 3. \end{cases}$$

Отже, в результаті підстановки знайдених значень невідомих в задану систему, кожне з рівнянь системи перетворилось у тотожність. Це означає, що систему розв'язано вірно. ⌋

43. $$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 13 \\ x_1 - 10x_2 - 6x_3 = 5. \end{cases}$$

⌈ Запишемо розширену матрицю системи і поміняємо місцями її перший та третій рядки:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & \bigg| & -1 \\ 5 & 6 & 2 & \bigg| & 13 \\ 1 & -10 & -6 & \bigg| & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -10 & -6 & \bigg| & 5 \\ 5 & 6 & 2 & \bigg| & 13 \\ 3 & -2 & -2 & \bigg| & -1 \end{pmatrix}.$$

Виконаємо наступні дії над рядками нової матриці: 1) додамо до 2-го рядка 1-й рядок, помножений на (-5); 2) додамо до 3-го рядка 1-й рядок, помножений на (-3). Запишемо схематично ці дії, а також їх результат – нову розширену матрицю:

$$\begin{pmatrix} 1 & -10 & -6 & \bigg| & 5 \\ 5 & 6 & 2 & \bigg| & 13 \\ 3 & -2 & -2 & \bigg| & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-5) \quad (-3) \\ \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -10 & -6 & \bigg| & 5 \\ 0 & 56 & 32 & \bigg| & -12 \\ 0 & 28 & 16 & \bigg| & -16 \end{pmatrix}.$$

Третій рядок помножимо на (-2) і додамо до нього 2-й рядок:

$$\begin{pmatrix} 1 & -10 & -6 & \bigg| & 5 \\ 0 & 56 & 32 & \bigg| & -12 \\ 0 & 28 & 16 & \bigg| & -16 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (-2) \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -10 & -6 & \bigg| & 5 \\ 0 & 56 & 32 & \bigg| & -12 \\ 0 & 0 & 0 & \bigg| & 20 \end{pmatrix}.$$

Запишемо систему рівнянь, яка відповідає знайденій розширеній матриці:

$$\begin{cases} x_1 - 10x_2 - 6x_3 = 5 \\ 56x_2 + 32x_3 = -12 \\ 0 = 20. \end{cases}$$

Остання рівність в цій системі є хибною. Звідси випливає несумісність заданої системи.

Таким чином, задана система не має розв'язків. ⌋

44. $\begin{cases} 4x_1 + 9x_2 - 112x_3 = -65 \\ 12x_1 + 21x_2 + 12x_3 = 11 \\ 10x_1 + 18x_2 - 19x_3 = -8. \end{cases}$

⌈ Запишемо розширену матрицю системи і виконаємо елементарні перетворення над її рядками, схематично записуючи всі дії:

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & -112 & \bigg| & -65 \\ 12 & 21 & 12 & \bigg| & 11 \\ 10 & 18 & -19 & \bigg| & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-3) \quad (-5) \\ \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 9 & -112 & \bigg| & -65 \\ 0 & -6 & 348 & \bigg| & 206 \\ 0 & -9 & 522 & \bigg| & 309 \end{pmatrix} (-1/2) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 9 & -112 & -65 \\ 0 & 3 & -174 & -103 \\ 0 & -9 & 522 & 309 \end{array}\right) 3 \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 9 & -112 & -65 \\ 0 & 3 & -174 & -103 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Запишемо систему рівнянь, яка відповідає знайденій розширеній матриці (тотожність $0 = 0$ при цьому відкидаємо):

$$\begin{cases} 4x_1 + 9x_2 - 112x_3 = -65 \\ \qquad 3x_2 - 174x_3 = -103. \end{cases} \qquad (*)$$

Покладемо $x_3 = c$, де c – довільна стала. Тоді з рівнянь системи ($*$), рухаючись знизу вгору, послідовно знаходимо

$$x_2 = (-103 + 174c) : 3 = -\frac{103}{3} + 58c,$$

$$x_1 = \left(-65 - 9 \cdot \left(-\frac{103}{3} + 58c\right) - 112c\right) : 4 =$$

$$= (-65 + 309 - 522c - 112c) : 4 = (244 - 634c) : 4 = 61 - \frac{317}{2}c.$$

Отже, розв’язок системи має вигляд

$$x_1 = 61 - \frac{317}{2}c,\ x_2 = -\frac{103}{3} + 58c,\ x_3 = c,\ c \in R. \quad \lrcorner$$

45. $\begin{cases} 54x_1 + 147x_2 - 49x_3 = 60 \\ 9x_1 - 18x_2 + 49x_3 = 4 \\ 42x_1 + 168x_2 - 105x_3 = 55 \\ 3x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 1. \end{cases}$

$\ulcorner$ Запишемо розширену матрицю заданої системи і виконаємо потрібні перетворення над її рядками:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 54 & 147 & -49 & 60 \\ 9 & -18 & 49 & 4 \\ 42 & 168 & -105 & 55 \\ 3 & -3 & 7 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 7 & 1 \\ 9 & -18 & 49 & 4 \\ 42 & 168 & -105 & 55 \\ 54 & 147 & -49 & 60 \end{array}\right) (-3)\ (-14)\ (-18) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & -9 & 28 & 1 \\ 0 & 210 & -203 & 41 \\ 0 & 201 & -175 & 42 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & -9 & 28 & 4 \\ 0 & 201 & -175 & 42 \\ 0 & 210 & -203 & 41 \end{array}\right) (-1) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}3 & -3 & 7 & 1\\ 0 & -9 & 28 & 1\\ 0 & 201 & -175 & 42\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ 67\\ 3\\ \\ \end{array}\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}3 & -3 & 7 & 1\\ 0 & -9 & 28 & 1\\ 0 & 0 & 1351 & 193\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ \\ 1/193\\ \\ \end{array}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}3 & -3 & 7 & 1\\ 0 & -9 & 28 & 1\\ 0 & 0 & 7 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right).$$

Запишемо систему рівнянь, яка відповідає знайденій розширеній матриці:

$$\begin{cases}3x_1-3x_2+\ \ 7x_3=1\\ \qquad -9x_2+28x_3=1\\ \qquad\qquad\quad 7x_3=1.\end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему: з останнього рівняння системи знаходимо $x_3=\dfrac{1}{7}$; з другого – $x_2=\left(1-28\cdot\dfrac{1}{7}\right):(-9)=\left(1-4\right):(-9)=\dfrac{1}{3}$; з першого – $x_1=\left(1-\left(-3\right)\cdot\dfrac{1}{3}+7\cdot\dfrac{1}{7}\right):3=\left(1+1-1\right):3=\dfrac{1}{3}$.

Таким чином, $x_1=\dfrac{1}{3}$, $x_2=\dfrac{1}{3}$, $x_3=\dfrac{1}{7}$.

Перевірка:

$$\begin{cases}54\cdot\dfrac{1}{3}+147\cdot\dfrac{1}{3}-49\cdot\dfrac{1}{7}=60\\ 9\cdot\dfrac{1}{3}-18\cdot\dfrac{1}{3}+49\cdot\dfrac{1}{7}=4\\ 42\cdot\dfrac{1}{3}+168\cdot\dfrac{1}{3}-105\cdot\dfrac{1}{7}=55\\ 3\cdot\dfrac{1}{3}-3\cdot\dfrac{1}{3}+7\cdot\dfrac{1}{7}=1.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}60=60\\ 4=4\\ 55=55\\ 1=1.\end{cases}$$

Отже, в результаті підстановки знайдених значень невідомих в задану систему, кожне з рівнянь системи перетворилось у тотожність Це означає, що систему розв'язано вірно. ⌋

46. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) (-2)\ (-1)\ (-1) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) 1/4 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{array}\right) (-4) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Знайденій розширеній матриці відповідає система рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ \quad -x_2 + 4x_3 = 3 \\ \qquad x_3 = 1 \\ \qquad 0 = -1. \end{cases}$$

Остання рівність у цій системі є хибною. Тому задана система не має розв'язків.

47. $\begin{cases} 13x_1 + 14x_2 + 8x_3 = -3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7 \\ 7x_1 - 16x_2 + 23x_3 = -30 \\ 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 13 & 14 & 8 & -3 \\ 3 & -2 & 6 & -7 \\ 7 & -16 & 23 & -30 \\ 5 & 8 & 1 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 6 & -7 \\ 13 & 14 & 8 & -3 \\ 7 & -16 & 23 & -30 \\ 5 & 8 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-4)\ (-2)\ 2 \\ \\ \\ (-1) \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 6 & -7 \\ 1 & 22 & -16 & 25 \\ 1 & -12 & 11 & -16 \\ 1 & -12 & 11 & -16 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ (-1) \\ \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 6 & -7 \\ 1 & 22 & -16 & 25 \\ 1 & -12 & 11 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -12 & 11 & -16 \\ 1 & 22 & -16 & 25 \\ 3 & -2 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-1)\ (-3) \\ \\ \\ \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -12 & 11 & -16 \\ 0 & 34 & -27 & 41 \\ 0 & 34 & -27 & 41 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (-1) \\ \\ \\ \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -12 & 11 & -16 \\ 0 & 34 & -27 & 41 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Знайденій матриці відповідає система рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 12x_2 + 11x_3 = -16 \\ \qquad 34x_2 - 27x_3 = 41. \end{cases}$$

Надамо невідомому x_3 довільного значення c. Починаючи з другого рівняння і переходячи до першого, знаходимо

$$x_2 = \frac{1}{34}\left(41 + 27c\right);$$

$$x_1 = \frac{12}{34}\cdot\left(41 + 27c\right) - 11c - 16 = \frac{1}{17}\left(246 + 162c - 17\cdot 11c - 17\cdot 16\right) =$$

$$= -\frac{1}{17}\left(26 + 25c\right).$$

Отже, $x_1 = -\frac{1}{17}\left(26 + 25c\right)$, $x_2 = \frac{1}{34}\left(41 + 27c\right)$, $x_3 = c$, $c \in R$.

48. $\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6 \\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4 \\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2. \end{cases}$

⌐ $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ 2 \\ 2 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 6 & 10 & 4 & 4 & 8 \\ 18 & 8 & 2 & 14 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{c} (-3)\ (-9) \\ \\ \\ \end{array} \longrightarrow$

$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \\ 0 & -55 & -25 & 5 & -50 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ (-5) \\ \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$

Маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4= \quad 6 \\ \qquad -11x_2-5x_3+x_4=-10. \end{cases}$$

У цій системі x_3 та x_4 – вільні невідомі. Надамо їм довільних значень: $x_4=c_1$, $x_3=c_2$, $c_1, c_2 \in R$. Тоді з другого рівняння

$$x_2=\frac{1}{11}(10+c_1-5c_2).$$

Підставляючи це значення в перше рівняння, отримаємо

$$2x_1+\frac{7}{11}(10+c_1-5c_2)+3c_2+c_1=6,$$

$$2x_1=6-c_1-3c_2-\frac{7}{11}(10+c_1-5c_2)=\frac{2}{11}(c_2-9c_1-2),$$

$$x_1=\frac{1}{11}(c_2-9c_1-2).$$

Таким чином, $x_1=\frac{1}{11}(c_2-9c_1-2)$, $x_2=\frac{1}{11}(10+c_1-5c_2)$, $x_3=c_2$, $x_4=c_1$, $c_1, c_2 \in R$. ⌟

49. $\begin{cases} 9x_1-4x_2+5x_3+4x_4=4 \\ 6x_1-2x_2+3x_3+4x_4=5 \\ 3x_1-x_2+3x_3+10x_4=-8. \end{cases}$

⌐ $\left(\begin{array}{cccc|c} 9 & -4 & 5 & 4 & 4 \\ 6 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 10 & -8 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 3 & 10 & -8 \\ 6 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ 9 & -4 & 5 & 4 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{c} (-2)\ (-3) \\ \\ \\ \end{array} \longrightarrow$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 3 & 10 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & -16 & 21 \\ 0 & -1 & -4 & -26 & 28 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 3 & 10 & -8 \\ 0 & -1 & -4 & -26 & 28 \\ 0 & 0 & -3 & -16 & 21 \end{array}\right).$$

Останній матриці відповідає система рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 10x_4 = -8 \\ \quad - x_2 - 4x_3 - 26x_4 = 28 \\ \qquad - 3x_3 - 16x_4 = 21. \end{cases}$$

Поклавши $x_4 = c$, з третього рівняння системи знаходимо

$$-3x_3 - 16c = 21, \quad -3x_3 = 21 + 16c, \quad x_3 = -7 - \frac{16}{3}c.$$

Далі, підставляючи в друге рівняння вираз для x_3 та $x_4 = c$, отримаємо

$$-x_2 - 4\left(-7 - \frac{16}{3}c\right) - 26c = 28, \quad -x_2 = 28 + 26c + 4\left(-7 - \frac{16}{3}c\right) = \frac{14}{3}c,$$

$$x_2 = -\frac{14}{3}c.$$

Підставляючи в перше рівняння системи x_4, x_3 та x_2 знаходимо x_1:

$$x_1 = \left(-8 - \frac{14}{3}c - 3\left(-7 - \frac{16}{3}c\right) - 10c\right) : 3 = \left(13 + \frac{4}{3}c\right) : 3 = \frac{13}{3} + \frac{4}{9}c.$$

Отже, $x_1 = \frac{13}{3} + \frac{4}{9}c$, $x_2 = -\frac{14}{3}c$, $x_3 = -7 - \frac{16}{3}c$, $x_4 = c$, $c \in R$. ┘

50. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$

┌ $$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 7 & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ 3 \\ 3 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 21 & -12 & 3 & 9 & 15 \\ 15 & 21 & -12 & -18 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{cc} (-7) & (-5) \\ & \\ & \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 23 & -11 & -19 & 1 \\ 0 & 46 & -22 & -38 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (-2) \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 23 & -11 & -19 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right).$$

Третій рядок останньої матриці свідчить, що відповідна система містить хибну рівність $0=-3$. Отже, задана система не має розв'язків. $\lrcorner$

51. $\begin{cases} x_1+x_2-6x_3-4x_4=6 \\ 3x_1-x_2-6x_3-4x_4=2 \\ 2x_1+3x_2+9x_3+2x_4=6 \\ 3x_1+2x_2+3x_3+8x_4=-7. \end{cases}$

$$\ulcorner \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -6 & -4 & 6 \\ 3 & -1 & -6 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 9 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 3 & 8 & -7 \end{array}\right) \begin{matrix} (-3)\ (-2)\ (-3) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -6 & -4 & 6 \\ 0 & -4 & 12 & 8 & -16 \\ 0 & 1 & 21 & 10 & -6 \\ 0 & -1 & 21 & 20 & -25 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ (1/4) \\ \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -6 & -4 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 21 & 10 & -6 \\ 0 & 0 & 42 & 30 & -31 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -6 & -4 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 24 & 12 & -10 \\ 0 & 0 & 42 & 30 & -31 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ (1/2) \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -6 & -4 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 12 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 42 & 30 & -31 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ (-42) \\ 12 \end{matrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -6 & -4 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 12 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 108 & -162 \end{array}\right).$$

Запишемо систему рівнянь, яка відповідає знайденій розширеній матриці:

$$\begin{cases} x_1+x_2-6x_3-4x_4= \ 6 \\ \quad -x_2+3x_3+2x_4=-4 \\ \qquad\qquad 12x_3+6x_4=-5 \\ \qquad\qquad\qquad 108x_4=-162. \end{cases}$$

З 4-го рівняння системи знаходимо $x_4=-\dfrac{162}{108}=-\dfrac{3}{2}$. Підставивши x_4 в 3-тє рівняння, знайдемо x_3:

$$12x_3=-5-6\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=4, \quad x_3=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}.$$

Підставивши x_3 та x_4 в 2-ге рівняння, знайдемо x_2:

$$-x_2 = -4 - 2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) - 3\cdot\frac{1}{3} = -2\,,$$
$$x_2 = 2\,.$$

Підставивши x_4, x_3, x_2 в 1-ше рівняння, знаходимо x_1:

$$x_1 = 6 + 4\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) + 6\cdot\frac{1}{3} - 2 = 0\,.$$

Отже, система має розв’язок $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = \frac{1}{3}$, $x_4 = -\frac{3}{2}$.

Вправи для самостійного розв’язання

Розв’язати системи рівнянь або довести їх несумісність:

52. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 = 23 \\ x_1 - 10x_2 = -56. \end{cases}$

53. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 44 \\ 5x_1 + 8x_2 = 112. \end{cases}$

54. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 11x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases}$

55. $\begin{cases} \frac{3}{7}x_1 - \frac{1}{7}x_2 + \frac{1}{14}x_3 = -\frac{6}{7} \\ x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{6}x_3 = -1. \end{cases}$

56. $\begin{cases} 16x_1 - 18x_2 - 7x_3 = 12 \\ 7x_1 - 12x_2 + 21x_3 = -3 \\ x_1 - 27x_2 - 35x_3 = 2. \end{cases}$

57. $\begin{cases} -2x_1 + 13x_3 = 11 \\ 21x_1 - 121x_2 + 131x_3 = 101 \\ x_1 - 121x_2 + 261x_3 = 2. \end{cases}$

58. $\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ 8x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 12. \end{cases}$

59. $\begin{cases} 6x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5 \\ 21x_1 + x_2 - x_3 = 10 \\ 9x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

60. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 13 \\ 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 = -22. \end{cases}$

61. $\begin{cases} 5x_1 - 13x_2 + x_3 = -20 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7 \\ 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 = -9 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$

62. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$

63. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6. \end{cases}$

64. $\begin{cases} 2x_1+2x_2+x_3+5x_4=10 \\ 4x_1-10x_2-4x_3+3x_4=-33 \\ 9x_1+2x_2-2x_3+5x_4=-6 \\ 2x_1+x_2+2x_3+4x_4=10. \end{cases}$

Відповіді:

52. $x_1=-6$, $x_2=5$.

53. $x_1=8$, $x_2=9$.

54. $x_1=2-c$, $x_2=1+3c$, $x_3=c$.

55. Несумісна.

56. $x_1=1$, $x_2=\dfrac{1}{3}$, $x_3=-\dfrac{2}{7}$.

57. Несумісна.

58. $x_1=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}c$, $x_2=c$, $x_3=c$.

59. $x_1=\dfrac{1}{3}$, $x_2=5$, $x_3=2$.

60. Несумісна.

61. $x_1=-\dfrac{1}{11}(31+10c)$, $x_2=\dfrac{1}{11}(5-3c)$, $x_3=c$.

62. $x_1=-1{,}8-0{,}6c$, $x_2=0{,}4-0{,}45c$, $x_3=1{,}2+0{,}4c$, $x_4=c$.

63. Несумісна.

64. $x_1=-1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=1$.

4.2. Розв’язування систем лінійних рівнянь матричним методом

Нехай маємо систему рівнянь (7), в якій $m=n$, тобто число рівнянь дорівнює числу невідомих. Запишемо систему у матричному вигляді (див. стор. 17)

$$AX=B. \tag{9}$$

Якщо $|A|\neq 0$, то розв’язок системи рівнянь (9) можна знайти за формулою

$$X=A^{-1}B. \tag{10}$$

Розв’язати системи лінійних рівнянь матричним методом:

65. $\begin{cases} 5x_1+4x_2=-35 \\ -x_1+x_2=16. \end{cases}$

Γ Для заданої системи рівнянь матриця системи, вектор-стовпець вільних членів та вектор-стовпець невідомих мають відповідно вигляд

$$A=\begin{pmatrix}5 & 4\\ -1 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-35\\ 16\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}.$$

Визначник матриці $|A|=9$. За формулою (5) знаходимо обернену матрицю

$$A^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & -4\\ 1 & 5\end{pmatrix}.$$

Застосувавши формулу (10), дістанемо

$$X=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & -4\\ 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-35\\ 16\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1\cdot(-35)+(-4)\cdot 16\\ 1\cdot(-35)+5\cdot 16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11\\ 5\end{pmatrix}.$$

Таким чином, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11\\ 5\end{pmatrix}$. Звідси, прирівнюючи відповідні елементи вектор-стовпців, знаходимо $x_1=-11$, $x_2=5$. $\lrcorner$

66. $\begin{cases}7x_1+2x_2 = 11\\ -7x_1+x_2+x_3=-2\\ 6x_1-6x_2-3x_3=-15.\end{cases}$

$\ulcorner$ Для заданої системи

$$A=\begin{pmatrix}7 & 2 & 0\\ -7 & 1 & 1\\ 6 & -6 & -3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}11\\ -2\\ -15\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}.$$

Обчислимо визначник матриці A:

$$|A|=\begin{vmatrix}7 & 2 & 0\\ -7 & 1 & 1\\ 6 & -6 & -3\end{vmatrix}=7\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ -6 & -3\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}-7 & 1\\ 6 & -3\end{vmatrix}=-9\neq 0.$$

Для знаходження оберненої матриці A^{-1} обчислимо алгебраїчні доповнення:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -6 & -3\end{vmatrix}=1\cdot(-3)-1\cdot(-6)=3,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}-7 & 1\\ 6 & -3\end{vmatrix}=-(-7)\cdot(-3)+1\cdot 6=-15,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}-7 & 1\\ 6 & -6\end{vmatrix}=(-7)\cdot(-6)-1\cdot 6=36,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} = -2\cdot(-3) + 0\cdot(-6) = 6\,,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 7\cdot(-3) - 0\cdot 6 = -21\,,$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} = -7\cdot(-6) + 2\cdot 6 = 54\,,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1 - 0\cdot 1 = 2\,,$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} = -7\cdot 1 + 0\cdot(-7) = -7\,,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} = 7\cdot 1 - 2\cdot(-7) = 21\,.$$

За формулою (6) запишемо приєднану матрицю

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & -15 & 36 \\ 6 & -21 & 54 \\ 2 & -7 & 21 \end{pmatrix}.$$

За формулою (4) знаходимо обернену матрицю

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot \tilde{A}^{T} = \frac{1}{-9}\cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ -15 & -21 & -7 \\ 36 & 54 & 21 \end{pmatrix}.$$

Застосувавши формулу (10), дістанемо

$$X = \frac{1}{-9}\cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ -15 & -21 & -7 \\ 36 & 54 & 21 \end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ -15 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{9}\cdot \begin{pmatrix} 3\cdot 11 + 6\cdot(-2) + 2\cdot(-15) \\ (-15)\cdot 11 + (-21)\cdot(-2) + (-7)\cdot(-15) \\ 36\cdot 11 + 54\cdot(-2) + 21\cdot(-15) \end{pmatrix} = -\frac{1}{9}\cdot \begin{pmatrix} -9 \\ -18 \\ -27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ або $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. $\lrcorner$

67. $\begin{cases} -3x_1+8x_2-9x_3=33 \\ 4x_1-x_2+2x_3=-17 \\ x_1-4x_2+3x_3=-23. \end{cases}$

⌈ Запишемо матрицю системи $A=\begin{pmatrix} -3 & 8 & -9 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

Обчислимо визначник матриці A. Він дорівнює 40. Далі знайдемо приєднану матрицю $\tilde{A}$. Для цього обчислимо алгебраїчні доповнення елементів матриці A:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}=5,\ A_{12}=-\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-10,\ A_{13}=\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}=-15,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 8 & -9 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}=12,\ A_{22}=\begin{vmatrix} -3 & -9 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=0,\ A_{23}=-\begin{vmatrix} -3 & 8 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}=-4,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 8 & -9 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=7,\ A_{32}=-\begin{vmatrix} -3 & -9 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=-30,\ A_{33}=\begin{vmatrix} -3 & 8 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}=-29.$$

Отже, маємо приєднану матрицю

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 5 & -10 & -15 \\ 12 & 0 & -4 \\ 7 & -30 & -29 \end{pmatrix}.$$

За формулою (4) знаходимо обернену матрицю

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\tilde{A}^T=\frac{1}{40}\begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ -10 & 0 & -30 \\ -15 & -4 & -29 \end{pmatrix}.$$

Застосувавши формулу (10), дістанемо

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\frac{1}{40}\begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ -10 & 0 & -30 \\ -15 & -4 & -29 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 33 \\ -17 \\ -23 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{40}\begin{pmatrix} 5\cdot 33+(-17)\cdot 12+7\cdot 23 \\ (-10)\cdot 33+(-30)\cdot(-23) \\ (-15)\cdot 33+(-4)\cdot(-17)+(-29)\cdot(-23) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Звідси $x_1=-5,\ x_2=9,\ x_3=6$. ⌋

68. $\begin{cases} 5x_1+2x_2-7x_3=9 \\ -5x_2+8x_3=130 \\ 2x_1-5x_2+5x_3=31. \end{cases}$

$\ulcorner$ Запишемо матрицю системи

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -7 \\ 0 & -5 & 8 \\ 2 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо її визначник: $|A|=37$. Щоб знайти приєднану матрицю, обчислимо алгебраїчні доповнення елементів матриці A.

$$A_{11}=\begin{vmatrix} -5 & 8 \\ -5 & 5 \end{vmatrix}=15, \quad A_{12}=-\begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=16, \quad A_{13}=\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}=10,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ -5 & 5 \end{vmatrix}=25, \; A_{22}=\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=39, \quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}=29,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ -5 & 8 \end{vmatrix}=-19, \; A_{32}=-\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}=-10, \; A_{33}=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}=-25.$$

Отже, приєднана матриця

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 15 & 16 & 10 \\ 25 & 39 & 29 \\ -19 & -40 & -25 \end{pmatrix}.$$

За формулою (4) знаходимо обернену матрицю

$$A^{-1}=\frac{1}{37}\begin{pmatrix} 15 & 25 & -19 \\ 16 & 39 & -40 \\ 10 & 29 & -25 \end{pmatrix}.$$

Застосувавши формулу (10), дістанемо

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\frac{1}{37}\begin{pmatrix} 15 & 25 & -19 \\ 16 & 39 & -40 \\ 10 & 29 & -25 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 9 \\ 130 \\ 31 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Звідси $x_1=8$, $x_2=2$, $x_3=5$. $\lrcorner$

Вправи для самостійного розв’язання

Розв’язати системи лінійних рівнянь матричним методом:

69. $\begin{cases} 7x_1 + 8x_2 = -99 \\ 2x_1 + 5x_2 = -50. \end{cases}$

70. $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 44 \\ x_1 + x_2 - 9x_3 = 21 \\ x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 70. \end{cases}$

71. $\begin{cases} -11x_1 + 6x_2 - 11x_3 = -63 \\ 6x_1 + 9x_2 - 4x_3 = 33 \\ 9x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 19. \end{cases}$

72. $\begin{cases} 8x_1 - 8x_2 - 3x_3 = 79 \\ 2x_1 - 3x_3 = 21 \\ 8x_1 - 11x_2 + x_3 = 74. \end{cases}$

Відповіді:

69. $x_1 = -5$, $x_2 = -8$.

70. $x_1 = 1$, $x_2 = 11$, $x_3 = -1$.

71. $x_1 = 9$, $x_2 = -5$, $x_3 = -6$.

72. $x_1 = 3$, $x_2 = -5$, $x_3 = -5$.

4.3. Розв’язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера

Нехай маємо систему рівнянь (7), в якій $m = n$. Якщо визначник матриці системи $\Delta = |A| \neq 0$, то розв’язок системи можна знайти за *формулами Крамера*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ldots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

де Δ_i ($i = 1, 2, ..., n$) – визначник матриці, що отримана з матриці A заміною i-го стовпця на стовпець вільних членів B.

Розв’язати системи лінійних рівнянь за формулами Крамера:

73. $\begin{cases} x_1 - x_2 = -2 \\ 5x_1 + 9x_2 = 130. \end{cases}$

⌜ Знаходимо визначник матриці системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = 9 - (-5) = 14 \neq 0.$$

Знаходимо визначник Δ_1, який дістаємо в результаті заміни першого стовпця визначника Δ на стовпець вільних членів, та визначник Δ_2, який дістаємо в результаті заміни другого стовпця визначника Δ на стовпець вільних членів:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 130 & 9\end{vmatrix}=112,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 5 & 130\end{vmatrix}=140\,.$$

Отже, за формулами Крамера отримуємо

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{112}{14}=8,\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{140}{14}=10. \quad \lrcorner$$

74. $\begin{cases} 7x_1+2x_2 \qquad = \ 11\\ -7x_1+\ x_2+\ x_3= -2\\ 6x_1-6x_2-3x_3=-15.\end{cases}$

$\ulcorner$ Знаходимо визначники:

$$\Delta=\begin{vmatrix}7 & 2 & 0\\ -7 & 1 & 1\\ 6 & -6 & -3\end{vmatrix}=7\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ -6 & -3\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}-7 & 1\\ 6 & -3\end{vmatrix}+0=7\cdot3-2\cdot15=-9\neq0\,,$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}11 & 2 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ -15 & -6 & -3\end{vmatrix}=11\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ -6 & -3\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -15 & -3\end{vmatrix}=-9\,,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}7 & 11 & 0\\ -7 & -2 & 1\\ 6 & -15 & -3\end{vmatrix}=7\cdot\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -15 & -3\end{vmatrix}-11\cdot\begin{vmatrix}-7 & 1\\ 6 & -3\end{vmatrix}=-18\,,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}7 & 2 & 11\\ -7 & 1 & -2\\ 6 & -6 & -15\end{vmatrix}=7\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\ -6 & -15\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}-7 & -2\\ 6 & -15\end{vmatrix}+11\cdot\begin{vmatrix}-7 & 1\\ 6 & -6\end{vmatrix}=-27\,.$$

За формулами Крамера отримуємо

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-9}{-9}=1,\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-18}{-9}=2\,,\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-27}{-9}=3\,. \quad \lrcorner$$

75. $\begin{cases} 2x_1+\ x_2+3x_3=\ 9\\ x_1-2x_2+\ x_3=-2\\ 3x_1+2x_2+2x_3=\ 7.\end{cases}$

$\ulcorner$ Знаходимо визначники:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & -2 & 1\\ 3 & 2 & 2\end{vmatrix}=13\,,\quad \Delta_1=\begin{vmatrix}9 & 1 & 3\\ -2 & -2 & 1\\ 7 & 2 & 2\end{vmatrix}=-13\,,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 26, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 39.$$

За формулами Крамера отримуємо

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-13}{13} = -1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{26}{13} = 2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{39}{13} = 3. \quad \rfloor$$

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

Розв'язати системи лінійних рівнянь за формулами Крамера:

76. $\begin{cases} 9x_1 - 5x_2 = 19 \\ x_1 - x_2 = 7. \end{cases}$

77. $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 - 10x_3 = 164 \\ -x_1 + 9x_2 + 7x_3 = -96 \\ 7x_1 + 3x_2 + 9x_3 = -32. \end{cases}$

78. $\begin{cases} -7x_1 - 9x_2 + 11x_3 = 66 \\ -6x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 63 \\ 10x_1 + x_2 - 8x_3 = -102. \end{cases}$

Відповіді:

76. $x_1 = -4$, $x_2 = -11$. **77.** $x_1 = 10$, $x_2 = -1$, $x_3 = -11$.

78. $x_1 = -11$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$.