Розділ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

1. Дії над матрицями

Матрицею розміру $m \times n$ називають прямокутну таблицю чисел, в якій m рядків та n стовпців:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

або коротко $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$.

Над матрицями виконують дії додавання, віднімання, множення, множення на число, транспонування.

Добуток матриці $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ *на число* α – це матриця $\alpha A = \left(\alpha a_{ij}\right)_{m \times n}$, тобто кожен елемент матриці A слід помножити на α.

Сума (*різниця*) матриць $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ та $B = \left(b_{ij}\right)_{m \times n}$ – це матриця $A + B = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)_{m \times n}$ $\left(A - B = \left(a_{ij} - b_{ij}\right)_{m \times n}\right)$, тобто для знаходження суми (різниці) матриць A і B слід додати (відняти) їх відповідні елементи. Сума та різниця визначені для матриць однакового розміру.

Добутком матриці $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times p}$ *на матрицю* $B = \left(b_{ij}\right)_{p \times n}$ називають матрицю $C = AB$ розміру $m \times n$, елементи c_{ij} якої обчислюються за правилом: c_{ij} є сумою попарних добутків елементів i-го рядка матриці A та відповідних елементів j-го стовпця матриці B. Добуток AB визначений, якщо число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B. В загальному випадку $AB \neq BA$.

Транспонування матриці: якщо рядки матриці A записати як стовпці (зберігаючи порядок), то отриману матрицю називають *транспонованою* до матриці A і позначають A^T. Відзначимо, що якщо A – матриця розміру $m \times n$, то A^T – матриця розміру $n \times m$.

1. Знайти матрицю $2A$, якщо $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

⌈ $2A = \begin{pmatrix} 2(-1) & 2 \cdot 5 & 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 10 & 4 \\ 4 & 6 & -6 \end{pmatrix}$. ⌋

2. Знайти матрицю $A+B$, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 \\ -1 & -2 & 6 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\ulcorner$ $$A+B=\begin{pmatrix} 0+(-2) & 1+2 & 8+(-1) \\ -1+(-3) & -2+0 & 6+4 \\ 3+1 & -4+(-3) & 0+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 7 \\ -4 & -2 & 10 \\ 4 & -7 & 1 \end{pmatrix}.$$ $\lrcorner$

3. Знайти $A-B$, якщо $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

$\ulcorner$ $$A-B=\begin{pmatrix} 5-(-2) & 4-1 \\ -2-(-1) & 0-6 \\ 1-3 & 3-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -1 & -6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$ $\lrcorner$

4. Обчислити AB, якщо:

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$\ulcorner$ а) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot(-1)+0\cdot(-2)+(-1)\cdot 1 \\ 2\cdot(-1)+(-2)\cdot(-2)+3\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix};$$

б) $$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\Big((-1)\cdot 1+1\cdot 0+2\cdot 1 \quad (-1)\cdot 3+1\cdot 2+2\cdot(-1)\Big)=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix}.$$ $\lrcorner$

5. Знайти AB та BA, якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

$\ulcorner$ $$AB=\begin{pmatrix} 1\cdot 2+2\cdot(-1) & 1\cdot 1+2\cdot 3 \\ 3\cdot 2+4\cdot(-1) & 3\cdot 1+4\cdot 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 2 & 15 \end{pmatrix};$$

$$BA=\begin{pmatrix} 2\cdot 1+1\cdot 3 & 2\cdot 2+1\cdot 4 \\ (-1)\cdot 1+3\cdot 3 & (-1)\cdot 2+3\cdot 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Отже, $AB\neq BA$. $\lrcorner$

6. Обчислити AB, якщо $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

$\ulcorner$ $$AB=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot(-1)+(-1)\cdot(-2) & 2\cdot 1+(-1)\cdot 1 \\ (-1)\cdot(-1)+1\cdot(-2) & (-1)\cdot 1+1\cdot 1 \\ 0\cdot(-1)+3\cdot(-2) & 0\cdot 1+3\cdot 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}.$$ $\lrcorner$

7. Обчислити добуток матриць A та B, якщо

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\ulcorner$ $$AB=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} (-1)\cdot 1+1\cdot(-1)+2\cdot 0 & (-1)\cdot 1+1\cdot 0+0\cdot 1 & (-1)\cdot 2+1\cdot(-1)+1\cdot 0 \\ 2\cdot 1+1\cdot(-1)+3\cdot 2 & 2\cdot 1+1\cdot 0+3\cdot 1 & 2\cdot 2+1\cdot(-1)+3\cdot 1 \\ 4\cdot 1+3\cdot(-1)+1\cdot 2 & 4\cdot 1+3\cdot 0+1\cdot 1 & 4\cdot 2+3\cdot(-1)+1\cdot 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 7 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$ $\lrcorner$

8. Обчислити добуток матриць A та B, якщо

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -6 & -10 & -8 & -1 \\ 6 & -4 & -5 & -10 \\ -8 & 7 & -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

$\ulcorner$ $$AB=\begin{pmatrix} -3 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -6 & -10 & -8 & -1 \\ 6 & -4 & -5 & -10 \\ -8 & 7 & -6 & -2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 18+18-32 & 30-12+28 & 24-15-24 & 3-30-8 \\ -30+18-48 & -50-12+42 & 40-15-36 & -5-30-18 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 4 & 46 & -15 & -35 \\ -60 & -20 & -91 & -53 \end{pmatrix}. \quad \lrcorner$$

9. Знайти A^T, якщо: а) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$\ulcorner$ а) Записуючи перший та другий рядки матриці A відповідно як перший та другий стовпці, дістанемо $A^T=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

б) Аналогічно знаходимо $A^T=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. $\lrcorner$

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

10. Обчислити $(-2)A$, якщо $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

11. Обчислити $A-B$, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

12. Обчислити $2A+3B$, якщо $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Обчислити добуток AB заданих матриць:

13. а) $A=\begin{pmatrix} -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & -6 \\ -10 & -8 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} -1 & 6 & -4 \\ -5 & 10 & -8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$.

14. $A=\begin{pmatrix} 8 & 5 & -7 \\ 7 & -8 & -5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -7 & 1 & 3 & 9 \\ -6 & 3 & 1 & 9 \\ 7 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

15. $A=\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -6 & -10 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}$.

16. $A=\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 5 & -10 \\ -8 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$.

17. $A=\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 4 & 5 \\ 3 & 6 \\ -6 & -10 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -8 & -1 & 6 \\ -4 & -5 & -10 \end{pmatrix}$.

18. Знайти A^T, якщо: а) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Відповіді:

10. $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & -8 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$.

11. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

12. $\begin{pmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

13. а) $\begin{pmatrix} -37 & -59 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -35 \\ 41 \end{pmatrix}$.

14. $\begin{pmatrix} -135 & 65 & 36 & 117 \\ -36 & 13 & 18 & -9 \end{pmatrix}$.

15. $\begin{pmatrix} -6 & 27 \\ -64 & -45 \\ -66 & -36 \end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix} -68 & -32 \\ -50 & -40 \\ 104 & 51 \end{pmatrix}$.

17. $\begin{pmatrix} 12 & -12 & -48 \\ -52 & -29 & -26 \\ -48 & -33 & -42 \\ 88 & 56 & 64 \end{pmatrix}$.

18. а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Визначник матриці

Визначник є числовою характеристикою квадратної матриці. *Визначником матриці A розміру* 2×2 або *визначником другого* *порядку* називається число, яке обчислюється за формулою

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}. \tag{1}$$

Визначником матриці A *розміру* 3×3 або *визначником третього порядку* називається число, яке обчислюється за формулою

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Формулу (2) називають *розкладом визначника* за елементами першого рядка. Слід запам'ятати лише принцип побудови правої частини формули (2): елемент a_{11} множимо на визначник другого порядку, який дістаємо з визначника $|A|$ викреслюванням у ньому 1-го рядка і 1-го стовпця; другий доданок беремо зі знаком "мінус" і множимо елемент a_{12} на визначник другого порядку, який дістаємо з визначника $|A|$ викреслюванням у ньому 1-го рядка і 2-го стовпця; третій доданок беремо зі знаком "плюс" і множимо елемент a_{13} на визначник другого порядку, який дістаємо з визначника $|A|$ викреслюванням у ньому 1-го рядка і 3-го стовпця.

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} матриці A називається число, яке дорівнює добутку $(-1)^{i+j}$ на визначник матриці, яка утворюється в результаті викреслювання у матриці A рядка з номером i та стовпця з номером j. Позначимо алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} через A_{ij}. Для матриці A розміру 3×3 маємо:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{21} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Отже, формулу (2) можна записати у вигляді

$$|A| = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}. \tag{2′}$$

Визначник четвертого порядку обчислюється за аналогічною до (2′) формулою

$$|A| = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} + a_{14} \cdot A_{14}, \tag{3}$$

де A_{1j} – відповідні алгебраїчні доповнення елементів a_{1j} першого рядка матриці, тобто визначники третього порядку, помножені на $(-1)^{1+j}$.

Для обчислення визначників, порядок яких вищий за третій, доцільно використовувати деякі з їх *властивостей*.

1°. Визначник не зміниться, якщо до одного рядка (стовпця) додати інший, помножений на довільне число.

2°. Якщо у визначнику поміняти місцями два рядки (стовпці), то визначник змінить знак на протилежний.

3°. Визначник матриці не змінюється при її транспонуванні, тобто $\left|A^T\right| = |A|$.

Обчислити визначники:

19. $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$.

⌈ За формулою (1) маємо $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - (-1) \cdot 2 = 5$. ⌋

20. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.

⌈ Застосовуючи послідовно формули (2) та (1), знаходимо

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (2 \cdot 0 - (-2) \cdot 3) - (-1) \cdot (3 \cdot 0 - (-2) \cdot (-2)) = 6 - 4 = 2 .$$ ⌋

21. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 1 & -10 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$.

⌈ Застосовуючи послідовно формули (2) та (1), знаходимо

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 1 & -10 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} -10 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + (-5) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -10 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot ((-10) \cdot 6 - (-1) \cdot 2) - 2 \cdot (1 \cdot 6 - 3 \cdot (-1)) + (-5) \cdot (1 \cdot 2 - 3 \cdot (-10)) =$$

$$= 58 - 18 - 160 = -120 .$$ ⌋

22. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$

⌐ За формулою (3) маємо

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot A_{11} + 0\cdot A_{12} + 0\cdot A_{13} + 2\cdot A_{14} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Обчислимо визначники третього порядку:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3\cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 4 - 18 = -18;$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1\cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 2\cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 8 + 8 = 6.$$

Остаточно маємо

$$|A| = -18 - 2\cdot 6 = -30. \quad ⌟$$

23. $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & -3 & -2 \\ 3 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 5 & -6 \end{vmatrix}.$

⌐ Скористаємось властивістю **1°** і утворимо, наприклад, у першому стовпці нулі. Для цього виконаємо послідовно такі дії:

1) до першого рядка додамо другий, помножений на 2; 2) до третього рядка додамо другий, помножений на (-3); 3) до четвертого рядка додамо другий, помножений на (-2). Запишемо в умовних позначеннях вказані дії, а також їх результат (опускаємо запис відповідних обчислень):

$$
|A| = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & -3 & -2 \\ 3 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 5 & -6 \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 2\ \ -3\ \ -2 \\ \\ \\ \end{array};
$$

$$
|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 8 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 11 & -2 \end{vmatrix}.
$$

Застосуємо далі властивість **3°** і послідовно формули (3) та (2):

$$
|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 8 & 0 \\ -2 & -3 & 10 & 11 \\ 1 & -2 & 10 & -2 \end{vmatrix} = 0 + 1 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 8 & 0 \\ -2 & 10 & 11 \\ 1 & 10 & -2 \end{vmatrix} + 0 + 0 =
$$

$$
= -\big(1 \cdot (-20 - 110) - 8(4 - 11) + 0\big) = -(-130 + 56) = 74. \quad \rfloor
$$

Вправи для самостійного розв’язання

24. Обчислити визначник другого порядку

$$
\begin{vmatrix} 1/3 & 2 \\ 1{,}5 & 6 \end{vmatrix}.
$$

Обчислити визначники третього порядку:

25. $\begin{vmatrix} -10 & 7 & 8 \\ -6 & 1 & 6 \\ -2 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$

26. $\begin{vmatrix} 2 & -11 & 4 \\ 5 & 8 & -4 \\ -3 & -4 & 0 \end{vmatrix}.$

27. $\begin{vmatrix} -3 & -8 & 9 \\ 2 & -9 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}.$

Обчислити визначники четвертого порядку:

28. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$

29. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 & 6 \\ 10 & -4 & 7 & 4 \\ 5 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 5 & 9 \end{vmatrix}$.

Вказівка. Додати до другого рядка третій, помножений на (-2), а потім скористатись властивістю **2º**.

Відповіді:

24. -1. **25.** 156. **26.** -148.
27. 345. **28.** 12. **29.** 266.

3. Обернена матриця

Нехай A – квадратна матриця і $|A| \neq 0$. *Обернена матриця* до матриці A обчислюється за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}^{T}, \tag{4}$$

де $\tilde{A}$ – матриця, складена з алгебраїчних доповнень елементів матриці A. Матрицю $\tilde{A}$ називають *приєднаною* до A.

Для матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ формула (4) набуває вигляду

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Для матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ приєднана матриця має вигляд

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Обернена матриця A^{-1} задовольняє співвідношення

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E,$$

де E – одинична матриця. Для перевірки правильності знаходження оберненої матриці достатньо переконатися, наприклад, що $A^{-1}A = E$.

30. Знайти обернену матрицю до матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

$\ulcorner$ Визначник матриці $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 14 \neq 0$. Тому існує обернена матриця до A. За умовою задачі $a_{11} = 2$, $a_{12} = -2$, $a_{21} = 4$, $a_{22} = 3$. Тоді за формулою (5)

$$A^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}. \quad \lrcorner$$

31. Знайти обернену матрицю та переконатися, що $A^{-1}A = E$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

$\ulcorner$ Обчислимо визначник матриці А:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \big(3 \cdot (-3) - -4 \cdot (-2)\big) - 5 \cdot \big(6 \cdot (-3) - 4 \cdot 5\big) + 7 \cdot \big(6 \cdot (-2) - 3 \cdot 5\big) =$$

$$= 2 \cdot (-1) - 5 \cdot (-38) + 7 \cdot (-27) = -1.$$

Визначник не дорівнює нулю, тобто обернена матриця існує.

Знайдемо приєднану матрицю $\tilde{A}$. Для цього обчислимо алгебраїчні доповнення елементів матриці A. Нагадаємо, що алгебраїчне доповнення A_{ij} елемента a_{ij} – це число, яке дорівнює добутку $(-1)^{i+j}$ на визначник матриці, що утворилась, коли у матриці A викреслили рядок з номером i та стовпець з номером j. Отже, якщо сума $i + j$ парна, то знак відповідного визначника не зміниться. Якщо ж сума $i + j$ непарна, то перед визначником слід поставити знак мінус.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 38, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -27,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -41, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 29,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}5 & 7\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-1,\ A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 7\\ 6 & 4\end{vmatrix}=34,\ A_{33}=\begin{vmatrix}2 & 5\\ 6 & 3\end{vmatrix}=-24\,.$$

Запишемо приєднану матрицю згідно з формулою (6):

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}-1 & 38 & -27\\ 1 & -41 & 29\\ -1 & 34 & -24\end{pmatrix}.$$

За формулою (4) знаходимо обернену матрицю:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\tilde{A}^{T}=\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 38 & -41 & 34\\ -27 & 29 & -24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -38 & 41 & -34\\ 27 & -29 & 24\end{pmatrix}.$$

Покажемо, що $A^{-1}\cdot A=E$:

$$A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -38 & 41 & -34\\ 27 & -29 & 24\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 5 & 7\\ 6 & 3 & 4\\ 5 & -2 & -3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot 2+(-1)\cdot 6+1\cdot 5 & 1\cdot 5+(-1)\cdot 3+1\cdot(-2) & 1\cdot 7+4\cdot(-1)+1\cdot(-3)\\ (-38)\cdot 2+6\cdot 41+(-34)\cdot 5 & (-38)\cdot 5+3\cdot 41+(-2)\cdot(-34) & (-38)\cdot 7+4\cdot 41+(-34)\cdot(-3)\\ 27\cdot 2+6\cdot(-29)+24\cdot 5 & 27\cdot 5+3\cdot(-29)+24\cdot(-2) & 27\cdot 7+4\cdot(-29)+24\cdot(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.\ \lrcorner$$

32. Знайти обернену матрицю до матриці $A=\begin{pmatrix}6 & 7 & 5\\ 10 & 10 & 3\\ 9 & 6 & 5\end{pmatrix}$.

$\ulcorner$ Визначник матриці $|A|=-119$. Знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці A:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}10 & 3\\ 6 & 5\end{vmatrix}=32,\ A_{12}=-\begin{vmatrix}10 & 3\\ 9 & 5\end{vmatrix}=-23,\ A_{13}=\begin{vmatrix}10 & 10\\ 9 & 6\end{vmatrix}=-30\,,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}7 & 5\\ 6 & 5\end{vmatrix}=-5,\ A_{22}=\begin{vmatrix}6 & 5\\ 9 & 5\end{vmatrix}=-15,\ A_{23}=-\begin{vmatrix}6 & 7\\ 9 & 6\end{vmatrix}=27\,,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}7 & 5\\ 10 & 3\end{vmatrix}=-29,\ A_{32}=-\begin{vmatrix}6 & 5\\ 10 & 3\end{vmatrix}=32,\ A_{33}=\begin{vmatrix}6 & 7\\ 10 & 10\end{vmatrix}=-10\,.$$

Запишемо приєднану матрицю згідно з (6):

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 32 & -23 & -30 \\ -5 & -15 & 27 \\ -29 & 32 & -10 \end{pmatrix}.$$

За формулою (4) знаходимо обернену матрицю

$$A^{-1} = -\frac{1}{119}\begin{pmatrix} 32 & -5 & -29 \\ -23 & -15 & 32 \\ -30 & 27 & -10 \end{pmatrix}. \quad \lrcorner$$

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

Знайти обернені матриці до заданих:

33. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

34. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

35. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -5 \\ 1 & -10 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

36. $\begin{pmatrix} -10 & 7 & 8 \\ -6 & 1 & 6 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

37. $\begin{pmatrix} 2 & -11 & 4 \\ 5 & 8 & -4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

Відповіді:

33. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix}$.

34. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

35. $-\frac{1}{84}\begin{pmatrix} -58 & 2 & -48 \\ -9 & 9 & -6 \\ 32 & -4 & 12 \end{pmatrix}$.

36. $\frac{1}{156}\begin{pmatrix} 7 & -49 & 34 \\ 30 & -54 & 12 \\ 2 & -14 & 32 \end{pmatrix}$.

37. $-\frac{1}{148}\begin{pmatrix} -16 & -16 & 12 \\ 12 & 12 & 28 \\ 4 & 41 & 71 \end{pmatrix}$.