Зразок виконання контрольної роботи № 1

<u>Завдання 1</u>. Дано $A=\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Знайти а) AB; б) BA; в) AA^{-1}; г) $A^{-1}A$.

Розв'язання. При множенні матриць обов'язково звернути увагу на те, щоб кількість елементів в рядках першої матриці A співпала з кількістю елементів в стовпчиках матриці B.

а) Знайдемо добуток матриць: $AB=\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}=$

$$=\begin{bmatrix} (-4)\cdot 1+0\cdot 12+1\cdot(-2) & (-4)\cdot 2+0\cdot 0+1\cdot 1 & (-4)\cdot(-3)+0\cdot 1+1\cdot 3 \\ 2\cdot 1+(-1)\cdot 2+3\cdot(-2) & 2\cdot 2+(-1)\cdot 0+3\cdot 1 & 2\cdot(-3)+(-1)\cdot 1+3\cdot 3 \\ 3\cdot 1+2\cdot 2+2\cdot(-2) & 3\cdot 2+2\cdot 0+2\cdot 1 & 3\cdot(-3)+2\cdot 1+2\cdot 3 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} -6 & -7 & 15 \\ -6 & 7 & 2 \\ 3 & 8 & -1 \end{bmatrix}.$$

б) Знайдемо добуток матриць: $BA=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}=$

$$=\begin{bmatrix} 1\cdot(-4)+2\cdot 2+(-3)\cdot 3 & 1\cdot 0+2\cdot(-1)+(-3)\cdot 2 & 1\cdot 1+2\cdot 3+(-3)\cdot 2 \\ 2\cdot(-4)+0\cdot 2+1\cdot 3 & 2\cdot 0+0\cdot(-1)+1\cdot 2 & 2\cdot 1+0\cdot 3+1\cdot 2 \\ -2\cdot(-4)+1\cdot 2+3\cdot 3 & (-2)\cdot 0+1\cdot(-1)+3\cdot 2 & (-2)\cdot 1+1\cdot 3+3\cdot 2 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} -9 & -8 & 1 \\ -5 & 2 & 4 \\ 19 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

<u>Висновок.</u> $AB\neq BA$ (переставний закон множення матриць не виконується).

в) Щоб обчислити $A\cdot A^{-1}$ чи $A^{-1}\cdot A$, слід до матриці A спочатку вказати обернену матрицю A^{-1}.

Її формула: $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$. (*)

Видно, що $\exists A^{-1}$, якщо $\Delta = \det A \neq 0$ ($\det A$ - детермінант матриці A).

$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \boxed{=}$ обчислюємо за методом “трикутника”.

$\boxed{=} (-4)\cdot(-1)\cdot 2 + 0\cdot 3\cdot 3 + 2\cdot 2\cdot 1 - 3\cdot(-1)\cdot 1 - 2\cdot 3\cdot(-4) - 0\cdot 2\cdot 2 = 39$.

Отже, $\Delta = 39 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$.

Знаходимо:

$A_{11} = +\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (-2-6) = -8$;

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(4-9) = -4+9 = 5$;

$A_{13} = +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4-(-3) = 4+3 = 7$;

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(0-2) = 2$;

$A_{22} = +\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -8-3 = -11$;

$A_{23} = -\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(-8-0) = 8$;

$A_{31} = +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1$;

$A_{32} = -\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 14$;

$A_{33} = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 4$.

Підставимо A_{ij} в формулу (*): $A^{-1} = \frac{1}{39}\begin{bmatrix} -8 & 2 & 1 \\ 5 & -11 & 14 \\ 7 & 8 & 4 \end{bmatrix}$.

Знайдемо $AA^{-1} = \frac{1}{39}\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -8 & 2 & 1 \\ 5 & -11 & 14 \\ 7 & 8 & 4 \end{bmatrix} =$

$$= \frac{1}{39}\begin{bmatrix} (-4)\cdot(-8)+0\cdot 5+1\cdot 7 & (-4)\cdot 2+0\cdot(-11)+1\cdot 8 & (-4)\cdot 1+0\cdot 14+1\cdot 4 \\ 2\cdot(-8)+(-1)\cdot 5+3\cdot 7 & 2\cdot 2+(-1)\cdot(-11)+3\cdot 8 & 2\cdot 1+(-1)\cdot 14+3\cdot 4 \\ 3\cdot(-8)+2\cdot 5+2\cdot 7 & 3\cdot 2+2\cdot(-11)+2\cdot 8 & 3\cdot 1+2\cdot 14+2\cdot 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{39}\begin{bmatrix} 39 & 0 & 0 \\ 0 & 39 & 0 \\ 0 & 0 & 39 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E \text{ (одинична матриця).}$$

д) Обчислимо добуток: $A^{-1}A = \frac{1}{39}\begin{bmatrix} -8 & 2 & 1 \\ 5 & -11 & 14 \\ 7 & 8 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} =$

$$= \frac{1}{39}\begin{bmatrix} (-8)\cdot(-4)+2\cdot 2+1\cdot 3 & (-8)\cdot 0+2\cdot(-1)+1\cdot 2 & (-8)\cdot 1+2\cdot 3+1\cdot 2 \\ 5\cdot(-4)+(-11)\cdot 2+14\cdot 13 & 5\cdot 0+(-11)\cdot(-1)+14\cdot 2 & 5\cdot 1+(-11)\cdot 3+14\cdot 2 \\ 7\cdot(-4)+8\cdot 2+4\cdot 3 & 7\cdot 0+8\cdot(-1)+4\cdot 2 & 7\cdot 1+8\cdot 3+4\cdot 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{39}\begin{bmatrix} 39 & 0 & 0 \\ 0 & 39 & 0 \\ 0 & 0 & 39 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E \text{ (одинична матриця).}$$

Висновок. При множенні даної і оберненої матриці діє переставний закон множення $\boxed{AA^{-1} = A^{-1}\cdot A}$. Це єдиний випадок, коли матриці можна переставляти місцями.

Завдання 2. Дано $\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix}$, де $i = 2,\ \ j = 3$ (i - рядок, j - стовпчик). Обчислити визначник: 1) розклавши його за елементами i-го рядка; 2) розклавши його за елементами j -го стовпчика; 3) отримавши попередньо нулі в i - му рядку.

Розв'язання. 1) Розкладемо визначник за елементами $2^{\text{го}}$ рядка $(i=2)$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} \boxed{=} \sum (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$ (тут i - рядок; j - стовпчик; a_{ij} - елемент, отриманий при перетині i -го рядка та j -го стовпчика; M_{ij} - мінор (визначник), отриманий після викреслення i -го рядка та j -го стовпчика).

$$\boxed{=} (-1)^{2+1} \cdot 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= -2(-2-0) + 2(3-4) - 1(0-8) = 4+2+8 = 14 .$$

2) Розкладемо визначник аналогічно за елементами 3-го стовпчика:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \cdot 1 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 1 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} +$$
$$+ (-1)^{3+3} \cdot (-1) \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (0+8) - 1(-8) - 1(6-4) = 8+8-2 = 14 .$$

3) Попередньо зробимо нулі, наприклад, в 3-ому стовпчику:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} \boxed{=}$$ Третій рядок додаємо до першого; третій рядок додамо до другого; третій рядок в новому визначнику запишемо без змін.

$$\boxed{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} \boxed{=}$$ Далі застосуємо метод пониження порядку визначника, розклавши його за елементами третього стовпчика.

$$\boxed{=}\ 0 \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 1(-2-12) = 14 .$$

<u>*Висновок.*</u> $\Delta = 14$. Результат обчислення однаковий, хоч і були застосовані різні методи.

Примітка. Рядки (стовпці) матриць додаються таким чином:

$$+\frac{\begin{matrix}\begin{bmatrix}-3 & 2 & 1\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}2 & -2 & 1\end{bmatrix}\end{matrix}}{\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\end{bmatrix}} \text{ аналогічно } \begin{bmatrix}2\\4\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5\\3\\0\end{bmatrix}\square\begin{bmatrix}7\\7\\-1\end{bmatrix}.$$

<u>Завдання 3</u>. Дано систему $\begin{cases}2x+3y+5z=12\\ x-4y+3z=-22\\ 3x-y-2z=0\end{cases}$.

Перевірити чи сумісна система. Розв'язати її: а) за формулами Крамера; б) використавши обернену матрицю; в) за методом Гаусса.

Розв'язання. Перевіримо чи система сумісна:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3 & 5\\ 1 & -4 & 3\\ 3 & -1 & -2\end{vmatrix}=110$$ (обчислено за правилом "трикутника").

<u>*Висновок.*</u> Так як $\Delta=110\neq 0$, то система сумісна, тобто має розв'язок.

а) **Методом Крамера**. Обчислимо визначники системи:

$\Delta=110$ (знайдено вище).

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}12 & 3 & 5\\ -22 & -4 & 3\\ 0 & -1 & -2\end{vmatrix}=12\cdot(-4)(-2)+3\cdot 3\cdot 0+(-22)(-1)(5)-0(-4)\cdot(5)-$$

$$-(-22)\cdot 3\cdot(-2)-(-1)\cdot 3\cdot 12=110.$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}2 & 12 & 5\\ 1 & -22 & 3\\ 3 & 0 & -2\end{vmatrix}=2\cdot(-22)\cdot(-2)+12\cdot 3\cdot 3+1\cdot 0\cdot(-5)-3\cdot(-22)\cdot(5)-$$

$$-1\cdot 12\cdot(-2)=-88+108+0+30-0+330+29=550.$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}2 & 3 & 12\\ 1 & -4 & -22\\ 3 & 1 & 0\end{vmatrix}=-110.$$

Тоді за формулами Крамера отримаємо:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{110}{110} = 1 \\ y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{550}{110} = 5 \\ z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta} = \dfrac{-110}{110} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \\ z = -1 \end{cases}.$$

Перевірка. Підставимо $x = 1$, $y = 5$, $z = -1$ в ліву частину заданого рівняння:

$$\begin{cases} 2\cdot 1 + 3\cdot 5 + 5\cdot(-1) = 2 + 15 - 10 = 12 & 12 \equiv 12 \\ 1\cdot 1 - 4\cdot 5 + 3\cdot(-1) = 1 - 20 - 3 = -22 & 22 \equiv 22 \\ 3\cdot 1 - 1\cdot 5 - 2\cdot(-1) = 3 - 5 + 2 = 0 & 0 \equiv 0 \end{cases}.$$

б) **Метод оберненої матриці**. Позначимо матрицю із коефіцієнтів при невідомих даної системи рівнянь через $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -4 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$. Матриця невідомих змінних $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Матриця вільних членів $B = \begin{bmatrix} 12 \\ -22 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Очевидно, що даній системі лінійних рівнянь відповідає матричне рівняння $\boxed{A\cdot X = B}$ (1).

Розв'яжемо (1) відносно X, помноживши (1) на A^{-1} зліва:

$A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B$, але $A^{-1}\cdot A = E = 1$. Тому $\boxed{X = A^{-1}\cdot B}$.

Тепер шукаємо A^{-1} - обернену матрицю до A (дивись аналогічну задачу в завданні 1).

$\Delta = 110$ (знайдено вище).

$A_{11} = 11$	$A_{21} = 11$	$A_{31} = 11$
$A_{12} = 1$	$A_{22} = -19$	$A_{32} = 11$
$A_{13} = 29$	$A_{23} = -1$	$A_{33} = -11$

Так як .

Тоді $X=\dfrac{1}{110}\begin{bmatrix}11 & -11 & 11\\ 1 & -11 & 11\\ 29 & -1 & -11\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}12\\ -22\\ 0\end{bmatrix}=\dfrac{1}{110}\begin{bmatrix}11\cdot12+11\cdot(-22)+11\cdot0\\ 1\cdot12-11\cdot(-22)+11\cdot0\\ 29\cdot12-1\cdot(-22)-11\cdot0\end{bmatrix}=$

$$=\frac{1}{110}\begin{bmatrix}110\\ 550\\ -110\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 5\\ -1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=5\\ z=-1\end{cases}.$$

в) **Метод Гаусса**. При розв’язанні системи лінійних рівнянь з трьома невідомими насамперед потрібно звести її до трикутного виду, де б одне рівняння містило одну невідому, друге – дві невідомі, третє – три невідомі змінні).

Краще розв’язання вести в матричному вигляді. Складемо розширену матрицю із коефіцієнтів при невідомих та вільних членів.

$\left[\begin{array}{ccc|c}2 & 3 & 5 & 12\\ 1 & -4 & 3 & -22\\ 3 & -1 & -2 & 0\end{array}\right]\Rightarrow$ Переставимо другий та перший рядки місцями.

$\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -4 & 3 & -22\\ 2 & 3 & 5 & 12\\ 3 & -1 & -2 & 0\end{array}\right]\Rightarrow$ Дії далі виконаємо тільки на рядками. Послідовно помножимо перший рядок на (-2) та на (-3) і відповідно додаємо до другого та третього рядків.

$\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -4 & 3 & -22\\ 0 & 11 & -1 & 56\\ 0 & 11 & -11 & 66\end{array}\right]\Rightarrow$ Від другого рядка віднімаємо третій.

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -4 & 3 & -22\\ 0 & 11 & -1 & 56\\ 0 & 0 & 10 & -10\end{array}\right].$$

Перейдемо до системи рівнянь $\begin{cases} 1x - 4y + 3z = -22 \\ \quad 11y - 1z = 56 \\ \qquad 10z = -10 \end{cases}$. З третього рівняння $z = \frac{-10}{10} = -1$. Підставимо $z = -1$ в друге рівняння $11y = 56 + 1z = 56 + 1(-1) = 55 \Rightarrow y = \frac{55}{11} = 5$.

Нарешті, з першого рівняння $x = -22 - 3z + 4y$. При $y = 5$, $z = -1$, отримаємо $x = -22 - 3 \cdot (-1) + \ 4 \cdot 5 = -22 + 3 + 20 = 1$. Отже, $\begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \\ z = -1 \end{cases}$.

<u>Завдання 4</u>. Дано вектори $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{m} + \beta\mathbf{n}$ та $\mathbf{b} = \gamma\mathbf{m} + \delta\mathbf{n}$.

Знайти: 1) $(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b})(\nu\mathbf{a} + \tau\mathbf{b})$; 2) пр$_{\boldsymbol{b}}(\nu\mathbf{a} + \tau\mathbf{b})$; 3) $\cos(\mathbf{a};^\wedge \tau\mathbf{b})$.

Нехай $\alpha = -2$, $\beta = -3$, $\gamma = 3$, $\delta = 5$, $k = 4$, $l = 3$, $\varphi = \frac{6}{4}\pi$, $\pi = -3$, $\mu = \frac{1}{2}$, $\nu = 1$, $\tau = 3$.

Розв'язання. Використовуючи дані умови задачі, отримаємо:

$$\begin{array}{l} \mathbf{a} = \alpha\mathbf{m} + \beta\mathbf{n} = -2\mathbf{m} - 3\mathbf{n} \\ \mathbf{b} = j\mathbf{m} + \delta\mathbf{n} = 3\mathbf{m} + 5\mathbf{n} \end{array}.$$

1) Знайдемо суму векторів:

$$\begin{array}{rl} & \lambda\mathbf{a} = -3\mathbf{a} = -3(-2\mathbf{m} - 3\mathbf{n}) = 6\mathbf{m} + 9\mathbf{n} \\ + & \mu\mathbf{b} = \frac{1}{2}(3\mathbf{m} + 5\mathbf{n}) = \frac{3}{2}\mathbf{m} + \frac{5}{2}\mathbf{n} \\ \hline & \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = \left(6 + \frac{3}{2}\right)\mathbf{m} + \left(9 + \frac{5}{2}\right)\mathbf{n} = \frac{15}{2}\mathbf{m} + \frac{23}{2}\mathbf{n}. \end{array}$$

Аналогічно,

$$\begin{array}{rl} & \nu\mathbf{a} = 1(-2\mathbf{m} - 3\mathbf{n}) = -2\mathbf{m} - 3\mathbf{n} \\ + & \tau\mathbf{b} = 3(3\mathbf{m} + 5\mathbf{n}) = 9\mathbf{m} + 15\mathbf{n} \\ \hline & \nu\mathbf{a} + \tau\mathbf{b} \qquad = (-2 + 9)\mathbf{m} + (-3 + 5)\mathbf{n} = 7\mathbf{m} + 2\mathbf{n}. \end{array}$$

Отже,

$$(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b})(\nu\mathbf{a}+\tau\mathbf{b})=\left(\frac{15}{2}\mathbf{m}+\frac{23}{2}\mathbf{n}\right)(7\mathbf{m}+2\mathbf{n})=\frac{15}{2}\cdot 7\mathbf{m}^2+\frac{15}{2}\mathbf{m}\cdot 2\mathbf{n}+$$

$$+\frac{23}{2}\mathbf{n}\cdot 7\mathbf{m}+\frac{23}{2}\mathbf{n}\cdot 2\mathbf{n}=\frac{105}{2}\mathbf{m}^2+15\mathbf{mn}+\frac{161}{2}\mathbf{nm}+23\mathbf{n}^2 \boxed{=}$$

$\mathbf{m}^2=|\mathbf{m}|^2=4^2=16$, $\mathbf{n}^2=|\mathbf{n}|^2=3^2$ за умовою. $\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{n}\cdot\mathbf{m}$ (властивість скалярного добутку). Крім того, $\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}=|\mathbf{m}|\cdot|\mathbf{n}|\cdot\cos(\mathbf{m};\hat{}\ \mathbf{n})=$ $=|\mathbf{m}|\cdot|\mathbf{n}|\cos\varphi$. $\boxed{=}\dfrac{105}{2}\cdot 4^2+\dfrac{191}{2}4\cdot 3\cdot\cos\dfrac{3}{4}\pi+23\cdot 3^2\approx 244,8$.

2) Знайдемо $пр_в(\nu\mathbf{a}+\tau\mathbf{b})$. Скористаємося формулою:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2,\ \text{де}\ \mathbf{a}(x_1;\ y_1),\ \mathbf{b}(x_2;\ y_2).$$

Крім того, $пр_в\mathbf{a}=\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$. Отже, $пр_в(\nu\mathbf{a}+\tau\mathbf{b})=\dfrac{(\nu\mathbf{a}+\tau\mathbf{b})\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$.

$\left.\begin{array}{l}\nu\mathbf{a}+\tau\mathbf{b}=7\mathbf{m}+2\mathbf{n}\\ \mathbf{b}=3\mathbf{m}+5\mathbf{n}\end{array}\right\}$ (дивись вище).

Тоді, $(\nu\mathbf{a}+\tau\mathbf{b})\cdot\mathbf{b}=(7\mathbf{m}+2\mathbf{n})(3\mathbf{m}+5\mathbf{n})=21\mathbf{m}^2+25\mathbf{mn}+6\mathbf{nm}+10\mathbf{n}^2=$

$$=21|\mathbf{m}|^2+41\cdot|\mathbf{m}|\cdot|\mathbf{n}|\cos\varphi+10|\mathbf{n}|=21\cdot 4^2+41\cdot 4\cdot 3\cdot\cos\frac{3}{4}\pi+10\cdot 3=$$

$$=384+492\frac{\sqrt{2}}{2}+30=414-246\sqrt{2}.$$

3) Нарешті, $\cos\alpha=\cos(\mathbf{a};\hat{}\ \tau\mathbf{b})=\dfrac{\mathbf{a}\cdot\tau\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\tau\mathbf{b}|}=\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}$.

$\left.\begin{array}{l}\mathbf{a}=-2\mathbf{m}-3\mathbf{n}\\ \mathbf{b}=3\mathbf{m}+5\mathbf{n}\end{array}\right\}$ (дивись вище).

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=(-2\mathbf{m}-3\mathbf{n})(3\mathbf{m}+5\mathbf{n})=-6\mathbf{m}^2-10\mathbf{mn}-9\mathbf{nm}-15\mathbf{n}^2=$$

$$=-6|\mathbf{m}|^2-19|\mathbf{m}||\mathbf{n}|\cos\varphi-15|\mathbf{n}|^2=-6\cdot 4^2-19\cdot 4\cdot 3\cos\frac{3}{4}\pi-15\cdot 3^2=$$

$$=-96-135+114\sqrt{2}\approx 161,2-231=-71,4.$$

$$|\mathbf{a}| = |-2\mathbf{m} - 3\mathbf{n}| = \sqrt{(-2\mathbf{m} - 3\mathbf{n})^2} = \sqrt{4\mathbf{m}^2 + 12\mathbf{mn} + 9\mathbf{n}^2} =$$

$$= \sqrt{4|\mathbf{m}|^2 + 12|\mathbf{m}||\mathbf{n}|\cos\varphi + 9|\mathbf{n}|^2} = \sqrt{4\cdot 4^2 + 12\cdot 4\cdot 3\cos\frac{3}{4}\pi + 9\cdot 3^2} =$$

$$\approx \sqrt{76,2} \approx 8,73.$$

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{(3\mathbf{m} + 5\mathbf{n})^2} = \sqrt{9\mathbf{m}^2 + 30\mathbf{mn} + 25\mathbf{n}^2} =$$

$$= \sqrt{9|\mathbf{m}|^2 + 30|\mathbf{m}||\mathbf{n}|\cos\frac{3}{4}\varphi + 25|\mathbf{n}|^2} = \sqrt{9\cdot 4^2 + 30\cdot 4\cdot 3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 25\cdot 3^2} =$$

$$\approx \sqrt{117} \approx 10,8.$$

Тоді $\cos\left(\mathbf{a};\hat{\ } \tau\mathbf{b}\right) \approx \dfrac{-71,4}{8,73\cdot 10,8} \approx \dfrac{-71,4}{94,284} \approx -0,7583$.

<u>Завдання 5</u>. Дано $\mathbf{a} = (1;\ 2;\ 3)$, $\mathbf{b}(3;\ 4; -2)$, $\mathbf{c}(-1;\ 3;\ 5)$, $\mathbf{d}(-1;\ 3;\ 13)$ в деякому базисі. Показати, що $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ утворюють базис і знайти координати вектора $\mathbf{d}$.

Розв'язання. Покажемо, що $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ утворюють базис, тобто має місце векторне рівняння.

$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = 0$, де $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ - числа і $\alpha = \beta = \gamma = 0$, так як $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \neq 0$

або $\begin{cases} 1\alpha + 3\beta - 1\gamma = 0 \\ 2\alpha + 4\beta + 3\gamma = 0 \\ 3\alpha - 2\beta + 5\gamma = 0 \end{cases}$. Знайдемо $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 39$ (переконайтесь в цьому, застосувавши будь-який спосіб обчислення визначника).

Якщо в однорідній системі $\Delta = 39 \neq 0$, то система має єдиний нульовий розв'язок $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Це означає, що вектори $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ утворюють базис, тобто будь-який четвертий вектор можна виразити через $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

2) Розкладемо вектор $d = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$ або $\begin{cases} 1\alpha + 3\beta - 1\gamma = -1 \\ 2\alpha + 4\beta + 3\gamma = 3 \\ 3\alpha - 2\beta + 5\gamma = 13. \end{cases}$ (1)

Слід розв'язати систему рівнянь. Способи розв'язання системи рівнянь подані в завданні 3. Переконайтесь за будь-яким способом, що розв'язками (1) є $\begin{cases} \alpha = \dfrac{109}{39} \\ \beta = \dfrac{-40}{39} \\ \gamma = \dfrac{23}{39} \end{cases}$. Тоді $\mathbf{d} = \dfrac{109}{39}\mathbf{a} - \dfrac{40}{39}\mathbf{b} + \dfrac{23}{39}\mathbf{c}$.

<u>**Завдання 6**</u>. Дано $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$. Потрібно:

а) обчислити мішаний добуток трьох векторів;
б) знайти модуль векторного добутку;
в) обчислити скалярний добуток векторів;
г) перевірити колінеарні два вектори чи перпендикулярні;
д) перевірити чи будуть компланарні три вектори.

Розв'язання. а) Обчислимо мішаний добуток $\mathbf{a}$, $2\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

Врахуємо, що:

$$\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 4\mathbf{k} \Leftrightarrow \mathbf{a}\{4;\ 0;\ 4\},$$

$$\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \Leftrightarrow \mathbf{b}\{-1;\ 3;\ 2\} \Rightarrow 2\mathbf{b} = \{-2;\ 6;\ 4\}.$$

$$\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} \Leftrightarrow \mathbf{c}\{3;\ 5;\ 0\}.$$

Тоді $(\mathbf{a} \times 2\mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -2 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 40 - 72 - 80 - 0 = -192$.

б) Обчислимо модуль векторного добутку $3\mathbf{c} \times \mathbf{b}$:

$\mathbf{c} = \{3;\ 5;\ 0\} \Rightarrow 3\mathbf{c} = \{9;\ 15;\ 0\}$; $\mathbf{b} = \{-1;\ 3;\ 2\}$.

$$3\mathbf{c} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 9 & 15 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} 15 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 9 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 9 & 15 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 30\mathbf{i} - \mathbf{j}(18 - 0) +$$

$$+\mathbf{k}(27 - (-15)) = 30\mathbf{i} - 18\mathbf{j} + 42\mathbf{k}.$$

$|3\mathbf{c} \times \mathbf{b}| = \sqrt{(30)^2 + (-18)^2 + (42)^2} = \sqrt{2988}$ (лінійних одиниць).

в) Обчислимо скалярний добуток $\mathbf{a} \cdot 3\mathbf{b}$:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{a} = \{4;\ 0;\ 4\} \\ \mathbf{b} = \{-1;\ 3;\ 2\} \Rightarrow 3\mathbf{b} = \{-3;\ 9;\ 6\} \end{array}\right\} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2.$$

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=4\cdot(-3)+0\cdot 3+4\cdot 6=-12+24=12$.

г) Вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ колінеарні (позначається $\mathbf{a}\parallel\mathbf{b}$), якщо координати їх пропорційні. За умовою $\mathbf{a}=(4;\,0;\,4)$, $\mathbf{b}=(-1;\,3;\,2)$. Якщо $\mathbf{a}\parallel\mathbf{b}$, то $\frac{4}{-1}=\frac{0}{3}=\frac{4}{2}$. Але координати векторів не пропорційні, тому $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ не колінеарні $(\mathbf{a}\nparallel\mathbf{b})$. Якщо $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ ортогональні, то $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$, але в пункті в) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=12\neq 0\Rightarrow\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ не ортогональні.

д) Якщо вектори $\mathbf{a}$, $2\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ компланарні, то мішаний добуток дорівнює нулю.

В пункті а) було знайдено, що $(\mathbf{a}\times 2\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=-192\neq 0$. Отже, три вектори $\mathbf{a}$, $2\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$ не компланарні, тобто не лежать в одній площині.

<u>Завдання 7</u>. Нехай дана піраміда $ABCD$ своїми вершинами:

1) обчислити площу перерізу, що проходить через т. A і D та середину ребра $l=CB$;

2) обчислити об’єм піраміди $ABCD$.

Розв’язання.

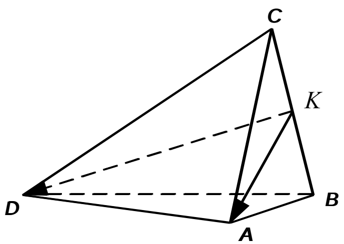

Рис. 1

Точка K - середина відрізка CB. Тоді її координати:

$$\begin{cases} x_k=\dfrac{x_C+x_B}{2}=\dfrac{1+5}{2}=3\\ y_k=\dfrac{y_C+y_B}{2}=\dfrac{3+7}{2}=5\\ z_k=\dfrac{z_C+z_B}{2}=\dfrac{2+0}{2}=1 \end{cases}.$$

Знайдемо вектор $\begin{array}{l}\mathbf{KD}=\{(-2;\,0;\,-1)-(3;\,5;\,1)\}=\{-5;\,-5;\,-2\}\\ \mathbf{KA}=\{(2;\,3;\,4)-(3;\,5;\,1)\}=\{-1;\,-2;\,3\}\end{array}$.

Тоді площа перерізу:

$$S_{DKA}=\frac{1}{2}\left|\mathbf{KD}\times\mathbf{KA}\right|=\frac{1}{2}\operatorname{mod}\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{k}&\mathbf{j}\\-5&-5&-2\\-1&-2&3\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\operatorname{mod}\left(\boldsymbol{i}\begin{vmatrix}-5&-2\\-2&3\end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix}-5&-2\\-1&3\end{vmatrix}+\right.$$

$$+\mathbf{k}\begin{vmatrix}-5 & -5\\ -1 & -2\end{vmatrix}\Bigg) = \frac{1}{2}\left|-19\mathbf{i}+17\mathbf{j}+5\mathbf{k}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-19)^2+(17)^2+(5)^2} \approx 13 \text{ (кв.од.)}.$$

Отже, $S_{DKA} = 13$ (кв. од).

г) Обчислимо об’єм піраміди $ABCD$:

$$V = \frac{1}{6}\left|\mathbf{AB}\times\mathbf{AD}\cdot\mathbf{AC}\right| \boxed{=} \begin{matrix}\mathbf{AC} = \{-1;\ 0;\ -2\}\\ \mathbf{AD} = \{-4;\ -3;\ -5\}\\ \mathbf{AB} = \{3;\ 4;\ -4\}\end{matrix} \boxed{=} \ \frac{1}{6}\bmod\begin{vmatrix}3 & 4 & -4\\ -4 & -3 & -5\\ -1 & 0 & -2\end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}\left|+18+20+0+12-0-32\right| = \frac{1}{6}\left|+18\right| = 3 \text{ (куб.од.)}.$$

Отже, $V = 3$ (куб од.).

<u>**Завдання 8**</u>. Нехай дано чотири точки $A_1(4;\ 7;\ 8)$, $A_2(-1;\ 13,\ 0)$, $A_3(2;\ 4;\ 9)$, $A_4(1;\ 8;\ 9)$. Скласти рівняння: а) площини $A_1A_2A_3$; б) прямої A_1A_2; в) прямої A_4M, перпендикулярної до $A_1A_2A_3$; г) прямої A_3N, паралельної до прямої A_1A_3.

Розв’язання. а) Складемо рівняння площини $A_1A_2A_3$, як площини, що проходить через три точки:

$$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix} = 0$$

або

$$\begin{vmatrix}x-4 & y-7 & z-8\\ -1-4 & 13-7 & 0-8\\ 2-4 & 4-7 & 9-8\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}x-4 & y-7 & z-8\\ -5 & 6 & -8\\ -2 & -3 & 1\end{vmatrix} = 0.$$

Розкривши визначник за будь-яким способом і звівши подібні, отримаємо:

$$\boxed{6x-7y-9z+97=0}\ \text{ - рівняння площини } A_1A_2A_3.$$

б) Пряма (A_1A_2) проходить через дві точки, тому її рівняння $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ або $\dfrac{x-4}{-1-4} = \dfrac{y-7}{13-7} = \dfrac{z-8}{0-8}$.

$$\boxed{\frac{x-4}{-5}=\frac{y-7}{6}=\frac{z-8}{-8}}$$ - канонічне рівняння прямої A_1A_2 .

в) Площина $A_1A_2A_3$ перпендикулярна до прямої A_4M , тому вектор-нормаль $\mathbf{N}$ площини можна прийняти за напрямний вектор $\mathbf{a}$.

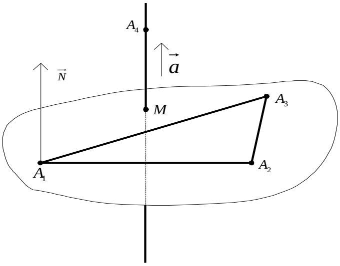

Рис. 2

Площина $A_1A_2A_3$:

$$6x-7y-9z+97=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathbf{N}_1=\{6;\ -7;\ -9\}.$$

$\mathbf{N}_1 \parallel \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{a}=\lambda\cdot\mathbf{N}_1$. Якщо $\lambda=1$, то $\mathbf{a}=\mathbf{N}_1=\{6;\ -7,\ -9\}$.

$$\boxed{\frac{x-1}{6}=\frac{y-8}{-7}=\frac{z-9}{-9}}$$ - рівняння прямої A_4M .

г) Пряма A_3N паралельна прямій A_1A_2 , тоді її рівняння:

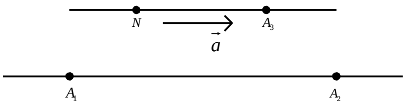

Рис. 3

$$\frac{x-x_3}{m_1}=\frac{y-y_3}{n_1}=\frac{z-z_3}{p_1},$$

де $\overline{A_1A_2}=\{m_1;\ n_1;\ p_1\}=\{(-1;\ 13;\ 0)-(4;\ 7;\ 8)\}=\{-5;\ 6;\ -8\}$.

$$\boxed{\frac{x-2}{-5}=\frac{y-4}{6}=\frac{z-9}{-8}}$$ - рівняння прямої A_3N .

<u>Завдання 9</u>. Нехай задано трикутник своїми вершинами $A(4;\ 3)$, $B(-3;\ -3)$, $C(2;\ 7)$. Знайти: а) рівняння сторони AB ; б) рівняння висоти CM ; в) рівняння медіани AK ; г) точку N перетину прямих AK та CM ; д) рівняння прямої l , що проходить через вершину C , паралельно стороні AB ; е) відстань від точки C до прямої AB .

Розв'язання. а) Рівняння прямої, що проходить через дві точки

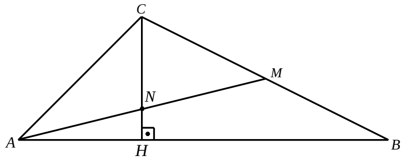

Рис.4

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Так як т. $A(4;\,3)$, $B(-3;\,-3)$, то рівняння набуде вигляду $\frac{x-4}{-3-4}=\frac{y-3}{-3-3}$ або

$$\frac{x-4}{-7}=\frac{y-3}{-6}\Leftrightarrow\frac{x-4}{7}=\frac{y-3}{6}\Rightarrow\ 6(x-4)=7(y-3).$$

Перетворимо останню рівність $6x-24=7y-21$ і отримаємо:

$\boxed{6x-7y-3=0}$ - загальне рівняння прямої (AB).

Розв'яжемо рівняння прямої (AB) відносно y: $y=\frac{6}{7}x-\frac{3}{7}\Rightarrow$

$K=\frac{6}{7}$, де K - кутовий коефіцієнт.

б) Пряма (AB) і висота (CH) перпендикулярні.

Нехай l_1 та l_2 задані відповідними рівняннями $l_1{:}K_1x+b_1=y$, $l_2{:}K_2x+b_2=y$, то при $l_1\perp l_2\Rightarrow K_2=-\frac{1}{K_1}$.

Отже, $K_{(CH)}=-\frac{1}{K_{(AB)}}=-\frac{1}{6/7}=-\frac{7}{6}$.

Якщо пряма проходить через точку $(x_1;\,y_1)$ з відомими кутовими коефіцієнтом K, то її рівняння $y-y_1=K(x-x_1)$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{т. } C(2;\,7)\in(CH)\\ K_{CH}=-\frac{7}{6}\end{array}\right\}\Rightarrow(y-7)=-\frac{7}{6}(x-2)\ \text{або}$$

$\boxed{7x+6y-56=0}$ - рівняння висоти CH.

в) Медіана ділить сторону CB навпіл, тому $x_K = \dfrac{x_C + x_B}{2}$, $y_K = \dfrac{y_C + y_B}{2}$ або $x_K = \dfrac{2+(-3)}{2} = -\dfrac{1}{2}$, $y_K = \dfrac{7+(-3)}{2} = 2$.

Отже, т $K\left(-\dfrac{1}{2};\ 2\right)$.

Запишемо рівняння прямої AK як рівняння прямої, що проходить через дві точки A і K $\dfrac{x-4}{-\frac{1}{2}-4} = \dfrac{y-3}{2-3}$ або $\dfrac{x-4}{-9/2} = \dfrac{y-3}{-1}$.

Звідки $-(x-4) = -\dfrac{9}{2}(y-3) \Leftrightarrow \boxed{2x-9y+19=0}$ - рівняння медіани AM.

г) Відомо, що точка – це результат перетину двох прямих. Тому т. $N = (CH)\cap(AM) \Rightarrow \begin{cases} 7x+6y-56=0 \\ 2x-9y+19=0 \end{cases}$. Цю систему найпростіше розв’язати за методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 2 & -9 \end{vmatrix} = -63-12 = -75.$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 56 & 6 \\ -19 & -9 \end{vmatrix} = 56(-9)-(-19)\cdot 6 = -205+114 = -390.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 7 & 56 \\ 2 & -19 \end{vmatrix} = 7(-19)-2\cdot 5\cdot 6 = -133-112 = -245.$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{-390}{-75} = \frac{26}{5} \\ y &= \frac{-245}{-75} = \frac{49}{15} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{ т. } N\left(\frac{26}{5};\ \frac{49}{5}\right).$$

д) Пряма $l \parallel AB \Leftrightarrow K_l = K_{AB} = \dfrac{6}{7}$. Крім того $C(12;\ 7) \in l$. Тоді скористаємось рівнянням $y - y_0 = K(x - x_0) \Rightarrow y - 7 = \dfrac{6}{7}(x-2)$ або

$\boxed{6x-7y+37=0}$ - рівняння прямої l.

е) Відстань від точки $(x_1;\ y_1)$ до прямої $Ax+By+C=0$ обчислюється так:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

За умовою пряма $(AB){:}6x-7y-3=0$. $C(2;\ 7)=C(x_0;\ y_0)$.

$$d=\frac{|6\cdot 2-7\cdot 7-3|}{\sqrt{(6)^2+(-7)^2}}=\frac{|-40|}{\sqrt{85}}=\frac{40}{85}\ \text{(лін. од.)}$$

<u>Завдання 10</u>. Скласти канонічне рівняння параболи, якщо рівняння директриси $x_0=D=-3$.

При розв’язанні задач такого типу необхідно пам’ятати наступне.

Канонічне рівняння

1) Еліпса $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$;

2) Гіперболи $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ або $\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}-\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}=1$;

3) Параболи $y^2=2px$ або $x^2=2py$;

4) Кола $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$;

В цих рівняннях $(x_0;\ y_0)$ - центр симетрії; R - радіус; p - параметр.

Характеристики кривих другого порядку

1) Фокус еліпса: $F_1(-c;\ 0)$ - лівий; $F_2(c;\ 0)$ - правий; $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

2) Фокус гіперболи: $F_1(-c;\ 0)$ - лівий; $F_2(c;\ 0)$ - правий; $c=\sqrt{a^2+b^2}$.

3) Фокус параболи: $F=\left(-\dfrac{p}{2};\ 0\right)$.

Ексцентриситет (ε)

1) Ексцентриситет еліпса: $\varepsilon=\dfrac{a}{c}$;

2) Ексцентриситет гіперболи: $\varepsilon = \dfrac{a}{c}$.

Директриса (D)

1) Директриса параболи $D: x = -\dfrac{p}{2}$.

Асимптоти

1) Асимптоти гіперболи: $y = \pm\dfrac{b}{a}x$;

2) Асимптоти параболи: $x_0 = -D$ або $y_0 = -D$.

Розв'язання. За умовою рівняння директриси має вигляд $D = -3 \Rightarrow x = -3$, але $D = -\dfrac{p}{2} \Rightarrow -\dfrac{p}{2} = -3 \Rightarrow p = 6$. Тому рівняння параболи: $y^2 = 2px$, $y^2 = 2 \cdot 6x = 12x$.

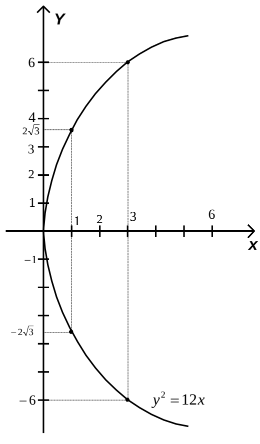

Рис. 5

<u>Завдання 11</u>. Скласти рівняння лінії, кожна точки M якої віддалена від точки $A(3;\,2)$ на відстань в три рази більшу, ніж до точки $B(-1;\,0)$.

Розв'язання.

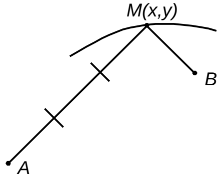

Рис. 6

Нехай існує така лінія. Виберемо на ній т. $M(x;\ y)$. За умовою відстань $AM = \left|\overline{AM}\right|$, відстань $BM = \left|\overline{BM}\right|$.

Знайдемо координати цих векторів та їх модулі.

$\overline{AM} = \{x-3;\ y-2\}$, тоді $\left|\overline{AM}\right| = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}$,

$\overline{BM} = \{x+1;\ y-0\}$, тоді $\left|\overline{BM}\right| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$.

Крім того, $\left|\overline{AM}\right| = 3\left|\overline{BM}\right|$ (за умовою).

Тобто $\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = 3\sqrt{(x+1)^2 + y^2}$.

Піднесемо обидві частини до квадрату:

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 9\left(x^2 + 2x + 1 + y^2\right)$$

або

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 - 9x^2 - 18x - 9 - 9y^2 = 0.$$

Звідки,

$$-8x^2 - 8y^2 - 24x - 4y + 4 = 0$$

або

$$\left(8x^2 + 24x\right) + \left(8y^2 + 4y - 4\right) = 0. \qquad (1)$$

З шкільного курсу алгебри відомо, що виділити повний квадрат тричлена можна таким чином

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

Цей факт використаємо при виконанні даного завдання.

Виділимо в кожній дужці повний квадрат:

$$8x^2 + 24x = 8\left[\left(x + \frac{24}{2\cdot 8}\right)^2 - \frac{24^2 - 4\cdot 8\cdot 0}{4\cdot 8^2}\right] =$$

$$8\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{24^2}{32} = 8\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - 18.$$

$$8y^2+4y-4=8\left(\left(x+\frac{4}{2\cdot 8}\right)^2-\frac{16+4\cdot 8\cdot 4}{4\cdot 8^2}\right)=8\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{36}{8}=$$

$$8\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{2}.$$

Отже, (1) набуде вигляду: $8\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+8\left(x+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{45}{2}\ \Big|:8$ або $\boxed{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{45}{16}}$ - канонічне рівняння кола з центром $\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{4}\right)$ і радіусом $R=\frac{\sqrt{45}}{4}$.

<u>Завдання 12</u>. Побудувати лінію в полярній системі координат, записати рівняння лінії в декартовій системі координат $\rho=4(1-\sin\varphi)$.

Розв'язання. Так як $\rho\geq 0$, то $4(1-\sin\varphi)\geq 0$ або $1-\sin\varphi\geq 0 \Rightarrow$ $\sin\varphi\leq 1$. Нерівність вірна при будь-якому значенні кута. Розіб'ємо дугу деякого одиничного кола $(R=1)$ на інтервали. Через відповідні точки кінців інтервалів та полюс проведемо пунктирно "промені". На них відкладемо значення ρ, що відповідають даному φ. Побудуємо таблицю, де $\rho=4(1-\sin\varphi)$.

Таблиця

φ	ρ	φ	ρ	φ	ρ	φ	ρ
0	4	$\frac{2}{3}\pi$	$\approx 0,6$	$\frac{5}{4}\pi$	$\approx 6,8$	$\frac{11}{6}\pi$	≈ 6
$\frac{\pi}{6}$	2	$\frac{3}{4}\pi$	$\approx 1,2$	$\frac{3}{4}\pi$	$\approx 7,4$	2π	4
$\frac{\pi}{4}$	$\approx 1,2$	$\frac{5}{6}\pi$	2	$\frac{3}{2}\pi$	8		
$\frac{\pi}{3}$	$\approx 0,6$	π	4	$\frac{5}{3}\pi$	$\approx 7,4$		
$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{7}{6}\pi$	6	$\frac{7}{4}\pi$	$\approx 6,8$		

При обчисленні враховувати, що $\pi=180^0$, $\sqrt{2}\approx 1,4$, $\sqrt{3}\approx 1,7$.

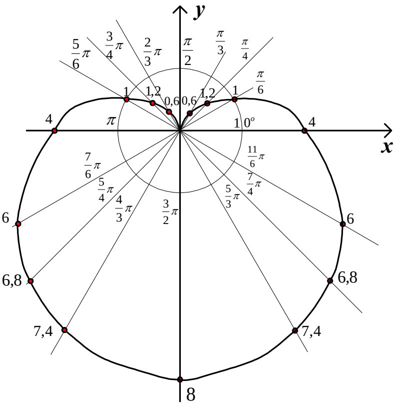

Рис. 7

Запишемо рівняння лінії в декартовій системі координат. Скористаємося формулами переходу від полярної до декартової системи.

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi \\ \rho &= \sqrt{x^2+y^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Так як $\rho = 4(1-\sin\varphi)$, то $\sqrt{x^2+y^2} = 4\left(1-\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

Отже, рівняння набуде вигляду:

$$\sqrt{x^2-y^2} = 4\frac{\sqrt{x^2+y^2}-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

або

$\boxed{x^2-y^2 = 4\left(\sqrt{x^2-y^2}-y\right)}$ - рівняння кардіоїди в декартовій системі.

Примітка. В деяких задачах доцільним є виділення повного квадрата тричлена і зведення рівняння лінії до канонічного вигляду.

<u>Завдання 13</u>. Використовуючи теорію квадратичних форм, звести до канонічного вигляду рівняння лінії другого порядку $17x^2+12xy+8y^2-20=0$.

Розв'язання. Перепишемо рівняння лінії $17x^2+12xy+8y^2=20$. Квадратична форма має вигляд: $17x^2+12xy+8y^2$.

Складемо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 17-\lambda & 6 \\ 6 & 8-\lambda \end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(17-\lambda)(8-\lambda)-36=0\Leftrightarrow\lambda^2-25\lambda+100=0\Leftrightarrow\lambda_1=5;\ \lambda_2=20.$$

У канонічному вигляді дана квадратична форма запишеться як $5(x')^2+20(y')^2$, де $\lambda_1=5$, $\lambda_2=20$. Щоб знайти базис, в якому форма має такий вигляд, запишемо систему:

$$\begin{cases}(17-\lambda)l+6m=0;\\ 6l+(8-\lambda)m=0.\end{cases}$$

Підставляючи в неї знайдені характеристичні значення λ_1, λ_2, отримаємо:

$$\begin{cases}12l+6m=0;\\ 6l+3m=0.\end{cases}\quad(1)\qquad\qquad\begin{cases}-3l+6m=0;\\ 6l-12m=0.\end{cases}\quad(2)$$

Розв'яжемо системи (1) і (2) окремо:

$$(1):\ \begin{Bmatrix}12l+6m=0\\ 6l+3m=0\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}\dfrac{l}{m}=-\dfrac{6}{12}=-\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{l}{m}=-\dfrac{3}{6}=-\dfrac{1}{2}\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\frac{l}{m}=-\frac{1}{2}\Rightarrow l=-\frac{1}{2}m.$$

Нехай $m=1$, то $l=-\dfrac{1}{2}$. Тоді, власний вектор $\mathbf{X}_1=\{l_1;\ m_1\}=\left\{-\dfrac{1}{2};1\right\}$.

Орт-вектор
$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{X}_{1_0}=\frac{\mathbf{X}_1}{|\mathbf{X}_1|},\\ &|\mathbf{X}_1|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1^2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ \mathbf{X}_{1_0}=\frac{\left\{-\frac{1}{2};\ 1\right\}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}=\left\{-\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}}\right\}.$$

Аналогічно розв’язуємо систему (2):

$$(2)\colon \begin{cases} 3l + 6m = 0 \\ 6l - 12m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{l}{m} = \dfrac{-6}{-3} = 2 \\ \dfrac{l}{m} = \dfrac{12}{6} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{l}{m} = 2 \Rightarrow l = 2m \,.$$

Нехай $m = 1$, то $l = 2$. Тоді, власний вектор $\mathbf{X}_2 = \{l_2;\ m_2\} = \{2;\ 1\}$.

Орт-вектор $\mathbf{X}_{2_0} = \dfrac{\{2;\ 1\}}{\sqrt{5}} = \left\{\dfrac{2}{\sqrt{5}};\ \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right\}$. Якщо $\mathbf{X}_{1_0}$ та $\mathbf{X}_{2_0}$ знайдено вірно, то $\mathbf{X}_{1_0} \cdot \mathbf{X}_{2_0} = 0$.

Дійсно, $\left\{-\dfrac{1}{\sqrt{5}};\ \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right\} \cdot \left\{\dfrac{2}{\sqrt{5}};\ \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right\} = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{5}} + \dfrac{2}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{5}} = 0$.

Отже, $\mathbf{X}_{1_0}$ та $\mathbf{X}_{2_0}$ - базисні вектори в системі $x'Oy'$.

Канонічним рівнянням лінії буде $5x'^2 + 20y'^2 = 20$ або $\dfrac{x'^2}{4} + \dfrac{y'^2}{1} = 1$ (еліпс).

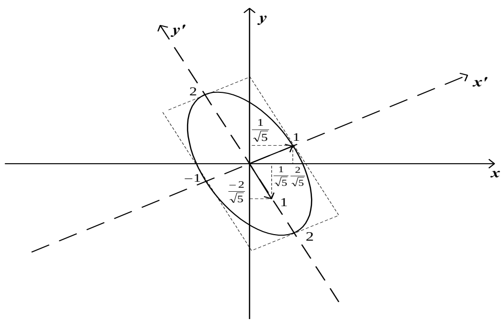

Рис. 8

<u>Завдання 14</u>. Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 + 1}{2x^3 + 1}$;

б) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{\sqrt{x+2} - 2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+7}{x+5}\right)^{2x+4}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+1)\left[\ln(x+1)-\ln x\right]$.

Розв'язання. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{2x^3+1}$. Чисельник і знаменник дробу прямують до нескінченності при $x\to\infty$, тобто маємо невизначеність вигляду $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Перетворимо дріб, розділивши чисельник і знаменник на найвищій степінь аргументу (на x^3):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{2x^3+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x^3}}{2+\dfrac{1}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{x^3}\right)}=\frac{1}{2}.$$

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-2}\boxed{=}$ При $x\to 2$ вирази x^2-4 і $\sqrt{x+2}-2$ прямують до нуля, тобто маємо невизначеність вигляду $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Для того, щоб розкрити цю невизначеність, необхідно в чисельнику та в знаменнику виділити множник $x-2$, якщо $x\to 2$. Для цього звільнимося від ірраціональності в знаменнику, а чисельник розкладемо на множники.

$$\boxed{=}\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}{x+2-4}=\lim_{x\to 2}(x+2)(\sqrt{x+2}+2)=16.$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x^2}$. Маємо при $x\to 0$ невизначеність вигляду $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Функція містить тригонометричний вираз. Тому слід скористатися формулою:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Перетворимо чисельник:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}(1+\cos x+\cos^2 x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2(1+\cos x+\cos^2 x)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}(1+\cos x+\cos^2 x)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1+1+1)=\frac{3}{2}.$$

г) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+7}{x+5}\right)^{2x+4}$. В даному випадку при $x\to\infty$ має місце невизначеність вигляду 1^{∞}. Тому слід скористатися формулою:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e\,.$$

Поділивши чисельник і знаменник дробу на x, отримаємо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+7}{x+5}\right)^{2x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{7}{x}\right)^{2x+4}}{\left(1+\frac{5}{x}\right)^{2x+4}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{2x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{4}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{2x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{4}}=$$

$$=\frac{\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x/7}\right)^{x/7}\right]^{7\cdot 2}\cdot 1}{\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x/5}\right)^{x/5}\right]^{5\cdot 2}\cdot 1}=\frac{e^{14}}{e^{10}}=e^4,$$ де

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{4}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{4}=1\,.$$

д) $\lim_{x\to\infty}(2x+1)\left[\ln(x+1)-\ln x\right]$. Виконаємо очевидні перетворення:

$$\lim_{x\to\infty}(2x+1)\left[\ln(x+1)-\ln x\right]=\lim_{x\to\infty}(2x+1)\ln\frac{x+1}{x}=\lim_{x\to\infty}(2x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\ln\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x+1}\right]=\ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x+1}=\ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}\times\right.$$

$$\left.\times\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1}\right]=\ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}=\ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{2}=\ln e^{2}=2\,.$$

<u>Завдання 15</u>. 1) Дослідити функцію на неперервність в точках $x_1=-1$ та $x_2=\dfrac{\pi}{2}$. Побудувати графік функції.

$$f\left(x\right)=\begin{cases}x+2, & x\le -1,\\ x^2, & -1<x\le \pi/2,\\ \sin x, & x>\pi/2.\end{cases}$$

Розв'язання. Нехай $x_1=-1$.

Знайдемо $\left.\begin{array}{l} f\left(-1\right)=\left(x+2\right)\Big|_{x=-1}=1\\ \lim\limits_{x\to-1-0}\left(x+2\right)=1\\ \lim\limits_{x\to-1+0}x^2=1\end{array}\right\}$. Результати обчислень рівні, отже в точці $x_1=-1$ функція неперервна, тобто проходить через точку $\left(-1;\,1\right)$.

Нехай $x_2=\dfrac{\pi}{2}$.

Знайдемо $\left.\begin{array}{l} f\left(\pi/2\right)=x^2\Big|_{x=\pi/2}=\pi^2/4 \\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} x^2=\pi^2/4\approx 2,47 \\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\sin x=1 \end{array}\right\}$. Результати обчислень різні, але скінченні, отже в точці $x_2=\dfrac{\pi}{2}$ функція має розрив першого роду. Стрибок $\delta=\left|\dfrac{\pi^2}{4}-1\right|\approx 1,47$. Побудуємо графік.

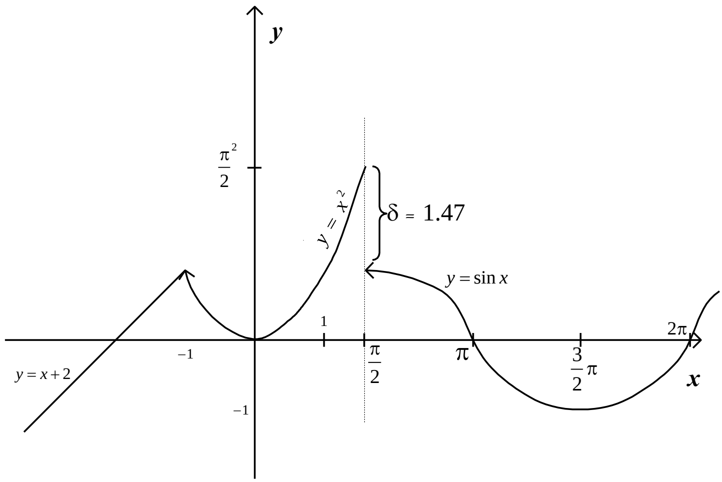

Рис. 9

2) Задано функцію $y=6^{\frac{1}{7+x}}$ і два значення аргументу $x_1=4$ і $x_2=-7$. Необхідно з'ясувати, чи є задана функція неперервною або розривною для кожного із заданих значень аргументу; у випадку розриву функції знайти її границі в точці розриву зліва і справа; зробити схематичний рисунок.

Розв'язання.

Для того, щоб функція $y=f\left(x\right)$ була неперервною в точці x_0, необхідно і достатньо, щоб границя функції зліва дорівнювала границі справа і дорівнювала значенню функції і цій точці.

Нехай $x_0 = x_1 = 4$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 4-} 6^{\frac{1}{7+x}} = 6^{\frac{1}{11}} = \sqrt[11]{6} \\ \lim\limits_{x\to 4+} 6^{\frac{1}{7+x}} = 6^{\frac{1}{11}} = \sqrt[11]{6} \\ f(x_0) = f(4) = 6^{\frac{1}{11}} = \sqrt[11]{6} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{В точці } x_1 = 4 \text{ дана функція неперервна.}$$

Нехай $x_0 = x_2 = -7$. Точка $x_2 = -7$ є точкою розриву функції. Дійсно,

$$\left.\begin{array}{l} f(-7) - \text{не існує} \\ \lim\limits_{x\to -7-} 6^{\frac{1}{7+x}} = 6^{-\infty} = 0 \\ \lim\limits_{x\to -7+} 6^{\frac{1}{7+x}} = 6^{\infty} = \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{В точці } x_2 = -7 \text{ дана функція має розрив}$$

другого роду, так як одна із границь нескінченна.

Для того, щоб зробити схематичний рисунок, знайдемо границі функції при $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to -\infty} 6^{\frac{1}{7+x}} = 6^{-0} = 1^{-}, \quad \lim_{x\to \infty} 6^{\frac{1}{7+x}} = 6^{0} = 1^{+}.$$

В першому випадку функція прямує до 1, залишаючись весь час меншою за одиницю, а в другому випадку – прямує до 1, залишаючись дещо більшою за одиницю.

Враховуючи одержані граничні співвідношення, зробимо рисунок.

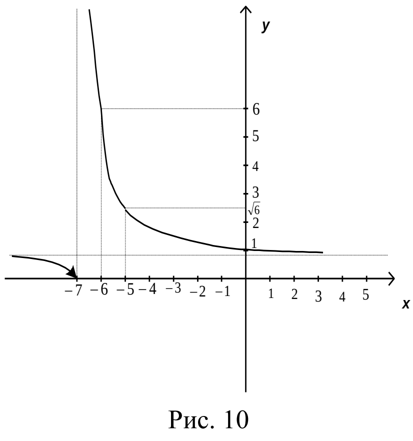

Рис. 10

<u>Завдання 16</u>. Дано комплексне число a.

1) Потрібно записати число a в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах;

2) Записати спряжене число $\bar{a}$ до числа a;

3) Виконати дії $\dfrac{\bar{a}^2}{a}$; $a \cdot \bar{a}$;

4) Розв’язати рівняння $z^3 + a = 0$.

Розв’язання. Нехай $a = \dfrac{\sqrt{2}}{1-i}$.

1) $a = \dfrac{\sqrt{2}}{1-i} \boxed{=}$ помножимо чисельник і знаменник на спряжений вираз до $1-i$, тобто на $1+i$ $\boxed{=} \dfrac{\sqrt{2}(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{\sqrt{2}(1+i)}{1^2 - i^2} \boxed{=} \dfrac{\sqrt{2}(1+i)}{2} =$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ - алгебраїчна форма комплексного числа.

Знайдемо дійсну та уявну частини комплексного числа a.

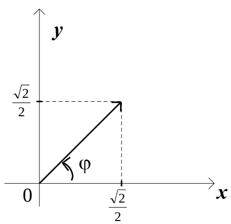

Рис. 11

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = x + iy \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Отже, з рисунка видно, що $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

Крім того, $|a| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{1} = 1$.

Тригонометрична форма комплексного числа:

$$\boxed{a = x + iy = \sqrt{x^2 + y^2}\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$$

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = 1\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}.$$

Показникова форма:

$$\boxed{a = x + iy = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot e^{i\varphi}}$$

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{\frac{\pi}{4}i}.$$

2) Спряжене число $\bar{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3) Виконаємо дії:

$$\frac{(\bar{a})^2}{a} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{1}{2} - i + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{-i}{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{-i}{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}i - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

4) Розв'яжемо рівняння $z^3 + a = 0$.

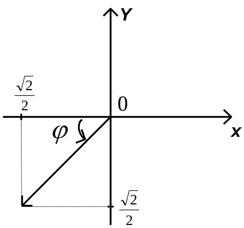

Рис. 12

$z = \sqrt[3]{-a}$, якщо $a = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, то

$$-a = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}.$$

Отже, $\varphi = -\frac{3}{4}\pi$.

Але $\boxed{\sqrt[n]{x + iy} = \sqrt[n]{\sqrt{x^2 + y^2}}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)}$ - (формула добування кореня n-го степеня з комплексного числа).

За умовою задачі $n = 3$, $k = 0, 1, 2, 3\ldots(n-1)$.

Запишемо комплексне число $-a = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $|-a| = \sqrt{1} = 1$, $\varphi = -\frac{3}{4}\pi$.

$$\sqrt[3]{-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{-\frac{3}{4}\pi+2\pi k}{3}+i\sin\frac{-\frac{3}{4}\pi+2\pi k}{3}\right).$$

Нехай $k=0$, $z_0=\cos\left(\frac{-\frac{3}{4}\pi+2\pi\cdot 0}{3}+i\sin\frac{-\frac{3}{4}\pi+2\pi\cdot 0}{3}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+$

$+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right).$

$k=1$, $z_1=\cos\frac{-\frac{3}{4}\pi+2\pi\cdot 1}{3}+i\sin\frac{-\frac{3}{4}\pi+2\pi\cdot 1}{3}=\cos\frac{5}{12}\pi+i\sin\frac{5}{12}\pi$.

$k=2$, $z_2=\cos\frac{-\frac{3}{4}\pi+2\pi\cdot 2}{3}+i\sin\frac{-\frac{3}{4}\pi+2\pi\cdot 2}{3}=\cos\frac{13}{12}\pi+i\sin\frac{13}{12}\pi$.