Відповіді:

56. M_1 і M_3.

57. $M(0;-4;3)$.

58. $-2x+y+4z+9=0$.

59. $5x-7y+4z-25=0$.

60. $5x-3y-2z-11=0$.

61. $20x-17y-9z-13=0$.

62. $2x-2y+5z+16=0$.

63. $20x-13y-4z-51=0$.

64. $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$.

65. а) ні; б) так.

66. а) так; б) ні.

67. $B=-3$, $C=-3$.

68. $A=-3$.

69. 4.

70. 3.

3. Пряма у просторі

Є декілька типів рівнянь прямої у просторі.

а) *Рівняння прямої, яка проходить через точку* $M_0(x_0;y_0;z_0)$ *паралельно вектору* $\vec{s}=(l;m;n)$, який називається *напрямним вектором* прямої:

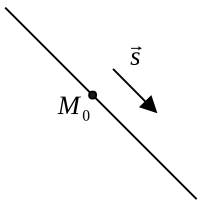


Рис. 18

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \qquad (23)$$

Рівняння (23) називають *канонічними рівняннями* прямої у просторі.

У *параметричній формі* ці рівняння мають вигляд

$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt, \quad t\in R. \end{cases}$$

б) *Рівняння прямої, яка проходить через дві точки* $M_1(x_1;y_1;z_1)$ і $M_2(x_2;y_2;z_2)$

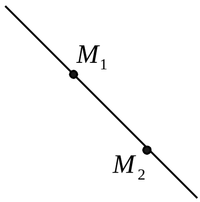


Рис. 19

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (24)$$

У параметричній формі рівняння (24) мають вигляд

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)t, \quad t \in R. \end{cases}$$

в) Лінією перетину площин $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ є пряма. *Загальними рівняннями* цієї прямої називаються рівняння

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Відстань від точки P до прямої $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ знаходиться за формулою

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{M_0P} \times \vec{s}\right|}{|\vec{s}|}, \qquad (25)$$

де $\vec{s} = (l;m;n)$ – напрямний вектор прямої, M_0 – будь-яка точка на прямій, наприклад точка з координатами $(x_0;y_0;z_0)$.

Кут між прямими $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ і $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$ знаходиться як кут між їх напрямними векторами $\vec{s}_1 = (l_1;m_1;n_1)$ і $\vec{s}_2 = (l_2;m_2;n_2)$ з формули

$$\cos\varphi = \frac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \qquad (26)$$

Кут між прямою $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ і площиною $Ax+By+Cz+D=0$ знаходиться з формули

$$\sin\varphi=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}. \qquad (27)$$

71. Перевірити, які з точок $M_1(2;1;9)$, $M_2(-1;-5;3)$, $M_3(8;7;3)$ лежать на прямій $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-5}{-1}$.

Г Для розв'язання задачі підставимо координати даних точок в рівняння прямої.

$M_1(2;1;9)$: $\dfrac{2-2}{3}\neq\dfrac{1+1}{4}\neq\dfrac{9-5}{-1}$. Точка M_1 не лежить на прямій.

$M_2(-1;-5;3)$: $\dfrac{-1-2}{3}=\dfrac{-5+1}{4}\neq\dfrac{3-5}{-1}$. Точка M_2 не лежить на прямій.

$M_3(8;7;3)$: $\dfrac{8-2}{3}=\dfrac{7+1}{4}=\dfrac{3-5}{-1}$. Точка M_3 лежить на даній прямій. ┘

72. На прямій $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+3}{5}$ знайти точку, у якої координата $z=7$.

Г Підставивши відому координату в рівняння прямої, знаходимо дві інші координати:

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{-2}=\frac{7+3}{5},\quad \begin{cases}\dfrac{x-2}{4}=2\\[2mm] \dfrac{y+1}{-2}=2,\end{cases} \quad \begin{cases}x=10\\ y=-5.\end{cases}$$

Отже, шукана точка має координати $(10;-5;7)$. ┘

73. Знайти точки перетину прямої $\dfrac{x-6}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-6}{3}$ з координатними площинами.

Г Точка перетину прямої з площиною xOy (рівняння якої $z=0$) має координати $(x;y;0)$. Підставивши в рівняння прямої $z=0$, знайдемо значення x та y:

$$\frac{x-6}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{0-6}{3},\quad \begin{cases}\dfrac{x-6}{2}=-2\\ \dfrac{y+1}{1}=-2,\end{cases}\quad \begin{cases}x=2\\ y=-3.\end{cases}$$

Таким чином, точка перетину прямої з площиною xOy є $M_1(2;-3;0)$.

Точка перетину з площиною xOz має координати $(x;0;z)$. З рівняння прямої знаходимо x та z:

$$\frac{x-6}{2}=\frac{0+1}{1}=\frac{z-6}{3},\quad \begin{cases}\dfrac{x-6}{2}=1\\ \dfrac{z-6}{3}=1,\end{cases}\quad \begin{cases}x=8\\ z=9.\end{cases}$$

Отже, точка перетину прямої з площиною xOz є $M_2(8;0;9)$.

Точка перетину з площиною yOz має координати $(0;y;z)$. Аналогічно

$$\frac{0-6}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-6}{3},\quad \begin{cases}\dfrac{y+1}{1}=-3\\ \dfrac{z-6}{3}=-3,\end{cases}\quad \begin{cases}y=-4\\ z=-3.\end{cases}$$

Отже, точка перетину прямої з площиною yOz є $M_3(0;-4;-3)$. ⌋

74. Знайти канонічні і параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2;-3;1)$ паралельно вектору $\vec{s}=(4;3;-2)$.

⌈ Канонічні рівняння мають вигляд (23):

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-1}{-2}.$$

Знайдемо параметричні рівняння:

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-1}{-2}=t,\quad \begin{cases}\dfrac{x-2}{4}=t,\\ \dfrac{y+3}{3}=t\\ \dfrac{z-1}{-2}=t,\end{cases}$$

звідки маємо рівняння прямої у параметричній формі

$$\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -3 + 3t \\ z = 1 - 2t, \quad t \in R. \end{cases}$$ ⌋

75. Знайти канонічні і параметричні рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(4;-2;-1)$ і $M_2(3;2;2)$.

⌈ Рівняння прямої мають вигляд (24):

$$\frac{x-4}{3-4} = \frac{y+2}{2+2} = \frac{z+1}{2+1}, \text{ або } \frac{x-4}{-1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z+1}{3}.$$

Знайдемо параметричні рівняння цієї прямої:

$$\frac{x-4}{-1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z+1}{3} = t;$$

$$\frac{x-4}{-1} = t,\ x = 4 - t;\ \frac{y+2}{4} = t,\ y = -2 + 4t;\ \frac{z+1}{3} = t,\ z = -1 + 3t.$$

Отже, $\begin{cases} x = 4 - t \\ y = -2 + 4t \\ z = -1 + 3t, \quad t \in R. \end{cases}$ – рівняння прямої у параметричній формі. ⌋

76. Пряма задана загальними рівняннями

$$\begin{cases} 2x - 3y + 2z - 4 = 0 \\ x + 2y + 3z + 13 = 0. \end{cases}$$

Знайти на цій прямій точку, у якої координата $x = 3$.

⌈ Підставимо відому координату в загальні рівняння:

$$\begin{cases} 2\cdot 3 - 3y + 2z - 4 = 0 \\ 3 + 2y + 3z + 13 = 0. \end{cases}$$

З отриманої системи знаходимо координати y і z шуканої точки:

$$\begin{cases} -3y + 2z = -2 \\ 2y + 3z = -16; \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3\cdot 3 - 2\cdot 2 = -13;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -16 & 3 \end{vmatrix} = -2\cdot 3 - (-16)\cdot 2 = 26,\ y = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{26}{-13} = -2;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -16 \end{vmatrix} = -3\cdot(-16) - 2\cdot(-2) = 52,\ z = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{52}{-13} = -4.$$

Отже, координати шуканої точки $(3;-2;-4)$. $\lrcorner$

77. Пряма задана загальними рівняннями

$$\begin{cases} 2x+y-3z+11=0 \\ 3x+2y+z-17=0. \end{cases}$$

Знайти напрямний вектор цієї прямої.

$\ulcorner$ За напрямний вектор прямої можна взяти векторний добуток нормальних векторів даних площин $\vec{n}_1=(2;1;-3)$ і $\vec{n}_2=(3;2;1)$:

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\vec{k}=$$

$$=\left(1\cdot1-(-3)\cdot2\right)\vec{i}-\left(2\cdot1-(-3)\cdot3\right)\vec{j}+\left(2\cdot2-1\cdot3\right)\vec{k}=7\vec{i}-11\vec{j}+\vec{k}.$$

Отже, напрямний вектор $\vec{s}=(7;-11;1)$. $\lrcorner$

78. Пряма задана загальними рівняннями

$$\begin{cases} 3x+y-2z+3=0 \\ x+2y+3z-8=0. \end{cases}$$

Знайти її канонічні рівняння.

$\ulcorner$ Знаходимо на прямій довільну точку M_0, наприклад точку з координатою $x=0$. Підставивши це значення в загальні рівняння, отримаємо

$$\begin{cases} 3\cdot0+y-2z+3=0 \\ 0+2y+3z-8=0. \end{cases}$$

З цієї системи знаходимо координати y та z:

$$\begin{cases} y-2z=-3 \\ 2y+3z=8; \end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=1\cdot3-(-2)\cdot2=7;$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}=-3\cdot3-(-2)\cdot8=7,\ y=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{7}{7}=1;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}=1\cdot8-2\cdot(-3)=14,\ z=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{14}{7}=2.$$

Отже, точка $M_0(0;1;2)$ лежить на прямій.

Знаходимо напрямний вектор прямої. Нормальні вектори даних площин $\vec{n}_1 = (3;1;-2)$, $\vec{n}_2 = (1;2;3)$. Їх векторний добуток

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{k} =$$

$$= \left(1\cdot 3 - (-2)\cdot 2\right)\vec{i} - \left(3\cdot 3 - (-2)\cdot 1\right)\vec{j} + \left(3\cdot 2 - 1\cdot 1\right)\vec{k} = 7\vec{i} - 11\vec{j} + 5\vec{k}.$$

За знайденими точкою $M_0(0;1;2)$ та напрямним вектором $\vec{s} = (7;-11;5)$ запишемо канонічні рівняння прямої (23):

$$\frac{x}{7} = \frac{y-1}{-11} = \frac{z-2}{5}. \quad \lrcorner$$

79. Знайти точку перетину прямої $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+1}{1}$ і площини $2x + 4y + 3z - 8 = 0$.

$\ulcorner$ Знайдемо рівняння прямої у параметричній формі:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{1} = t;$$

$$\frac{x-2}{3} = t,\ x = 2 + 3t;\ \frac{y-1}{-2} = t,\ y = 1 - 2t;\ \frac{z+1}{1} = t,\ z = -1 + t.$$

Знайдені рівняння

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

підставляємо в рівняння площини і знаходимо параметр точки перетину:

$$2(2 + 3t) + 4(1 - 2t) + 3(-1 + t) - 8 = 0,$$

$$4 + 6t + 4 - 8t - 3 + 3t - 8 = 0, \text{ звідки } t = 3.$$

Координати точки перетину знаходяться з параметричних рівнянь:

$$\begin{cases} x = 2 + 3\cdot 3 = 11 \\ y = 1 - 2\cdot 3 = -5 \\ z = -1 + 3 = 2. \end{cases}$$

Отже, точка перетину $M(11;-5;2)$. $\lrcorner$

80. Знайти проекцію точки $P(8;-1;7)$ на площину $3x-2y+4z+4=0$ і точку, симетричну точці P відносно даної площини.

Г Перпендикуляр PO паралельний до нормального вектора площини $\vec{n}=(3;-2;4)$ і проходить через точку P. Його рівняння має вигляд (23):

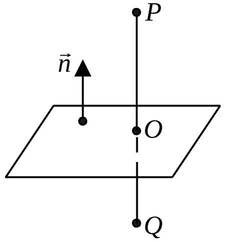


Рис. 20

$$\frac{x-8}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-7}{4}.$$

Проекцію точки P знаходимо як точку перетину прямої PO і заданої площини. Для цього спочатку записуємо параметричні рівняння прямої:

$$\frac{x-8}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-7}{4}=t;$$

$$\frac{x-8}{3}=t,\ x=8+3t;\ \frac{y+1}{-2}=t,\ y=-1-2t;\ \frac{z-7}{4}=t,\ z=7+4t.$$

Знайдені параметричні рівняння $\begin{cases} x=8+3t \\ y=-1-2t \\ z=7+4t \end{cases}$ підставляємо в рівняння площини:

$$3(8+3t)-2(-1-2t)+4(7+4t)+4=0,$$

$$24+9t+2+4t+28+16t+4=0,$$

$$58+29t=0.$$

Звідси, $t=-2$ – параметр точки перетину. Знаходимо її координати

$$\begin{cases} x=8+3\cdot(-2)=2 \\ y=-1-2\cdot(-2)=3 \\ z=7+4\cdot(-2)=-1. \end{cases}$$

Таким чином, проекція – точка $O(2;3;-1)$.

Нехай Q – точка, симетрична точці P відносно даної площини. Тоді точка O – середина відрізка PQ і тому

$$x_O=\frac{x_P+x_Q}{2},\ y_O=\frac{y_P+y_Q}{2},\ z_O=\frac{z_P+z_Q}{2},$$ звідки знаходимо

$$x_Q=2x_O-x_P,\ y_Q=2y_O-y_P,\ z_Q=2z_O-z_P.$$

Підставляючи в дані формули координати точок O та P, дістанемо

$$x_Q = 2 \cdot 2 - 8 = -4,\ y_Q = 2 \cdot 3 - (-1) = 7,\ z_Q = 2 \cdot (-1) - 7 = -9.$$

Отже, координати симетричної точки $Q(-4;7;-9)$. ┘

81. Знайти проекцію точки $P(2;4;15)$ на пряму $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z+2}{4}$ і точку, симетричну точці P відносно даної прямої.

┌ Через точку P проведемо площину, перпендикулярну до заданої прямої, тобто до її напрямного вектора $\vec{s} = (3;-2;4)$. Рівняння площини має вигляд (15):

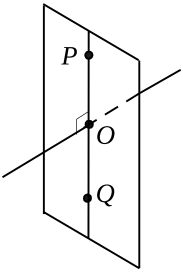


Рис. 21

$$3(x-2) - 2(y-4) + 4(z-15) = 0,$$

$$3x - 6 - 2y + 8 + 4z - 60 = 0,$$

$$3x - 2y + 4z - 58 = 0.$$

Точка O перетину цієї площини і даної прямої буде проекцією точки P, оскільки пряма PO перпендикулярна до даної прямої. Для знаходження точки перетину запишемо рівняння даної прямої у параметричній формі:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{4} = t;\ \frac{x-2}{3} = t,\ x = 2 + 3t;\ \frac{y+1}{-2} = t,\ y = -1 - 2t;$$

$$\frac{z+2}{4} = t,\ z = -2 + 4t;\ \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 - 2t \\ z = -2 + 4t. \end{cases}$$

Знайдені параметричні рівняння даної прямої підставляємо у рівняння площини:

$$3(2+3t) - 2(-1-2t) + 4(-2+4t) - 58 = 0,$$

$$6 + 9t + 2 + 4t - 8 + 16t - 58 = 0,\ 29t - 58 = 0.$$

$t = 2$ – параметр точки перетину, її координати знаходимо з параметричних рівнянь

$$\begin{cases} x = 2 + 3 \cdot 2 = 8 \\ y = -1 - 2 \cdot 2 = -5 \\ z = -2 + 4 \cdot 2 = 6. \end{cases}$$

Отже, проекція точки P – точка $O(8;-5;6)$.

Якщо Q – точка, симетрична точці P відносно даної прямої, то точка O – середина відрізка PQ і тому

$$x_O = \frac{x_P + x_Q}{2},\ y_O = \frac{y_P + y_Q}{2},\ z_O = \frac{z_P + z_Q}{2},$$

звідки знаходимо $x_Q = 2x_O - x_P$, $y_Q = 2y_O - y_P$, $z_Q = 2z_O - z_P$.
Підставляючи в дані формули координати точок O та P, дістанемо

$$x_Q = 2\cdot 8 - 2 = 14,\ y_Q = 2\cdot(-5) - 4 = -14,\ z_Q = 2\cdot 6 - 15 = -3.$$

Таким чином, координати симетричної точки $Q(14;-14;-3)$. $\lrcorner$

82. Знайти відстань від точки $P(2;-1;0)$ до прямої $\dfrac{x-7}{3} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-3}{2}$.

$\ulcorner$ Використаємо формулу (25).

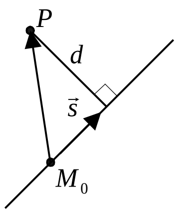


Рис. 22

$$M_0(7;1;3),\ \vec{s} = (3;4;2),\ \overrightarrow{M_0P} = (-5;-2;-3).$$

$$\overrightarrow{M_0P} \times \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & -2 & -3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\vec{k} =$$

$$= (-2\cdot 2 - (-3)\cdot 4)\vec{i} - (-5\cdot 2 - (-3)\cdot 3)\vec{j} +$$

$$+ (-5\cdot 4 - (-2)\cdot 3)\vec{k} = 8\vec{i} + \vec{j} - 14\vec{k} = (8;1;-14).$$

$$\left|\overrightarrow{M_0P} \times \vec{s}\right| = \sqrt{8^2 + 1^2 + (-14)^2} = \sqrt{64 + 1 + 196} = \sqrt{261},$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 16 + 4} = \sqrt{29};$$

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{M_0P} \times \vec{s}\right|}{|\vec{s}|} = \frac{\sqrt{261}}{\sqrt{29}} = \sqrt{\frac{261}{29}} = \sqrt{9} = 3.\ \lrcorner$$

83. Знайти кут між прямими $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z+3}{1}$ і $\dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-4}{6}$.

$\ulcorner$ За формулою (26) знаходимо кут між напрямними векторами $\vec{s}_1 = (2;-1;1)$ і $\vec{s}_2 = (3;-2;6)$ даних прямих:

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot 3 + (-1)\cdot(-2) + 1\cdot 6}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 6^2}} = \frac{14}{\sqrt{6}\cdot 7} = \frac{2}{\sqrt{6}},$$

звідки $\varphi = \arccos\frac{2}{\sqrt{6}}$. $\lrcorner$

84. Знайти кут між прямою $\frac{x-2}{5} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{1}$ і площиною $x - y + z + 7 = 0$.

$\ulcorner$ $A=1$, $B=-1$, $C=1$, $l=5$, $m=$ **.** За формулою (27) знаходимо

$$\sin\alpha = \frac{\left|1\cdot 5 + (-1)\cdot 1 + 1\cdot 1\right|}{\sqrt{5^2 + 1^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{27}\cdot\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{81}} = \frac{5}{9},$$

звідки $\alpha = \arcsin\frac{5}{9}$. $\lrcorner$

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

85. Перевірити, які з точок $M_1(3;4;0)$, $M_2(0;9;4)$, $M_3(-3;-1;0)$ лежать на прямій $\frac{x+1}{2} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-1}{1}$.

86. На прямій $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-3}$ знайти точку, у якої координата $y = -3$.

87. Знайти точки перетину прямої $\frac{x+6}{3} = \frac{y-6}{-2} = \frac{z+5}{1}$ з координатними площинами.

88. Знайти канонічні і параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2;1;7)$ паралельно вектору $\vec{s} = (4;-1;-3)$.

89. Знайти канонічні і параметричні рівняння прямої, яка проходить через дві точки: $M_1(3;-4;2)$ і $M_2(1;2;6)$.

90. Пряма задана загальними рівняннями

$$\begin{cases} x + 3y - 2z - 6 = 0 \\ 2x + y - 4z + 3 = 0. \end{cases}$$

Знайти на цій прямій точку, у якої координата $y = 3$.

91. Пряма задана загальними рівняннями

$$\begin{cases} x+2y+3z-2=0 \\ 2x-y-2z+1=0. \end{cases}$$

Знайти напрямний вектор цієї прямої.

92. Пряма задана загальними рівняннями

$$\begin{cases} 3x-y-2z+5=0 \\ x+2y-2z+2=0. \end{cases}$$

Знайти її канонічні рівняння.

93. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+1}{-1}$ і площини $2x-3y+z-14=0$.

94. Знайти проекцію точки $P(3;-1;1)$ на площину $x+2y+2z+6=0$ і точку, симетричну точці P відносно даної площини.

95. Знайти проекцію точки $P(2;-1;0)$ на пряму $\frac{x-7}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{2}$ і точку, симетричну точці P відносно даної прямої.

96. Знайти відстань від точки $P(2;3;-1)$ до прямої $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{2}$.

97. Знайти кут між двома прямими $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+3}{2}$ і $\frac{x-1}{-3}=\frac{y+2}{6}=\frac{z+7}{2}$.

98. Знайти кут між прямою $\frac{x}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+1}{-6}$ і площиною $x-2y+2z+7=0$.

Відповіді:

85. M_3.

86. $M(1;-3;4)$.

87. $M_1(9;-4;0)$, $M_2(3;0;-2)$, $M_3(0;2;-3)$.

88. $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-7}{-3}$, $\begin{cases} x=2+4t \\ y=1-t \\ z=7-3t. \end{cases}$

89. $\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y+4}{6}=\dfrac{z-2}{4}$, $\begin{cases} x=3-2t, \\ y=-4+6t \\ z=2+4t. \end{cases}$

90. $M(1;3;2)$.

91. $\vec{s}=(-1;8;-5)$.

92. $\dfrac{x}{6}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-2}{7}$.

93. $M(-1;-5;1)$.

94. $O(2;-3;-1)$, $Q(1;-5;-3)$.

95. $O(4;-3;1)$, $Q(6;-5;2)$.

96. 5.

97. $\arccos\dfrac{4}{21}$.

98. $\arcsin\dfrac{5}{21}$.

4. Криві другого порядку

Рівняння кола з центром у початку координат і радіусом R (*канонічне рівняння кола*)

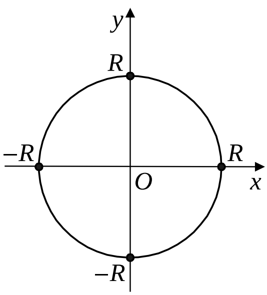
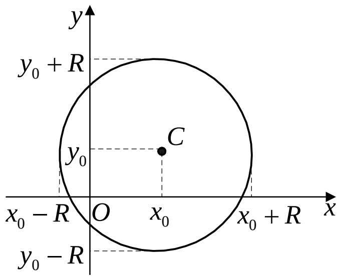


Рис. 23

$$x^2+y^2=R^2. \qquad (28)$$

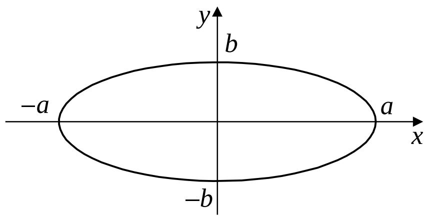
Рівняння кола з центром у точці $C(x_0; y_0)$ і радіусом R



$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 . \qquad (29)$$

Рис. 24

Рівняння еліпса, осі якого співпадають з осями координат і який має півосі a та b (канонічне рівняння еліпса)

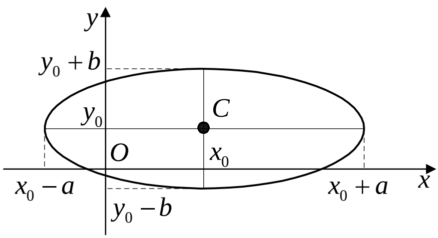


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (30)$$

Рис. 25

(a – *велика піввісь,* b – *мала піввісь*).

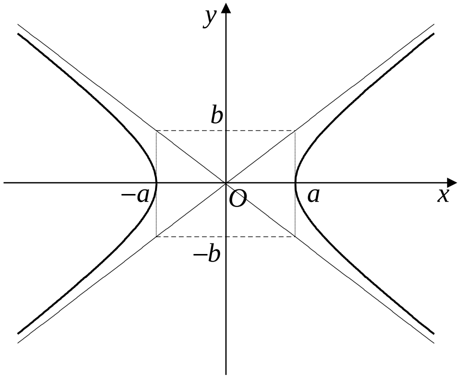
Рівняння еліпса, осі якого паралельні осям координат і який має півосі a та b і центр у точці $C(x_0; y_0)$



$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 . \qquad (31)$$

Рис. 26

Рівняння гіперболи, осі якої співпадають з осями координат і яка має півосі a *та* b (*канонічне рівняння гіперболи*)

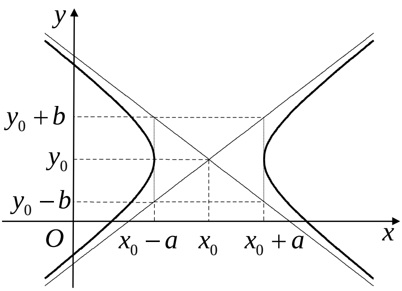


$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (32)$$

Рис. 27

(a – дійсна піввісь, b – уявна піввісь).

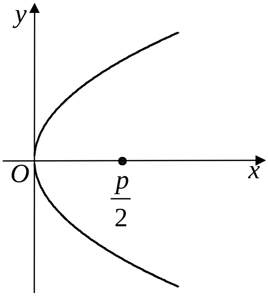
Рівняння гіперболи, осі якої паралельні осям координат і яка має півосі a та b і центр в точці $C(x_0;y_0)$



$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1. \qquad (33)$$

Рис. 28

Рівняння параболи з вершиною в початку координат і віссю, яка співпадає з додатною піввіссю Ox

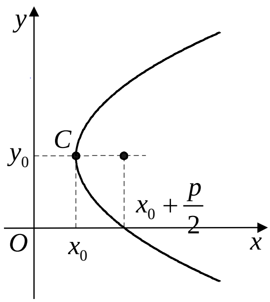


$$y^2 = 2px, \qquad (34)$$

Рис. 29

де p – параметр параболи.

Якщо вершина параболи має координати $C(x_0; y_0)$, а вісь паралельна до осі Ox, то рівняння параболи має вигляд



$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0). \qquad (35)$$

Рис. 30

99. Знайти координати центра і радіус кола, заданого рівнянням $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$.

Γ Перетворимо дане рівняння до виду (29), виділивши повні квадрати з x та y:

$$x^2 - 4x + y^2 + 2y - 4 = 0,$$

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 - 2^2 + y^2 + 2 \cdot y \cdot 1 + 1^2 - 1^2 - 4 = 0,$$

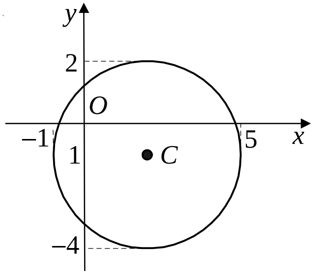


Рис. 31

$$\left(x-2\right)^2-4+\left(y+1\right)^2-1-4=0,$$

$$\left(x-2\right)^2+\left(y+1\right)^2=9.$$

Порівнюючи отримане рівняння з рівнянням (29), знаходимо $R^2=9$, $R=3$ – радіус кола, $C(2;-1)$ – центр кола. ⌋

100. Знайти рівняння кола, якщо його центр має координати $C(2;3)$ і коло проходить через точку $M(5;-1)$.

⌈ Рівняння кола має вигляд (29): $(x-2)^2+(y-3)^2=R^2$. Значення R^2 знайдемо з умови, що коло проходить через точку M: $(5-2)^2+(-1-3)^2=R^2$, $R^2=3^2+(-4)^2$, $R^2=25$. Отже, рівняння кола

$$(x-2)^2+(y-3)^2=25. \quad ⌋$$

Зауваження. Радіус кола можна знайти як відстань між центром C і точкою M:

$$R=CM=\sqrt{(x_C-x_M)^2+(y_C-y_M)^2}=\sqrt{(2-5)^2+(3-(-1))^2}=5.$$

101. Знайти рівняння кола, якщо точки $A(4;7)$ і $B(10;-1)$ є кінцями одного з його діаметрів.

⌈ Центр кола – точка C є серединою відрізка AB:

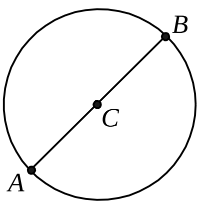


Рис. 32

$$x_C=\frac{x_A+x_B}{2},\ y_C=\frac{y_A+y_B}{2};$$

$$x_C=\frac{4+10}{2}=7,\ y_C=\frac{7+(-1)}{2}=3.$$

Отже, $C(7;3)$.

Радіус кола

$$R=AC=\sqrt{(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2}=$$

$$=\sqrt{(4-7)^2+(7-3)^2}=\sqrt{9+16}=5.$$

За формулою (29) рівняння кола має вигляд $(x-7)^2+(y-3)^2=25$. $\lrcorner$

102. Знайти рівняння еліпса, осі якого співпадають з осями координат і який проходить через точки $M_1\left(4;-\sqrt{3}\right)$ і $M_2\left(2\sqrt{2};3\right)$.

$\ulcorner$ Рівняння має вигляд (30): $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Значення a^2 та b^2 знайдемо з умови, що координати точок $M_1\left(4;-\sqrt{3}\right)$ і $M_2\left(2\sqrt{2};3\right)$ задовольняють це рівняння:

$$\begin{cases}\dfrac{4^2}{a^2}+\dfrac{\left(-\sqrt{3}\right)^2}{b^2}=1\\[2mm] \dfrac{\left(2\sqrt{2}\right)^2}{a^2}+\dfrac{3^2}{b^2}=1,\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{16}{a^2}+\dfrac{3}{b^2}=1\\[2mm] \dfrac{8}{a^2}+\dfrac{9}{b^2}=1,\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{16}{a^2}\right)\\[2mm] \dfrac{8}{a^2}+9\cdot\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{16}{a^2}\right)=1,\end{cases}$$

$$\frac{8}{a^2}+3-\frac{48}{a^2}=1,\quad -\frac{40}{a^2}=-2,\quad \frac{1}{a^2}=\frac{1}{20},\quad a^2=20;$$

$$\frac{1}{b^2}=\frac{1}{3}\left(1-16\cdot\frac{1}{20}\right)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{4}{5}\right)=\frac{1}{15},\quad b^2=15.$$

Отже, рівняння еліпса $\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{15}=1$. $\lrcorner$

103. Знайти координати центра і півосі еліпса, заданого рівнянням $16x^2-25y^2+32x-100y-284=0$.

$\ulcorner$ Зведемо рівняння до виду (31). Для цього виділимо в рівнянні повні квадрати з x та y:

$$16x^2+25y^2+32x-100y-284=0,$$

$$16\left(x^2+2x\right)+25\left(y^2-4y\right)-284=0,$$

$$16\left(x^2+2x+1^2-1^2\right)+25\left(y^2-4y+2^2-2^2\right)-284=0,$$

$$16(x+1)^2-16+25(y-2)^2-100-284=0,$$

$$16(x+1)^2+25(y-2)^2=400,$$

$$\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{16}=1.$$

Порівнюючи отримане рівняння з (31), знаходимо координати центра $x_0 = -1$, $y_0 = 2$ і півосі $a = 5$, $b = 4$. $\lrcorner$

104. Знайти рівняння гіперболи, осі якої співпадають з осями координат і яка проходить через точки $M_1(6;-1)$ і $M_2\left(-8;2\sqrt{2}\right)$.

$\ulcorner$ Рівняння буде мати вигляд (32): $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Координати точок M_1 та M_2 задовольняють це рівняння:

$$\begin{cases}\dfrac{6^2}{a^2}-\dfrac{(-1)^2}{b^2}=1\\[2mm] \dfrac{(-8)^2}{a^2}-\dfrac{\left(2\sqrt{2}\right)^2}{b^2}=1,\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{36}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}=1\\[2mm] \dfrac{64}{a^2}-\dfrac{8}{b^2}=1,\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{36}{a^2}-1\\[2mm] \dfrac{64}{a^2}-8\left(\dfrac{36}{a^2}-1\right)=1,\end{cases}$$

$$\frac{64}{a^2}-\frac{288}{a^2}+8=1,\ \frac{-224}{a^2}=-7,\ a^2=\frac{-224}{-7}=32.$$

$$\frac{1}{b^2}=\frac{36}{32}-1,\ \frac{1}{b^2}=\frac{4}{32}=\frac{1}{8},\ b^2=8.$$

Отже, рівняння гіперболи $\dfrac{x^2}{32}-\dfrac{y^2}{8}=1$. $\lrcorner$

105. Знайти координати центра і півосі гіперболи, заданої рівнянням $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$.

$\ulcorner$ Зведемо дане рівняння до виду (33). Для цього виділимо повні квадрати з x та y:

$$16x^2-9y^2-64x-54y-161=0,$$

$$16x^2-64x-9y^2-54y-161=0,$$

$$16\left(x^2-4x\right)-9\left(y^2+6y\right)-161=0,$$

$$16\left(x^2-2\cdot x\cdot 2+2^2-2^2\right)-9\left(y^2+2\cdot y\cdot 3+3^2-3^2\right)-161=0,$$

$$16(x-2)^2-16\cdot 4-9(y+3)^2+9\cdot 9-161=0,$$

$$16(x-2)^2-9(y+3)^2=144,$$

$$\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+3)^2}{16}=1.$$

Порівнюючи отримане рівняння з (33), знаходимо координати центра $x_0 = 2$, $y_0 = 3$ і півосі $a = 3$, $b = 4$. $\lrcorner$

106. Знайти рівняння параболи, вершина якої знаходиться у початку координат, а вісь співпадає з віссю Ox, і яка проходить через точку $M(2;-4)$.

$\ulcorner$ Рівняння параболи буде мати вигляд (34): $y^2 = 2px$. Значення p знайдемо з умови, що парабола проходить через точку M, і її координати задовольняють це рівняння: $(-4)^2 = 2p\cdot 2$, $16 = 4p$, $p = 4$.

Отже, рівняння параболи $y^2 = 8x$. $\lrcorner$

107. Знайти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в точці $C(2;3)$, а вісь паралельна до осі Ox, і яка проходить через точку $M(4;-1)$.

$\ulcorner$ Рівняння параболи буде мати вигляд (35): $(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$. Так як координати вершини C – $x_0 = 2$, $y_0 = 3$, то $(y-3)^2 = 2p(x-2)$. Значення p знайдемо з умови, що парабола проходить через точку M, і координати цієї точки задовольняють рівняння параболи: $(-1-3)^2 = 2p(4-2)$, $16 = 4p$, $p = 4$.

Отже, рівняння параболи $(y-3)^2 = 8(x-2)$. $\lrcorner$

108. Знайти координати вершини і параметр параболи, заданої рівнянням $y^2 - 8x + 4y - 4 = 0$.

$\ulcorner$ Зведемо дане рівняння до вигляду (35):

$$y^2 - 8x + 4y - 4 = 0,$$

$$y^2 + 4y - 8x - 4 = 0,$$

$$y^2 + 2\cdot y\cdot 2 + 2^2 - 2^2 - 8x - 4 = 0,$$

$$(y+2)^2 - 8x - 8 = 0,$$

$$(y+2)^2 = 8(x+1).$$

Порівнюючи отримане рівняння з формулою (35), знаходимо $x_0 = -1$, $y_0 = -2$, $2p = 8$. Отже, координати вершини параболи $C(-1;-2)$, параметр – $p = 4$. $\lrcorner$

Вправи для самостійного розв'язання

109. Знайти координати центра і радіус кола, заданого рівнянням $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 = 0$.

110. Знайти рівняння кола, що проходить через точку $M(4;2)$ і має центр $C(3;-1)$.

111. Знайти рівняння кола, якщо точки $A(3;1)$ і $B(-5;5)$ є кінцями одного з його діаметрів.

112. Знайти рівняння еліпса, осі якого співпадають з осями координат і який проходить через точки $A(-2\sqrt{3};1)$ та $B(2\sqrt{2};-\sqrt{2})$.

113. Знайти координати центра і півосі еліпса, заданого рівнянням $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$.

114. Знайти рівняння гіперболи, осі якої співпадають з осями координат і яка проходить через точки $A(\sqrt{10};-2)$ та $B(4\sqrt{2};4\sqrt{3})$.

115. Знайти координати центра і півосі гіперболи, заданої рівнянням $4x^2 - 9y^2 - 16x - 18y - 29 = 0$.

116. Знайти рівняння параболи, вершина якої знаходиться у початку координат, а вісь співпадає з віссю Ox, і яка проходить через точку $M(3;6)$.

117. Знайти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в точці $C(1;-2)$, а вісь паралельна до осі Ox, і яка проходить через точку $M(7;4)$.

118. Знайти координати вершини і параметр параболи, заданої рівнянням $y^2 - 10x - 6y + 19 = 0$.

Відповіді:

109. $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 4$. **110.** $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 10$.

111. $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 20$. **112.** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.

113. $C(3;-1)$, $a = 3$, $b = \sqrt{5}$. **114.** $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{16} = 1$.

115. $C(2;-1)$, $a = 3$, $b = 2$. **116.** $y^2 = 12x$.

117. $(y+2)^2 = 6(x-1)$. **118.** $C(1;3)$, $p = 5$.