# Розділ 3. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

## 1. Пряма на площині

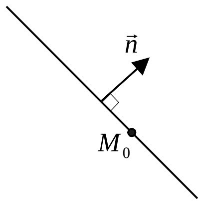
Є кілька типів рівнянь прямої на площині. В залежності від умови задачі, зручно скористатись для її розв'язання тим чи іншим типом рівняння.

а) *Загальне рівняння прямої на площині*

$$Ax + By + C = 0 . \qquad (1)$$

У прямокутній декартовій системі координат пряма $(1)$ перпендикулярна вектору $\vec{n} = (A;B)$, який називають *нормальним вектором* прямої.

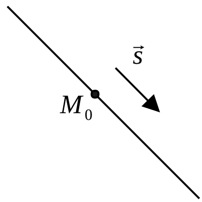
б) *Рівняння прямої, яка проходить через точку* $M_0(x_0;y_0)$ *перпендикулярно вектору* $\vec{n} = (A;B)$




$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 . \qquad (2)$$

Рис. 1

в) *Рівняння прямої, яка проходить через точку* $M_0(x_0;y_0)$ *паралельно напрямному вектору* $\vec{s} = (l;m)$




$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} . \qquad (3)$$

Рис. 2

г) *Рівняння прямої, яка проходить через точки* $M_1(x_1;y_1)$ *та* $M_2(x_2;y_2)$

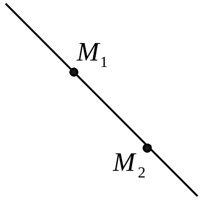



Рис. 3

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \qquad (4)$$

*Зауваження*. Якщо $x_1 = x_2$, то рівняння прямої має вигляд $x = x_1$; аналогічно при $y_1 = y_2$ рівняння прямої має вигляд $y = y_1$.

д) *Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом*

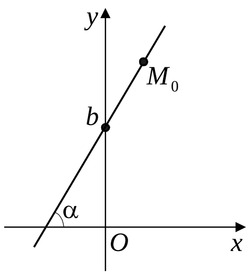



Рис. 4

$$y = kx + b, \qquad (5)$$

де $k = \operatorname{tg}\alpha$ – *кутовий коефіцієнт*.

е) *Рівняння прямої, яка проходить через точку* $M_0(x_0; y_0)$ *і має кутовий коефіцієнт* $k$

$$y - y_0 = k(x - x_0). \qquad (6)$$

Якщо дві прямі задані загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то один з кутів між ними знаходиться з формули

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \qquad (7)$$

Умова перпендикулярності прямих:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \qquad (8)$$

Умова паралельності прямих:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2} \qquad (9)$$

(при $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$ прямі паралельні, при $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$ прямі співпадають).

Якщо дві прямі задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами $y=k_1x+b_1$ і $y=k_2x+b_2$, то один з кутів між ними знаходиться з формули

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}. \qquad (10)$$

Умова перпендикулярності прямих:

$$k_1k_2=-1. \qquad (11)$$

Умова паралельності прямих:

$$k_1=k_2. \qquad (12)$$

Відстань $d$ від точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямої $Ax+By+C=0$ обчислюють за формулою

$$d=\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (13)$$

**1.** Визначити, які з точок $M_1(2;3)$, $M_2(-1;3)$, $M_3(-2;-1)$, $M_4(5;-5)$ лежать на прямій $4x+3y-5=0$.

$\ulcorner$ Для розв'язання даної задачі підставимо координати кожної із заданих точок в рівняння прямої.

$M_1(2;3)$: $4\cdot 2+3\cdot 3-5\neq 0$. Точка $M_1$ не лежить на прямій.

$M_2(-1;3)$: $4\cdot(-1)+3\cdot 3-5=0$. Точка $M_2$ лежить на прямій.

$M_3(-2;-1)$: $4\cdot(-2)+3\cdot(-1)-5\neq 0$. Точка $M_3$ не лежить на прямій.

$M_4(5;-5)$: $4\cdot 5+3\cdot(-5)-5=0$. Точка $M_4$ лежить на прямій. $\lrcorner$

**2.** На прямій $4x-5y-2=0$ знайти точку, у якої координата $y=2$.

$\ulcorner$ Координату $x$ знайдемо з рівняння прямої, підставивши в це рівняння $y=2$: $4x-5\cdot 2-2=0$, $4x=12$, $x=3$.

Отже, шукана точка має координати $(3;2)$. $\lrcorner$

**3.** Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2;-3)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=(4;5)$.

┌ Використаємо рівняння $(2)$:

$$4(x-2)+5(y-(-3))=0,\ 4x-8+5y+15=0, \text{ або } 4x+5y+7=0. \quad ┘$$

**4.** Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(1;-4)$ паралельно вектору $\vec{s}=(-3;2)$.

┌ Використаємо рівняння $(3)$:

$$\frac{x-1}{-3}=\frac{y-(-4)}{2},\ \frac{x-1}{-3}-\frac{y+4}{2}=0,\ \frac{2(x-1)-(-3)(y+4)}{-3\times 2}=0,$$

$$2(x-1)+3(y+4)=0,\ 2x-2+3y+12=0, \text{ або } 2x+3y+10=0. \quad ┘$$

**5.** Знайти рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(-3;4)$ і $M_2(1;2)$.

┌ Рівняння прямої має вигляд $(4)$:

$$\frac{x-(-3)}{1-(-3)}=\frac{y-4}{2-4},\ \frac{x+3}{4}=\frac{y-4}{-2},\ \frac{x+3}{4}-\frac{y-4}{-2}=0,$$

$$\frac{x+3-(-2)(y-4)}{4}=0,\ x+3+2y-8=0, \text{ або } x+2y-5=0.$$

*Зауваження*. Можна зробити перевірку, переконавшись, що координати даних точок задовольняють знайдене рівняння:

$$M_1(-3;4):\ -3+2\times 4-5=0;\ M_2(1;2):\ 1+2\times 2-5=0.$$

Отже, рівняння знайдено правильно. ┘

**6.** Знайти точку перетину прямих $4x-3y+9=0$ і $3x+2y-23=0$.

┌ Координати шуканої точки задовольняють обидва рівняння прямих і тому знаходяться із системи рівнянь

$$\begin{cases} 4x-3y+9=0 \\ 3x+2y-23=0. \end{cases}$$

Розв’яжемо цю систему за формулами Крамера (див. розділ 1):

$$\begin{cases} 4x-3y=-9 \\ 3x+2y=23; \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4\cdot 2-(-3)\cdot 3 = 8+9 = 17,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -9 & -3 \\ 23 & 2 \end{vmatrix} = -9\cdot 2-(-3)\cdot 23 = -18+69 = 51,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -9 \\ 3 & 23 \end{vmatrix} = 4\cdot 23-(-9)\cdot 3 = 92+27 = 119;$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{51}{17} = 3, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{119}{17} = 7.$$

Отже , точка перетину прямих – $(3;7)$. $\lrcorner$

**7.** Знайти рівняння прямої, яка відтинає від осі $Oy$ відрізок $b=4$ і утворює кут $\alpha = 60^\circ$ з додатним напрямом осі $Ox$.

$\ulcorner$ Використаємо рівняння $(5)$. Так як $k = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}60^\circ = \sqrt{3}$, то $y = \sqrt{3}x + 4$. $\lrcorner$

**8.** Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(3;4)$ і утворює кут $\alpha = 30^\circ$ з додатним напрямом осі $Ox$.

$\ulcorner$ Рівняння прямої має вигляд $(6)$, де $k = \operatorname{tg}30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Тому

$$y-4 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x-3), \quad y-4-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-3) = 0, \quad \frac{\sqrt{3}(y-4)-(x-3)}{\sqrt{3}} = 0,$$

$\sqrt{3}y - 4\sqrt{3} - x + 3 = 0$, або остаточно $x - \sqrt{3}y + 4\sqrt{3} - 3 = 0$. $\lrcorner$

**9.** Знайти кутовий коефіцієнт прямої, яка проходить через точки $M_1(3;2)$ та $M_2(-2;5)$.

$\ulcorner$ Кутовий коефіцієнт $k$ можна знайти з рівняння прямої, звівши його до виду $(5)$. Пряма задана двома точками. Тому використаємо рівняння $(4)$:

$$\frac{x-3}{-2-3} = \frac{y-2}{5-2}, \quad \frac{x-3}{-5} - \frac{y-2}{3} = 0, \quad \frac{3(x-3)-(-5)(y-2)}{-5\cdot 3} = 0,$$

$$3x-9+5y-10 = 0, \quad 3x+5y-19 = 0.$$

Зі знайденого рівняння прямої виразимо $y$: $5y = -3x+19$,

$y = -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{19}{5}$. Порівнюючи це рівняння з формулою $(5)$, знаходимо, що $k = -\dfrac{3}{5}$. ┘

**10.** Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2;5)$ перпендикулярно до прямої $4x + 3y - 2 = 0$.

┌ Шукана пряма перпендикулярна до заданої прямої, а тому паралельна до її нормального вектора $\vec{n} = (4;3)$ (див. пункт а)). Підставимо координати точки $M_0$ та вектора $\vec{n}$ в рівняння $(3)$:

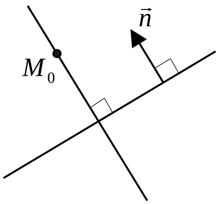


Рис. 5

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-5}{3},\quad \frac{x-2}{4} - \frac{y-5}{3} = 0,$$

$$\frac{3(x-2) - 4(y-5)}{12} = 0,\quad 3x - 6 - 4y + 20 = 0,$$

або остаточно $3x - 4y + 14 = 0$. ┘

**11.** Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(-3;2)$ і паралельна до прямої $2x + 5y + 7 = 0$.

┌ Шукана пряма перпендикулярна до нормального вектора заданої прямої $\vec{n} = (2;5)$. Використаємо рівняння $(2)$:

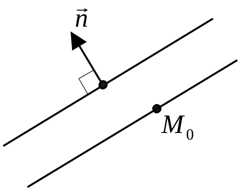


Рис. 6

$$2(x - (-3)) + 5(y - 2) = 0,$$

$$2x + 6 + 5y - 10 = 0,$$

або

$$2x + 5y - 4 = 0.$$ ┘

**12.** Відомі координати вершин трикутника: $A(3;6)$, $B(-5;8)$, $C(-1;-2)$. Знайти рівняння середньої лінії цього трикутника, яка паралельна до сторони $AB$.

┌ Нехай $M$ та $N$ – середини сторін $AC$ та $BC$ відповідно. Їх координати

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{3 + (-1)}{2} = 1,\quad y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{6 + (-2)}{2} = 2;$$

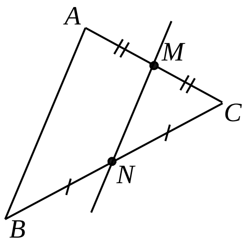



Рис. 7

$$x_N = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-5 + (-1)}{2} = -3,$$

$$y_N = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{8 + (-2)}{2} = 3.$$

Отже, $M(1;2)$, $N(-3;3)$. Рівняння прямої $MN$ має вигляд $(4)$:

$$\frac{x-1}{-3-1} = \frac{y-2}{3-2}, \quad \frac{x-1}{-4} - \frac{y-2}{1} = 0,$$

$$\frac{x-4-(-4)(y-2)}{-4} = 0, \quad x-4+4y-8=0, \text{ або } \quad x+4y-12=0. \quad \lrcorner$$

**13.** Вершини трикутника мають координати: $A(4;3)$, $B(1;8)$, $C(8;4)$. Знайти рівняння висоти цього трикутника, проведеної з вершини $A$ до сторони $BC$.

$\ulcorner$ Висота $AK$ проходить через точку $A$ перпендикулярно до вектора

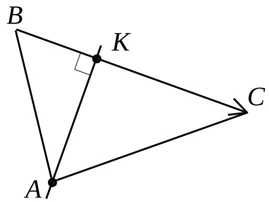



Рис. 8

$\vec{n} = \overrightarrow{BC} = (8-1;4-8) = (7;-4)$. Тому її рівняння має вигляд $(2)$:

$$7(x-4) - 4(y-3) = 0,$$

$$7x - 28 - 4y + 12 = 0,$$

або

$$7x - 4y - 16 = 0. \quad \lrcorner$$

**14.** Знайти точку перетину медіан трикутника, якщо відомі координати його вершин: $A(-1;7)$, $B(-5;1)$, $C(9;-5)$.

$\ulcorner$ Три медіани трикутника перетинаються в одній точці. Знайдемо рівняння двох будь-яких медіан, наприклад $CM$ і $BN$. Для цього спочатку обчислимо координати точки $M$ – середини сторони $AB$:

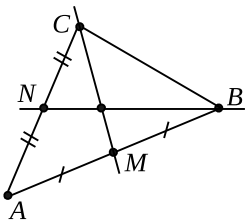



Рис. 9

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1 + (-5)}{2} = -3,$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{7+1}{2} = 4.$$

Отже, $M(-3;4)$. Рівняння медіани $CM$ має вигляд $(4)$:

$$\frac{x-9}{-3-9}=\frac{y-(-5)}{4-(-5)},\quad \frac{x-9}{-12}-\frac{y+5}{9}=0,$$

$$\frac{3(x-9)-(-4)(y+5)}{-36}=0,\quad 3x-27+4y+20=0.$$

Таким чином, рівняння прямої $CM$ – $3x+4y-7=0$.

Аналогічно знаходимо координати точки $N$ – середини сторони $AC$ і рівняння прямої $BN$:

$$x_N=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{-1+9}{2}=4,\quad y_N=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{7+(-5)}{2}=1,\quad N(4;1);$$

$$\frac{x-(-5)}{4-(-5)}=\frac{y-1}{1-1},\quad \frac{x+5}{9}=\frac{y-1}{0}.$$

Згідно з зауваженням до формули $(4)$, рівняння медіани $BN$ $y-1=0$. Координати точки перетину знаходяться з системи

$$\begin{cases} y-1=0 \\ 3x+4y-7=0, \end{cases}\quad \begin{cases} y=1 \\ 3x=7-4y, \end{cases}\quad \begin{cases} x=1 \\ y=1. \end{cases}$$

Отже, точка перетину медіан $O(1;1)$. $\lrcorner$

**15.** Знайти проекцію точки $P(8;2)$ на пряму $3x-y-2=0$ і точку, симетричну точці $P$ відносно даної прямої.

$\ulcorner$ Перпендикуляр $PO$ паралельний до нормального вектора даної прямої $\vec{n}=(3;-1)$ ( див. пункт а) ) і проходить через точку $P$. Його рівняння має вигляд $(3)$:

$$\frac{x-8}{3}=\frac{y-2}{-1},\quad \frac{x-8}{3}+\frac{y-2}{1}=0,$$

$$\frac{x-8+3(y-2)}{8}=0,\quad x+3y-14=0.$$

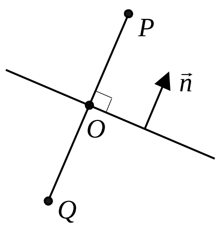



Рис. 10

Проекція точки $P$ є точкою перетину знайденої прямої і даної прямої. Її координати визначаються з системи

$$\begin{cases} 3x-y-2=0 \\ x+3y-14=0, \end{cases}\quad \begin{cases} 3x-y=2 \\ x+3y=14; \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot 3 - (-1)\cdot 1 = 10,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 14 \end{vmatrix} = 3\cdot 14 - 1\cdot 2 = 40,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 14 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3 - (-1)\cdot 14 = 20;$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{40}{10} = 4, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{20}{10} = 2.$$

Отже, знайдено проекцію точки $P$ – точку $O(4;2)$. Ця точка є серединою відрізка $PQ$. Тому

$$x_O = \frac{x_P + x_Q}{2}, \text{ звідки } 2x_O = x_P + x_Q, \quad x_Q = 2x_O - x_P;$$

аналогічно, $y_O = \dfrac{y_P + y_Q}{2}$, $2y_O = y_P + y_Q$, $y_Q = 2y_O - y_P$.

Обчислимо координати точки $Q$:

$$x_Q = 2\cdot 4 - 8 = 0, \quad y_Q = 2\cdot 2 - 2 = 2.$$

Отже, $Q(0;2)$. $\lrcorner$

**16.** Визначити кут між прямими:

а) $5x - y + 7 = 0$ і $3x + 2y - 3 = 0$;

б) $y = 3x + 2$ і $y = \dfrac{1}{2}x - 5$.

$\ulcorner$ а) Використаємо формулу $(7)$: $A_1 = 5$, $B_1 = -1$, $A_2 = 3$, $B_2 = 2$;

$$\cos\varphi = \frac{5\cdot 3 + (-1)\cdot 2}{\sqrt{5^2 + (-1)^2}\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{15 - 2}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{13}} = \frac{13}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{13}\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = 45^\circ.$$

б) Використаємо формулу $(10)$: $k_1 = 3$, $k_2 = \dfrac{1}{2}$;

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{1}{2} - 3}{1 + \frac{1}{2}\cdot 3} = \frac{-\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} = -1.$$

За відомим значенням $\operatorname{tg}\varphi = -1$ знаходимо $\varphi = 135^\circ$. ⌋

**17.** Перевірити, чи перпендикулярні прямі:

а) $3x - 2y + 4 = 0$ і $4x + 6y - 3 = 0$;

б) $y = 2x - 7$ і $y = -\dfrac{2}{3}x + 3$.

⌈ а) Використаємо формулу $(8)$. В даній задачі $A_1 = 3$, $B_1 = -2$, $A_2 = 4$, $B_2 = 6$. Так як $3\cdot 4 + (-2)\cdot 6 = 0$, то прямі перпендикулярні.

б) Використаємо умову $(11)$. В даній задачі $k_1 = 2$, $k_2 = -\dfrac{2}{3}$. Так як $k_1 \cdot k_2 \ne -1$, то прямі не перпендикулярні. ⌋

**18.** Перевірити, чи паралельні прямі:

а) $-3x + 4y - 7 = 0$ і $6x - 8y + 2 = 0$;

б) $y = 3x + 7$ і $y = 3x - 2$.

⌈ а) Використаємо умову $(9)$. В даній задачі

$$A_1 = -3,\ B_1 = 4,\ C_1 = -7,\ A_2 = 6,\ B_2 = -8,\ C_2 = 2.$$

Перевіряємо рівність $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} : \dfrac{-3}{6} = \dfrac{4}{-8}$. Отже, прямі паралельні, причому не співпадають, так як $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \ne \dfrac{C_1}{C_2}$.

б) Кутові коефіцієнти даних прямих однакові: $k_1 = k_2 = 3$. Згідно з умовою $(12)$ прямі паралельні. ⌋

**19.** Знайти відстань від точки $P(-2;3)$ до прямої $3x - 4y - 2 = 0$.

⌈ Використаємо формулу $(13)$:

$$d = \frac{\left|3\cdot(-2) - 4\cdot 3 - 2\right|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{\left|-6 - 12 - 2\right|}{5} = 4. \quad ⌋$$

**20.** Знайти відстань між двома паралельними прямими $3x + 4y - 8 = 0$ і $-3x - 4y + 18 = 0$.

⌈ На першій прямій візьмемо довільну точку $M_0(x_0; y_0)$ і обчислимо відстань від цієї точки до іншої прямої. Нехай $x_0 = 0$. Тоді з рівняння першої прямої знаходимо: $3\cdot 0 + 4\cdot y_0 - 8 = 0$, $y_0 = 2$. Отже,

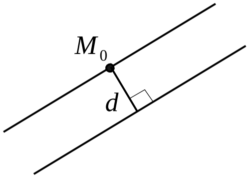



Рис. 11

$M_0(0;2)$. Відстань від знайденої точки до другої прямої знаходимо за формулою $(13)$:

$$d=\frac{|-3\cdot 0-4\cdot 2+18|}{\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}}=\frac{|0-8+18|}{5}=2. \quad \lrcorner$$

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

**21.** Визначити, які з точок $M_1(3;5)$, $M_2(-1;4)$, $M_3(4;-2)$, лежать на прямій $7x+y-26=0$.

**22.** На прямій $3x+4y+7=0$ знайти точку, у якої координата $x=3$.

**23.** Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(3;-1)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=(-3;4)$.

**24.** Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(3;2)$ паралельно вектору $\vec{s}=(2;5)$.

**25.** Знайти рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(3;-1)$ і $M_2(2;4)$.

**26.** Знайти точку перетину прямих $2x+7y+17=0$ і $3x+y-3=0$.

**27.** Знайти рівняння прямої, яка відтинає від осі $Oy$ відрізок $b=-2$ і утворює кут $\alpha=45^\circ$ з додатним напрямом осі $Ox$.

**28.** Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-1;3)$ і утворює кут $\alpha=60^\circ$ з додатним напрямом осі $Ox$.

**29.** Знайти кутовий коефіцієнт прямої, яка проходить через точки $M_1(4;3)$ і $M_2(1;-1)$.

**30.** Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(3;2)$ перпендикулярно до прямої $2x+5y+7=0$.

**31.** Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(4;1)$ паралельно до прямої $3x+2y-7=0$.

**32.** Відомі координати вершин трикутника $A(2;3)$, $B(8;7)$, $C(-2;9)$. Знайти рівняння середньої лінії цього трикутника, яка паралельна до сторони $AC$.

**33.** Відомі координати вершин трикутника: $A(3;-1)$, $B(1;7)$, $C(-5;1)$. Знайти рівняння висоти цього трикутника, проведеної з вершини $C$ до сторони $AB$.

**34.** Знайти точку перетину медіан трикутника, якщо відомі координати його вершин: $A(3;5)$, $B(-1;8)$, $C(-5;-4)$.

**35.** Знайти проекцію точки $P(7;5)$ на пряму $2x+3y-3=0$ і точку, симетричну точці $P$ відносно даної прямої.

**36.** Визначити кут між прямими:

а) $4x+2y+3=0$ і $x+2y-3=0$;

б) $y=x+5$ і $y=2x-3$.

**37.** Перевірити, чи перпендикулярні прямі:

а) $2x+3y+1=0$ і $2x-y+7=0$,

б) $y=\frac{3}{2}x-7$ і $y=-\frac{2}{3}x+5$.

**38.** Перевірити, чи паралельні прямі:

а) $6x-4y+7=0$ і $3x+2y+1=0$;

б) $y=2x+3$ і $y=2x-1$.

**39.** Знайти відстань від точки $P(7;1)$ до прямої $3x+4y-50=0$.

**40.** Знайти відстань між паралельними прямими $x+2y-7=0$ і $x+2y+3=0$.

Відповіді:

**21.** $M_1$ і $M_3$.

**22.** $M(3;-4)$.

**23.** $-3x+4y+13=0$.

**24.** $5x-2y-11=0$.

**25.** $5x+y-14=0$.

**26.** $M(2;-3)$.

**27.** $y=x-2$.

**28.** $\sqrt{3}x-y+3+\sqrt{3}=0$.

**29.** $4x-3y-7=0$, $k=\frac{4}{3}$.

**30.** $5x-2y-11=0$.

**31.** $3x+2y-14=0$.

**32.** $3x+2y-25=0$.

**33.** $x+4y+1=0$.

**34.** $O(-1;3)$.

**35.** $O(3;-1)$, $Q(-1;-7)$.

**36.** а) $\arccos\frac{4}{5}$; б) $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

**37.** а) ні; б) так.

**38.** а) ні; б) так.

**39.** 5.

**40.** $2\sqrt{5}$.

## 2. Площина у просторі

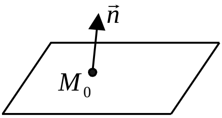
Є кілька типів рівнянь площини у просторі.

а) *Загальне рівняння площини*

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (14)$$

У прямокутній декартовій системі координат площина $(14)$ перпендикулярна вектору $\vec{n} = (A; B; C)$, який називається *нормальним вектором* площини.

б) *Рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (A; B; C)$*




$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (15)$$

Рис. 12

в) *Рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ паралельно неколінеарним векторам $\vec{s}_1 = (l_1; m_1; n_1)$ і $\vec{s}_2 = (l_2; m_2; n_2)$*

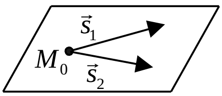



Рис. 13

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (16)$$

г) *Рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$ паралельно вектору $\vec{s} = (l; m; n)$*

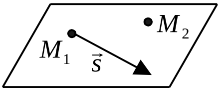



Рис. 14

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0. \qquad (17)$$

д) *Рівняння площини, яка проходить через точки* $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ *і* $M_3(x_3;y_3;z_3)$

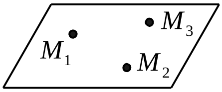



Рис. 15

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (18)$$

Один з кутів $\varphi$ між двома площинами $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ знаходиться як кут між їх нормальними векторами $\vec{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$ і $\vec{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$ з формули

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad (19)$$

Умова перпендикулярності площин – перпендикулярність їх нормальних векторів $\vec{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$ і $\vec{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0. \qquad (20)$$

Умова паралельності площин – паралельність їх нормальних векторів:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2} \qquad (21)$$

(при $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$ площини паралельні, при $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$ площини співпадають).

Відстань $d$ від точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до площини $Ax+By+Cz+D=0$ обчислюють за формулою

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (22)$$

**41.** Визначити, які з точок $M_1(2;4;-1)$, $M_2(3;-1;0)$, $M_3(-1;7;2)$ лежать на площині $2x-y+3z+3=0$.

Г Для розв’язання даної задачі підставимо координати заданих точок в рівняння площини.

$M_1(2;4;-1)$: $2\cdot 2-4+3\cdot(-1)+3=0$. Точка $M_1$ лежить на площині.

$M_2(3;-1;0)$: $2\cdot 3-(-1)+3\cdot 0+3\neq 0$. Точка $M_2$ не лежить на площині.

$M_3(-1;7;2)$: $2\cdot(-1)-7+3\cdot 2+3=0$. Точка $M_3$ лежить на площині. ⌋

**42.** На площині $4x+5y-3z+5=0$ знайти точку, якщо відомі дві її координати: $x=3$, $z=-1$.

⌈ Координату $y$ знайдемо з рівняння площини, підставивши в це рівняння відомі координати:

$4\cdot 3+5\cdot y-3\cdot(-1)+5=0$, $12+5y+3+5=0$, $5y=-20$, $y=-4$.

Отже, координати шуканої точки $(3;-4;-1)$. ⌋

**43.** Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(3;-1;2)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=(2;4;-3)$.

⌈ Рівняння площини має вигляд $(15)$:

$$2(x-3)+4(y-(-1))+(-3)(z-2)=0,$$

$$2x-6+4y+4-3z+6=0,$$

$$2x+4y-3z+4=0. \quad ⌋$$

**44.** Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(1;4;-3)$ паралельно векторам $\vec{s}_1=(2;-3;-1)$, $\vec{s}_2=(-3;2;0)$.

⌈ Рівняння площини має вигляд $(16)$:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-4 & z-(-3) \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Обчислимо визначник:

$$(x-1)\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}-(y-4)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}+(z+3)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=0,$$

$$(x-1)(-3\cdot 0-(-1)\cdot 2)-(y-4)(2\cdot 0-(-1)(-3))+(z+3)(2\cdot 2-(-3)\cdot(-3))=0,$$

$$2(x-1)+3(y-4)-5(z+3)=0,$$

$$2x-2+3y-12-5z-15=0,$$

або, остаточно, шукане рівняння площини – $2x+3y-5z-29=0$. ⌋

**45.** Знайти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(2;4;-1)$ і $M_2(3;1;2)$ паралельно вектору $\vec{s}=(-1;-3;2)$.

⌈ Рівняння має вигляд $(17)$:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z+1 \\ 3-2 & 1-4 & 2+1 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

Аналогічно до попереднього прикладу знаходимо

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z+1 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}=0,$$

$$(x-2)\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}-(y-4)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}+(z+1)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}=0,$$

$$(x-2)(-3\cdot 2-3\cdot(-3))-(y-4)(1\cdot 2-3\cdot(-1))+(z+1)(1\cdot(-3)-(-3)\cdot(-1))=0,$$

$$3(x-2)-5(y-4)-6(z+1)=0,$$

$$3x-6-5y+20-6z-6=0,$$

або остаточно маємо $3x-5y-6z+8=0$. ⌋

**46.** Знайти рівняння площини, яка проходить через три точки $M_1(2;-2;1)$, $M_2(1;3;2)$, $M_3(-1;1;3)$.

⌈ Рівняння площини має вигляд $(18)$:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z-1 \\ 1-2 & 3+2 & 2-1 \\ -1-2 & 1+2 & 3-1 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z-1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix}=0,$$

$$(x-2)\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}-(y+2)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}+(z-1)\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}=0,$$

$$(x-2)(5\cdot 2-3\cdot 1)-(y+2)(-1\cdot 2-1\cdot(-3))+(z-1)(-1\cdot 3-5\cdot(-3))=0,$$

$$7(x-2)-(y+2)+12(z-1)=0,$$

$$7x-14-y-2+12z-12=0,$$

або остаточно маємо $7x-y+12z-28=0$. ⌋

**47.** Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(3;-2;2)$ паралельно площині $2x-2y+5z+4=0$.

Задана площина перпендикулярна до вектора $\vec{n} = (2; -2; 5)$

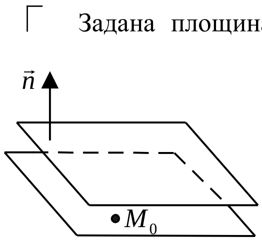



Рис. 16

( див. пункт а) ). Тому, внаслідок паралельності площин, шукана площина також перпендикулярна до цього вектора. Її рівняння буде мати вигляд $(15)$ :

$$2(x-3) - 2(y-(-2)) + 5(z-2) = 0,$$

$$2x - 6 - 2y - 4 + 5z - 10 = 0,$$

або $\quad 2x - 2y + 5z - 20 = 0$.

**48.** Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(4;1;-1)$ перпендикулярно до площин $2x + 2y - 3z + 2 = 0$ та $3x + y + 2z + 3 = 0$.

Згідно з пунктом а) перша з даних площин перпендикулярна до вектора $\vec{n}_1 = (2;2;-3)$, а друга – до $\vec{n}_2 = (3;1;2)$.

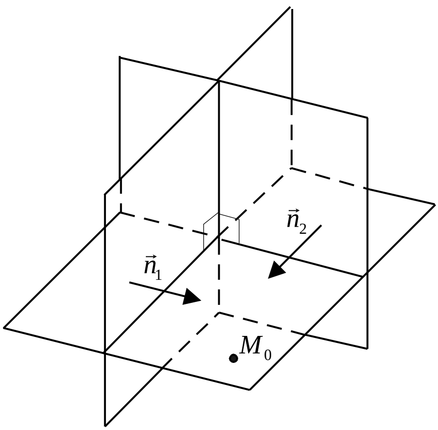



Рис. 17

Шукана площина буде перпендикулярна до даних площин і тому паралельна до векторів $\vec{n}_1$ та $\vec{n}_2$. Її рівняння буде мати вигляд $(16)$ :

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-1 & z+1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-4)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (z+1)\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-4)(2\cdot 2-(-3)\cdot 1) - (y-1)(2\cdot 2 - 3\cdot(-3)) + (z+1)(2\cdot 1 - 2\cdot 3) = 0,$$

$$7(x-4) - 13(y-1) - 4(z+1) = 0,$$

$$7x - 28 - 13y + 13 - 4z - 4 = 0,$$

або остаточно маємо $\; 7x - 13y - 4z - 19 = 0$.

*Зауваження.* Перевірити правильність знайденого рівняння площини можна переконавшись, що координати точки $M_0$ задовольняють його: $7\cdot 4-13\cdot 1-4\cdot(-1)-19=0$, і що нормальний вектор цієї площини $\vec{n}=(7;-13;-4)$ перпендикулярний до $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$:
$\vec{n}_1\cdot\vec{n}=2\cdot 7+2\cdot(-13)+(-3)\cdot(-4)=0$, $\vec{n}_2\cdot\vec{n}=3\cdot 7+1\cdot(-13)+2\cdot(-4)=0$.
Подібним чином можна перевірити і відповіді задач **44** – **46**.

**49.** Знайти кут між площинами $4x-2y-4z+3=0$ і $3x+6y+2z+7=0$.

$\ulcorner$ Нормальні вектори даних площин $\vec{n}_1=(4;-2;-4)$ і $\vec{n}_2=(3;6;2)$. Кут знаходимо з формули $(19)$:

$$\cos\varphi=\frac{4\cdot 3+(-2)\cdot 6+(-4)\cdot 2}{\sqrt{4^2+(-2)^2+(-4)^2}\sqrt{3^2+6^2+2^2}}=\frac{12-12-8}{\sqrt{36}\cdot\sqrt{49}}=\frac{-8}{6\cdot 7}=\frac{-4}{21},$$

$$\varphi=\arccos\left(-\frac{4}{21}\right). \quad \lrcorner$$

**50.** Перевірити, чи паралельні площини
а) $3x+2y-4z+7=0$ і $-6x-4y+8z+1=0$;
б) $2x+5y-3z+1=0$ і $4x+10y+z-3=0$.

$\ulcorner$ Використаємо умову $(21)$.

а) Нормальні вектори даних площин $\vec{n}_1=(3;2;-4)$, $\vec{n}_2=(-6;-4;8)$.
Так як $\frac{3}{-6}=\frac{2}{-4}=\frac{-4}{8}$, то площини паралельні.

б) Нормальні вектори даних площин $\vec{n}_1=(2;5;-3)$, $\vec{n}_2=(4;10;1)$.
Так як $\frac{2}{4}=\frac{5}{10}\neq\frac{-3}{1}$, то площини не паралельні. $\lrcorner$

**51.** Перевірити, чи перпендикулярні площини
а) $4x-3y+5z-1=0$ і $2x+5y+z-3=0$;
б) $3x+y-9z+7=0$ і $4x+6y+z-3=0$.

$\ulcorner$ Використаємо умову $(20)$.

а) Нормальні вектори даних площин $\vec{n}_1=(4;-3;5)$, $\vec{n}_2=(2;5;1)$.
Так як $4\cdot 2+(-3)\cdot 5+5\cdot 1\neq 0$, то площини не перпендикулярні.

б) Нормальні вектори даних площин $\vec{n}_1 = (3;1;-9)$, $\vec{n}_2 = (4;6;2)$. Так як $3\cdot 4 + 1\cdot 6 + (-9)\cdot 2 = 0$, то площини перпендикулярні. $\lrcorner$

**52.** При яких значеннях $A$ та $C$ площини $3x + 2y + Cz - 7 = 0$ і $Ax + 4y - 8z + 1 = 0$ паралельні?

$\ulcorner$ Для паралельності площин повинна виконуватись умова $(21)$

$$\frac{3}{A} = \frac{2}{4} = \frac{C}{-8}, \text{ звідки } \begin{cases} \dfrac{3}{A} = \dfrac{2}{4} \\ \dfrac{2}{4} = \dfrac{C}{-8}, \end{cases} \quad \begin{cases} A = 6 \\ C = -4. \end{cases} \quad \lrcorner$$

**53.** При яких значеннях $C$ площини $3x + 7y - 5z + 2 = 0$ і $2x + 7y + Cz - 3 = 0$ перпендикулярні?

$\ulcorner$ Використаємо умову $(20)$:

$$A_1 = 3,\ B_1 = 7,\ C_1 = -5,\ A_2 = 2,\ B_2 = 7;$$

$$3\cdot 2 + 7\cdot 7 + (-5)\cdot C = 0, \text{ звідки } -5C = -55,\ C = 11. \quad \lrcorner$$

**54.** Знайти відстань від точки $M_0(-2;-4;3)$ до площини $2x - y + 2z + 3 = 0$.

$\ulcorner$ Відстань знаходиться за формулою $(22)$:

$$d = \frac{|2\cdot(-2) - (-4) + 2\cdot 3 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{|-4 + 4 + 6 + 3|}{\sqrt{9}} = 3. \quad \lrcorner$$

**55.** Знайти відстань між двома паралельними площинами $2x - y + 2z + 9 = 0$ і $-4x + 2y - 4z + 21 = 0$.

$\ulcorner$ На одній з площин, наприклад, першій, виберемо довільну точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і обчислимо відстань від цієї точки до другої площини. Нехай $x_0 = z_0 = 0$. З першого рівняння знаходимо

$$2\cdot 0 - y_0 + 2\cdot 0 + 9 = 0,\ y_0 = 9.$$

Отже, $M_0(0;9;0)$. За формулою $(22)$ знаходимо відстань від цієї точки до другої площини:

$$d = \frac{|-4\cdot 0 + 2\cdot 9 - 4\cdot 0 + 21|}{\sqrt{(-4)^2 + 2^2 + (-4)^2}} = \frac{|0 + 18 + 0 + 21|}{\sqrt{36}} = \frac{39}{6} = 6{,}5.$$

Отже, відстань між даними площинами $d = 6{,}5$. $\lrcorner$

Вправи для самостійного розв’язання

**56.** Визначити, які з точок $M_1(3;2;4)$, $M_2(-1;1;4)$, $M_3(2;3;7)$ лежать на площині $2x+5y-z-12=0$.

**57.** На площині $3x-y-2z+2=0$ знайти точку, якщо відомі дві її координати: $x=0$, $y=-4$.

**58.** Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(3;5;-2)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=(-2;1;4)$.

**59.** Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(-1;-2;4)$ паралельно векторам $\vec{s}_1=(3;1;-2)$, $\vec{s}_2=(2;2;1)$.

**60.** Знайти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(3;2;-1)$ і $M_2(1;-2;0)$ паралельно вектору $\vec{s}=(1;3;-2)$.

**61.** Знайти рівняння площини, яка проходить через три точки $M_1(1;2;-3)$, $M_2(2;0;3)$, $M_3(-1;-3;2)$.

**62.** Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(3;1;-4)$ паралельно площині $2x-2y+5z-7=0$.

**63.** Знайти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(1;-3;2)$, $M_2(3;1;-1)$ і перпендикулярна до площини $3x+4y+2z-7=0$.

**64.** Знайти кут між площинами $x-2y+2z-3=0$ і $3x+4y-7=0$.

**65.** Перевірити, чи паралельні площини

а) $2x-3y+5z+8=0$ і $-4x+5y-10z+7=0$;

б) $6x-4y-2z+8=0$ і $-3x+2y+z-5=0$.

**66.** Перевірити, чи перпендикулярні площини

а) $5x+2y-3z+4=0$ і $x-y+z+7=0$;

б) $3x-2y-3z+3=0$ і $2y+z+4=0$.

**67.** При яких значеннях $B$ та $C$ площини $6x+By-9z+7=0$ і $2x-y+Cz+1=0$ паралельні?

**68.** При якому значенні $A$ площини $3x+2y+5z-7=0$ і $Ax+2y+z-4=0$ перпендикулярні?

**69.** Знайти відстань від точки $M_0(3;3;-4)$ до площини $6x+4y+3z+10=0$.

**70.** Знайти відстань між двома паралельними площинами $x+2y+2z-8=0$ і $x+2y+2z+1=0$.